MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München.

David Hilbert
in Göttingen.

58. Band.

Mit 38 Figuren im Text.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1904.

Inhalt des achtundfünfzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Seite

Bliß, G. A., in Chicago. Jacobi's Criterion when both end-points are variable . . . 70

Blumenthal, Otto, in Göttingen. Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen. (Zweite Hälfte) . . . 497

Brill, A., in Tübingen. Über zyklische Bewegung . . . 469

Faber, Georg, in Traunstein. Über arithmetische Eigenschaften analytischer Funktionen . . . 545

Fejér, Leopold, aus Budapest. Untersuchungen über Fouriersche Reihen . . . 51

Furtwängler, Ph., in Potsdam. Über die Reziprozitätsgesetze zwischen l^{ten} Potenzresten in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet . . . 1

Großmann, Marcel, in Frauenfeld (Schweiz). Die Konstruktion des geradlinigen Dreiecks der nichteuklidischen Geometrie aus den drei Winkeln. (Mit 2 Figuren im Text) . . . 578

Hahn, Hans, in Wien. Bemerkungen zur Variationsrechnung . . . 148

Hawkes, H. E., in New Haven, Conn. Enumeration of Non-Quaternion Number-Systems . . . 361

Heller, Siegfried, in Kiel. Untersuchungen über die natürlichen Gleichungen krummer Flächen . . . 565

Holmgren, Erik, in Upsala. Über die Existenz der Grundlösung bei einer linearen partiellen Differentialgleichung der 2. Ordnung vom elliptischen Typus . . . 404

Hurwitz, A., in Zürich. Über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen. (Mit 2 Figuren im Text) . . . 343

Kellogg, O. D., in Princeton, New Jersey U. S. A. Unstetigkeiten in den linearen Integralgleichungen . . . 441

Kneser, Adolf, in Berlin. Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik . . . 81

— — — Zur Proportionslehre . . . 583

Kürschák, Josef, in Budapest. Über symmetrische Matrices . . . 380

Lasker, Emanuel, Zur Theorie der kanonischen Formen . . . 434

Mason, Max, in New Haven. Zur Theorie der Randwertaufgaben . . . 528

Mayer, A., in Leipzig. Über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz in der Theorie des Maximums und Minimums der einfachen Integrale . . . 235

Mollerup, J., in Kopenhagen. Die Beweise der ebenen Geometrie ohne Benutzung der Gleichheit und Ungleichheit der Winkel. (Mit 9 Figuren im Text) . . . 479

Seite

Pringsheim, Alfred, in München. Elementare Theorie der ganzen transcendenten Funktionen von endlicher Ordnung 257
Réthy, Moritz, in Budapest. Über das Prinzip der Aktion und über die Klasse mechanischer Prinzipien, der es angehört 169
Schönflies, A., in Königsberg i. Pr. Beiträge zur Theorie der Punktmengen. I. 195
—— —— —— Über den wissenschaftlichen Nachlaß Julius Plückers 385
Schor, Dimitry, †. Neuer Beweis eines Satzes aus den „Grundlagen der Geometrie" von Hilbert. (Mit 2 Figuren im Text) 427
Vivanti, G., a Messina. Sul *valor medio* di Pringsheim e sulla sua applicazione alla teoria delle funzioni analitiche 457
Wernicke, P., in Göttingen. Über den kartographischen Vierfarbensatz. (Mit 23 Figuren im Text) 413
Wilczynski, E. J., in Berkeley, Cal. A fundamental theorem in the theory of ruled surfaces 249
—— —— —— Bemerkung zu diesem Aufsatz 584
Zermelo, E., in Göttingen. Über die Herleitung der Differentialgleichung bei Variationsproblemen 558

Über die Reziprozitätsgesetze zwischen l^{ten} Potenzresten in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet.

Von

PH. FURTWÄNGLER in Potsdam.

Einleitung.

In den Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften*) habe ich eine Arbeit über Reziprozitätsgesetze zwischen l^{ten} Potenzresten in algebraischen Zahlkörpern veröffentlicht, deren Inhalt hier in gekürzter und zum Teil vereinfachter Form wiedergegeben werden soll. Gleichzeitig habe ich einige weitere Untersuchungen, die ich inzwischen ausgeführt habe, in die Darstellung eingefügt. Im allgemeinen habe ich mich bemüht, um den Gedankengang des Ganzen sowohl wie der einzelnen Beweise mehr hervortreten zu lassen, die Details der Beweise etwas zurückzudrängen und nur die wesentlichen Punkte hervorzuheben. Bezüglich weiterer Ausführungen verweise ich auf die citierte Arbeit.

Ich habe bereits an der anfangs genannten Stelle betont, daß meine Untersuchungen auf den fundamentalen Entwickelungen von D. Hilbert**) fußen, der mit genialem Scharfsinn die allgemeinen Ideen, die in den Kummerschen speziellen Ansätzen liegen, erkannte und durch ihre Weiterbildung die Hülfsmittel schuf, mit denen wohl die allgemeinsten Reziprozitätsgesetze zwischen beliebigen Potenzresten in beliebigen algebraischen Zahlkörpern zugänglich sein werden. Die vorliegende Arbeit

*) Ph. Furtwängler. Über das Reziprozitätsgesetz der l^{ten} Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet. Eine von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen preisgekrönte Arbeit. Abhandlungen der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Math.-Phys. Klasse. Neue Folge. Bd. II. Nr. 3. Berlin 1902.

**) D. Hilbert. Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. IV, 1894/95. Berlin 1897. [Zitiert mit „Algebr. Zahlk."] D. Hilbert. Über die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers. Math. Annalen, Bd. 51, pg. 1—127. 1898. [Zitiert mit „Rel. quadr. Zahlk."].

ist ein Schritt zu diesem Ziel. Um dem Leser ihre Lektüre möglichst zu erleichtern, habe ich mich in den Bezeichnungen und auch in der äußeren Form der Darstellung an D. Hilbert angeschlossen.

Eine kurze Übersicht über die gewonnenen Resultate findet man am Schluß der Arbeit.

I.

§ 1.

Definitionen und vorbereitende Sätze.

Ich beginne damit, kurz einige Begriffe und Definitionen anzugeben, die im Folgenden gebraucht werden.

Es sei l eine ungerade Primzahl und ζ eine l^{te} Einheitswurzel. Wir bezeichnen mit $k(\zeta)$ den aus ζ entspringenden Kreiskörper und mit k einen beliebigen Oberkörper dieses Kreiskörpers, dessen Relativgrad m sei. Das in der Diskriminante von $k(\zeta)$ aufgehende Ideal $(1-\zeta)$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{l}$. Wir geben ferner folgende Definitionen:

Def. 1. *Wir nennen die Zahl α aus k einen l^{ten} Potenzrest nach dem zu $\mathfrak{l}$ und α relativ primen Primideal $\mathfrak{p}$, wenn die Kongruenz:*

$$x^l \equiv \alpha(\mathfrak{p})$$

durch eine ganze Zahl aus k befriedigt werden kann.

Def. 2. *Das Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ bedeutet, wenn α eine ganze zu $\mathfrak{p}$ prime Zahl und $\mathfrak{p}$ ein zu $\mathfrak{l}$ primes Primideal aus k ist, diejenige l^{te} Einheitswurzel ζ^a, für welche die Kongruenz:*

$$\alpha^{\frac{n(\mathfrak{p})-1}{l}} \equiv \zeta^a(\mathfrak{p})$$

gilt. $n(\mathfrak{p})$ ist das Zeichen für die Norm von $\mathfrak{p}$.

Das Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ bezeichnen wir als den l^{ten} Potenzcharakter der Zahl α nach $\mathfrak{p}$.

Man beachte, um die Möglichkeit der vorstehenden Definitionen zu erkennen, daß $n(\mathfrak{p})$ stets kongruent 1 modulo l ist, weil k ein Oberkörper von $k(\zeta)$ ist. Für die eingeführten Begriffe gilt der folgende Satz:

Satz 1. *Die ganze Zahl α aus k ist stets dann und nur dann l^{ter} Potenzrest nach dem zu $\mathfrak{l}$ primen Primideal $\mathfrak{p}$, wenn*

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) = 1.$$

Für das Potenzrestsymbol gilt die Formel

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) \cdot \left(\frac{\beta}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha\beta}{\mathfrak{p}}\right).$$

Ferner definieren wir noch:

Def. 3.

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) \cdot \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{q}}\right) \cdots,$$

wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q} \cdots$ *die Zerlegung von* $\mathfrak{a}$ *in Primideale ist.*

Zum Studium der Reziprozitätsgesetze im Körper k hat D. Hilbert die relativ-cyklischen Oberkörper des Körpers k vom Primzahlrelativgrade l herangezogen. Ein solcher Körper, den wir mit $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ bezeichnen, entsteht, wenn man dem Körper k die Zahl $\sqrt[l]{\mu}$ adjungiert, wo μ eine ganze Zahl aus k bezeichnet, die nicht l^{te} Potenz einer ganzen Zahl in k ist. Ersetzt man $\sqrt[l]{\mu}$ durch $\zeta\sqrt[l]{\mu}$ — wir bezeichnen diese Substitution mit S —, so geht aus K ein relativ konjugierter Körper hervor. Die Relativgruppe von K ist:

$$1,\ S,\ S^2, \cdots S^{l-1}.$$

Von besonderer Wichtigkeit für die folgenden Untersuchungen ist der von D. Hilbert*) eingeführte Begriff des Normenrestes.

Def. 4. *Sind* ν *und* μ *zwei ganze Zahlen aus* k, *von denen die letzte nicht die* l^{te} *Potenz einer ganzen Zahl aus* k *ist, so heißt* ν *Normenrest des Körpers* $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ *nach dem zu* $\mathfrak{l}$ *primen Primideal* $\mathfrak{p}$ *aus* k, *wenn für jeden positiven Exponenten* e *eine ganze Zahl* A *aus* K *existiert, so daß*

$$\nu \equiv N_k(\mathsf{A}) \quad (\mathfrak{p}^e).$$

$N_k(\mathsf{A})$ *bezeichnet die Relativnorm von* A *in Bezug auf* k.

Mit dem Begriff des Normenrestes in engstem Zusammenhange steht, wie sich später zeigen wird, das Normenrestsymbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)$, das wir jetzt definieren**):

Def. 5. *Sind* ν *und* μ *zwei ganze Zahlen aus* k *und ist* $\mathfrak{p}$ *ein zu* $\mathfrak{l}$ *primes Primideal aus* k, *das in* μ *genau zur* a^{ten}, *in* ν *genau zur* b^{ten} *Potenz aufgeht, so kann man den Quotienten* $\frac{\nu^a}{\mu^b}$ *in der Form* $\frac{\varrho}{\sigma}$ *darstellen, wo* ϱ *und* σ *zwei ganze zu* $\mathfrak{p}$ *prime Zahlen aus* k *bedeuten. Wir setzen dann:*

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) \cdot \left(\frac{\sigma}{\mathfrak{p}}\right)^{-1}.$$

---

*) Algebr. Zahlk. § 129, pg. 402.

**) D. Hilbert. Algebr. Zahlk. § 131, pg. 411.

§ 2.

Die Zerlegung der Primideale aus k in den relativ-cyklischen Oberkörpern K vom Relativgrade l.

Wir definieren zunächst noch:

Def. 6. *Ein Ideal aus K heißt ambig, wenn es mit seinen relativ konjugierten Idealen identisch ist und kein von 1 verschiedenes Ideal aus k als Faktor enthält,*

und erinnern an folgenden allgemein für relativ-cyklische Oberkörper gültigen Satz:

Satz 2. *Die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ in Bezug auf k ist durch alle ambigen Primideale und durch keine anderen Primideale teilbar*).*

Wir erörtern jetzt zuerst das Verhalten der $\mathfrak{l}$ primen Primideale aus k in K, das durch folgenden Satz klargestellt wird.

Satz 3. 1) *Ist $\mathfrak{p}$ ein zu $\mathfrak{l}$ primes Primideal in k, das in μ zur a^{ten} Potenz aufgeht, so geht $\mathfrak{p}$, wenn $a \not\equiv 0\ (l)$ ist, in der Relativdiskriminante von $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ in Bezug auf k auf, und es wird in K:*

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^l.$$

2) *Ist $a \equiv 0\ (l)$, so geht $\mathfrak{p}$ in der Relativdiskriminante nicht auf und man kann dann überhaupt μ zu $\mathfrak{p}$ relativ prim annehmen, da man, ohne K zu ändern, μ durch eine Zahl μ^*, die zu $\mathfrak{p}$ prim ist, ersetzen kann. Ist aber μ zu $\mathfrak{p}$ prim, so zerfällt $\mathfrak{p}$ entweder in K in l verschiedene Primideale oder bleibt auch in K Primideal, je nachdem $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ oder $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1$ ist.*

Der Beweis für den vorstehenden Satz ergibt sich aus folgenden Überlegungen. Ist π eine genau durch die erste Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbare Zahl aus k und ist ϱ eine durch $\frac{\pi}{\mathfrak{p}}$ teilbare, zu $\mathfrak{p}$ prime ganze Zahl aus k, so ist, wenn $\mathfrak{p}$ in μ zur a^{ten} Potenz aufgeht, wo $a \not\equiv 0\ (l)$,

$$\mathsf{A} = \sqrt[l]{\frac{\mu^{a_1}\varrho^{nl}}{\pi^{nl}}}$$

eine ganze Zahl aus K, wenn man a_1 und n so wählt, daß

$$aa_1 = nl + 1.$$

Bedenkt man dann, daß der größte gemeinsame Teiler von A und $\mathfrak{p}$ notwendig ein ambiges Primideal in K werden muß, so ergibt sich leicht der erste Teil des Satzes.

---

*) D. Hilbert, Algebr. Zahlk. Satz 93, pg. 277.

Zum Beweise des zweiten Teiles bemerke man, daß aus $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)=1$ die Existenz einer ganzen Zahl α in k folgt, die der Kongruenz

$$\mu \equiv \alpha^l (\mathfrak{p})$$

genügt. Da die Zahl $(\sqrt[l]{\mu}-\alpha)$ aus K nun nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar sein kann, aber mit $\mathfrak{p}$ einen gemeinsamen Teiler haben muß, so folgt leicht die Zerlegbarkeit von $\mathfrak{p}$ in l verschiedene Primideale.

Ist umgekehrt $\mathfrak{p}$ in l verschiedene Primideale zerlegbar, von denen eines $\mathfrak{P}$ sei, so folgt aus der Gleichheit der Normen von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{P}$, daß jede ganze Zahl in K einer ganzen Zahl aus k nach $\mathfrak{P}$ kongruent ist, also auch

$$\sqrt[l]{\mu} \equiv \beta \;(\mathfrak{P}),$$

wo β eine ganze Zahl aus k bedeutet. Dann ist aber auch $\mu \equiv \beta^l(\mathfrak{p})$, also $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)=1$.

Über das Verhalten der in $\mathfrak{l}$ aufgehenden Primideale gibt uns der folgende Satz Aufschluß.

Satz 4. 1) *Ist $\mathfrak{l}_1$ ein in $\mathfrak{l}$ genau zur l_1^{ten} Potenz aufgehendes Primideal und geht $\mathfrak{l}_1$ in μ zur a^{ten} Potenz auf, so ist, wenn $a \not\equiv 0 \;(l)$, $\mathfrak{l}_1$ ein Teiler der Relativdiskriminante und es wird in $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$*

$$\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{L}_1^l,$$

wo $\mathfrak{L}_1$ ein ambiges Primideal aus K bedeutet.

2) *Ist $a \equiv 0 \;(l)$, so können wir wieder μ zu $\mathfrak{l}_1$ prim annehmen. Es sind dann drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der höchste Exponent e, für den die Kongruenz*

$$\mu \equiv x^l (\mathfrak{l}_1^e)$$

in k lösbar ist, kleiner, gleich oder größer als ll_1 ist. Nur im ersten Falle geht $\mathfrak{l}_1$ wieder in der Relativdiskriminante von K auf und wird in K die l^{te} Potenz eines ambigen Primideals; im zweiten Falle bleibt $\mathfrak{l}_1$ auch in K Primideal und im dritten Falle zerfällt es in K in l verschiedene Primfaktoren.

Bezüglich des ersten Teiles des vorstehenden Satzes verweise ich auf den Beweis des vorigen Satzes; die Richtigkeit des zweiten Teiles erkennt man durch folgende Überlegungen. Besteht in k die Kongruenz

$$\mu \equiv \alpha^l (\mathfrak{l}_1^e)$$

und ist $\mathfrak{l}_1^e$ die höchste Potenz von $\mathfrak{l}_1$, für welche die genannte Kongruenz gilt, so setzen wir $e = rl + s$ $(r \geqq 0,\ s \geqq 0)$ und bilden, indem wir zur Abkürzung $\sqrt[l]{\mu} = \mathsf{M}$ setzen, die Zahl

$$\mathsf{A} = (\alpha - \mathsf{M}) \cdot \left(\frac{\varrho}{\lambda_1}\right)^r.$$

Dabei bedeutet λ_1 eine genau durch die erste Potenz von $\mathfrak{l}_1$ teilbare Zahl aus k, ϱ eine durch $\frac{\lambda_1}{\mathfrak{l}_1}$ teilbare zu $\mathfrak{l}_1$ prime ganze Zahl aus k, so daß A, wie leicht zu erkennen, eine ganze Zahl aus K ist. Ist nun e größer als ll_1, so ist A nicht durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar, hat aber mit $\mathfrak{l}_1$ einen gemeinschaftlichen Faktor $\mathfrak{L}_1$, der von seinen relativ konjugierten verschieden ist, d. h. $\mathfrak{l}_1$ zerfällt in K in l verschiedene Primfaktoren. Ist $e < ll_1$ und $s \not\equiv 0\ (l)$, so ist A wiederum nicht durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar, hat jedoch mit $\mathfrak{l}_1$ einen gemeinsamen Faktor, der aber jetzt mit seinen relativkonjugierten identisch, also ambig ist; in diesem Falle wird also $\mathfrak{l}_1$ in K die l^{te} Potenz eines ambigen Primideals. Ist endlich $e = ll_1$, so ist A eine Zahl, deren Relativdiskriminante zu $\mathfrak{l}_1$ prim ist; es geht folglich $\mathfrak{l}_1$ in der Relativdiskriminante von K nicht auf.

Setzen wir nun umgekehrt voraus, daß $\mathfrak{l}_1$ in K in l verschiedene Primfaktoren zerfällt, unter denen einer mit $\mathfrak{L}_1$ bezeichnet werde, so folgt aus der Gleichheit der Normen von $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{l}_1$ eine Kongruenz:

$$\sqrt[l]{\mu} \equiv \beta_1\,(\mathfrak{L}_1)$$

wo β_1 eine ganze Zahl aus k bezeichnet. Dann gilt aber auch:

$$\mu \equiv \beta_1{}^l\,(\mathfrak{l}_1)$$

und folglich auch, da $\mathfrak{l}_1$ in der Relativdiskriminante von K nicht aufgeht,

$$\mu \equiv \beta_1{}^l\,(\mathfrak{l}_1{}^l).$$

Es ist demnach

$$(\mathsf{M} - \beta_1) \cdot \frac{\varrho}{\lambda_1}$$

eine ganze Zahl in K und als solche wieder einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{L}_1$ kongruent. Daraus folgt die Existenz einer ganzen Zahl β_2 in k, die der Kongruenz

$$\mu \equiv \beta_2{}^l\,(\mathfrak{l}_1{}^{l+1})$$

genügt. Das angegebene Verfahren kann man fortsetzen, bis man zu einer Zahl β aus k gelangt, die der Kongruenz

$$\mu \equiv \beta^l\,(\mathfrak{l}_1{}^{ll_1+1})$$

genügt.

Bleibt $\mathfrak{l}_1$ auch in K Primideal, so kommt man in folgender Weise zu der gewünschten Kongruenz. Wir bemerken zunächst, daß jede zu $\mathfrak{l}_1$ prime ganze Zahl aus k der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl aus k nach $\mathfrak{l}_1$ kongruent ist; es gilt also:

$$\mu \equiv \gamma_1{}^l\,(\mathfrak{l}_1)$$

wo γ_1 eine geeignete Zahl aus k bezeichnet, und infolgedessen auch, da $\mathfrak{l}_1$ wieder in der Relativdiskriminante nicht aufgeht,

$$\mu \equiv \gamma_1^{\,l}(\mathfrak{l}_1^{\,l})$$

und

$$\mathsf{M} \equiv \gamma_1(\mathfrak{l}_1).$$

Es ist daher

$$(\mathsf{M}-\gamma_1)\cdot\frac{\varrho}{\lambda_1}$$

eine ganze Zahl aus K, folglich $(\mu-\gamma_1^{\,l})\cdot\frac{\varrho^l}{\lambda_1^{\,l}}$ eine ganze Zahl aus k. Es existiert demnach eine ganze Zahl δ, so daß

$$(\mu-\gamma_1^{\,l})\cdot\left(\frac{\varrho}{\lambda_1}\right)^l \equiv \delta^l(\mathfrak{l}_1)$$

und folglich auch eine ganze Zahl γ_2 aus k, so daß

$$\mu \equiv \gamma_2^{\,l}(\mathfrak{l}_1^{\,2l}).$$

Dies Verfahren kann man fortsetzen, bis sich eine ganze Zahl γ aus k ergibt, die der Kongruenz

$$\mu \equiv \gamma^l(\mathfrak{l}_1^{\,l l_1})$$

genügt.

Aus den angeführten Tatsachen ergibt sich leicht die Richtigkeit unseres Satzes.

§ 3.

Normenreste und das Normenrestsymbol.

Wir bemerken zunächst, daß für das Normenrestsymbol die im folgenden Satze zusammengestellten, leicht zu beweisenden Formeln gelten.

Satz 5. *Bedeuten μ, ν, μ_1, ν_1, μ^*, ν^*, α, β, γ, δ ganze Zahlen aus k und ist $\mathfrak{p}$ ein zu $\mathfrak{l}$ primes Primideal in k, so gilt*

1) $\left(\frac{\mu,\mu}{\mathfrak{p}}\right)=1$,

2) $\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{p}}\right)\cdot\left(\frac{\mu,\nu}{\mathfrak{p}}\right)=1$,

3) $\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\nu_1,\mu}{\mathfrak{p}}\right)=\left(\frac{\nu\nu_1,\mu}{\mathfrak{p}}\right)$, $\quad\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\nu,\mu_1}{\mathfrak{p}}\right)=\left(\frac{\nu,\mu\mu_1}{\mathfrak{p}}\right)$,

4) $\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{p}}\right)=\left(\frac{\nu^*,\mu^*}{\mathfrak{p}}\right)$, wenn $\frac{\nu}{\nu^*}=\frac{\alpha^l}{\beta^l}$, $\frac{\mu}{\mu^*}=\frac{\gamma^l}{\delta^l}$.

Ehe ich zum Beweise des Hauptsatzes über die Normenreste übergehe, schicke ich noch zwei Sätze vorweg, die später gebraucht werden.

Satz 6. 1) *Ist $\mathfrak{p}$ ein zu $\mathfrak{l}$ primes Primideal und α eine zu $\mathfrak{p}$ prime ganze Zahl aus k, so ist, wenn die Kongruenz*

$$\alpha \equiv x^l(\mathfrak{p})$$

in k lösbar ist, auch die Kongruenz

$$\alpha \equiv x^l (\mathfrak{p}^l)$$

in k lösbar, wo e einen beliebigen positiven Exponenten bedeutet.

2) *Ist $\mathfrak{l}_1$ ein in $\mathfrak{l}$ genau zu l_1^{ten} Potenz aufgehendes Primideal und β eine zu $\mathfrak{l}_1$ prime ganze Zahl aus k, so ist, wenn die Kongruenz*

$$\beta \equiv x^l (\mathfrak{l}_1^{l l_1 + 1})$$

in k lösbar ist, auch die Kongruenz

$$\beta \equiv x^l (\mathfrak{l}_1^{l l_1 + e})$$

in k lösbar, wo e einen beliebigen positiven Exponenten bedeutet.

Die Beweise für diese Behauptungen sind ganz analog den für entsprechende Sätze in der Theorie der rationalen Zahlen gültigen Beweisen.

Satz 7. *Ist ν eine genau durch $\mathfrak{p}^b$ teilbare ganze Zahl aus k und* A *ganze Zahl aus $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ von der Beschaffenheit, daß*

$$\nu \equiv N_k(\mathsf{A})\,(\mathfrak{p}^{b+1})$$

gilt, so läßt sich auch eine ganze Zahl B *aus K finden, die der Kongruenz:*

$$\nu \equiv N_k(\mathsf{B})\,(\mathfrak{p}^{b+e})$$

genügt, wo e einen beliebigen positiven Exponenten bedeutet.

Beweis: Ist ν prim zu $\mathfrak{p}$, so gilt dasselbe von A und man kann daher eine ganze Zahl aus K bestimmen mit der Eigenschaft:

$$\mathsf{A}\mathsf{A}_1 \equiv 1\,(\mathfrak{p})$$

aus der sich dann

$$\nu N_k(\mathsf{A}_1) \equiv 1\,(\mathfrak{p})$$

ergibt. Aus der letzten Kongruenz erkennt man dann leicht mit Hülfe von Satz 6 die Richtigkeit unserer Behauptung.

Ist ν genau durch $\mathfrak{p}^b$ teilbar und $b > 0$, so können wir $b \not\equiv 0\,(l)$ annehmen, weil wir bei der Annahme $b \equiv 0\,(l)$ sofort auf den ersten Fall zurückkommen können. Ist aber $b \not\equiv 0\,(l)$, so kann $\mathfrak{p}$ in K nicht Primideal bleiben. Es sei $\mathfrak{P}$ ein Primfaktor von $\mathfrak{p}$ in K und Π eine genau durch $\mathfrak{P}$ teilbare Zahl in K, die zu den mit $\mathfrak{P}$ relativ konjugierten und von $\mathfrak{P}$ verschiedenen Primidealen prim ist; ihre Relativnorm sei π; ferner sei P eine durch $\frac{\Pi}{\mathfrak{P}}$ teilbare zu $\mathfrak{p}$ teilerfremde ganze Zahl aus K mit der Relativnorm ϱ. Die Richtigkeit unserer Behauptung ergibt sich dann durch Betrachtung der Zahl $\nu \cdot \left(\frac{\varrho}{\pi}\right)^b$, die zu $\mathfrak{p}$ teilerfremd ist.

Wir können nunmehr zum Beweise des folgenden Hauptsatzes übergehen.

Satz 8. *Sind ν und μ zwei beliebige ganze Zahlen in k und $\mathfrak{p}$ ein*

zu $\mathfrak{l}$ primes Primideal in k, so ist ν stets dann und nur dann Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach $\mathfrak{p}$, wenn

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = 1.$$

Beweis: Wir unterscheiden zwei Fälle:

I) μ ist zu $\mathfrak{p}$ prim.

Ist ν genau durch $\mathfrak{p}^b$ teilbar, so ist $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)^{-b}$. Es sind daher die beiden Nachweise zu erbringen:

1) Ist ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach $\mathfrak{p}$, so ist $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)^b = 1$.

2) Ist $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)^b = 1$, so ist ν Normenrest von K nach $\mathfrak{p}$.

1) Ist $\nu \equiv N_k(\mathsf{A})$ $(\mathfrak{p})$ und $b \equiv 0\,(l)$, so ist selbstverständlich $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)^b = 1$. Ist aber $b \not\equiv 0\,(l)$, so kann $\mathfrak{p}$ in K nicht Primideal bleiben und auch nicht in der Relativdiskriminante von K aufgehen; es zerfällt also $\mathfrak{p}$ in l verschiedene Primfaktoren, daher $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = 1$.

2) Ist $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)^b = 1$, aber $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1$, so können wir $b = 0$ annehmen, d. h. ν ist relativ prim zu $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}$ bleibt in K Primideal. Es läßt sich dann ein System zu $\mathfrak{p}$ primer und nach $\mathfrak{p}$ inkongruenter Zahlen in der Form

$$\mu^i \varrho^l$$

darstellen, wo i die Werte $0, 1, 2, \cdots l-1$ annimmt und ϱ^l ein volles System inkongruenter zu $\mathfrak{p}$ primer l^{ter} Potenzreste nach $\mathfrak{p}$ in k durchläuft. Hieraus folgt die Richtigkeit unserer Behauptung.

Ist auch $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, so zerfällt $\mathfrak{p}$ in l verschiedene Primfaktoren in K, von denen einer $\mathfrak{P}$ sei. Wir lösen dann die Kongruenzen:

$$\left.\begin{array}{l} \mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2\mathsf{M} + \mathsf{A}_3\mathsf{M}^2 + \cdots + \mathsf{A}_l\mathsf{M}^{l-1} \equiv \nu \\ \mathsf{A}_1 + \zeta\mathsf{A}_2\mathsf{M} + \zeta^2\mathsf{A}_3\mathsf{M}^2 + \cdots + \zeta^{l-1}\mathsf{A}_l\mathsf{M}^{l-1} \equiv 1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mathsf{A}_1 + \zeta^{l-1}\mathsf{A}_2\mathsf{M} + \cdots\cdots\cdots + \zeta\mathsf{A}_l\mathsf{M}^{l-1} \equiv 1 \end{array}\right\} (\mathfrak{P}^e)$$

in K, in denen $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots \mathsf{A}_l$ ganze Zahlen aus K und e einen beliebigen positiven Exponenten bedeutet. Dieselben werden durch folgende Werte der Unbekannten A befriedigt:

$$\left.\begin{array}{ll} l\mathsf{A}_1 & \equiv \nu + l - 1 \\ l\mathsf{A}_2\mathsf{M} & \equiv \nu - 1 \\ l\mathsf{A}_3\mathsf{M}^2 & \equiv \nu - 1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ l\mathsf{A}_l\mathsf{M}^{l-1} & \equiv \nu - 1 \end{array}\right\} (\mathfrak{P}^e).$$

Da $l\mathsf{M}^i$ zu $\mathfrak{P}$ relativ prim ist, enthalten diese Bedingungen keinen Widerspruch. Aus der Gleichheit der Normen von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{p}$ folgt, daß jede ganze Zahl aus K einer ganzen Zahl aus k nach $\mathfrak{P}^e$ kongruent ist, also:

$$\mathsf{A}_1 \equiv \alpha_1, \ \mathsf{A}_2 \equiv \alpha_2, \cdots \mathsf{A}_l \equiv \alpha_l \quad (\mathfrak{P}^e).$$

Daraus ergibt sich dann:

$$\nu \equiv N_k(\alpha_1 + \alpha_2 \mathsf{M} + \cdots + \alpha_l \mathsf{M}^{l-1}) \quad (\mathfrak{P}^e) \text{ und nach } (\mathfrak{p}^e),$$

was zu beweisen war.

II) μ ist genau durch $\mathfrak{p}^a$ teilbar und $a \not\equiv 0 \ (l)$; in diesem Falle wird $\mathfrak{p}$ in K die l^{te} Potenz eines ambigen Primideals: $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^l$. Ist nun ν teilerfremd zu $\mathfrak{p}$, so ist

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right)^a.$$

Es ist daher in diesem Falle nachzuweisen:

1) Ist $\left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, so ist ν Normenrest von K nach $\mathfrak{p}$.

2) Ist ν Normenrest von K nach $\mathfrak{P}$, so ist $\left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right) = 1$.

1) Ist $\left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, also $\nu \equiv \alpha^l \ (\mathfrak{p})$, wo α eine ganze Zahl aus k bedeutet, so ist

$$\nu \equiv N_k(\alpha) \ (\mathfrak{p}),$$

daher ν Normenrest von K nach $\mathfrak{p}$.

2) Ist ν Normenrest von K von $\mathfrak{p}$, so ist

$$\nu \equiv N_k(\mathsf{A}') \ (\mathfrak{p}),$$

wo A' eine ganze Zahl aus K bedeutet. Aus der Gleichheit der Normen von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{P}$ folgt:

$$\mathsf{A}' \equiv \alpha' \ (\mathfrak{P})$$

wo α' eine ganze Zahl aus k bedeutet, also

$$\nu \equiv \alpha'^{\,l} \ (\mathfrak{p}), \quad \text{d. h.} \quad \left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right) = 1.$$

Den Fall, daß ν durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist, führt man leicht auf den vorigen zurück durch Betrachtung von $\nu\mu^c$, wo c einen so gewählten Exponenten bedeutet, daß der Exponent der Potenz von $\mathfrak{p}$, die in $\nu\mu^c$ genau aufgeht, durch l teilbar ist.

Wir haben hiermit den Beweis unseres Satzes vollständig erbracht und schließen jetzt noch folgenden Satz an, der sich aus dem vorigen leicht ergibt:

Satz 9. *Ist $\mathfrak{p}$ ein zu l primes Primideal in k, das nicht in der Relativdiskriminante von $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ aufgeht, so ist jede zu $\mathfrak{p}$ prime Zahl in k Normenrest des Körpers K nach $\mathfrak{p}$.*

Geht dagegen $\mathfrak{p}$ in der Relativdiskriminante von K auf und ist e ein beliebiger positiver Exponent, so sind von allen nach $\mathfrak{p}^e$ einander inkongruenten, zu $\mathfrak{p}$ primen Zahlen genau der l^{te} Teil Normenreste des Körpers K nach $\mathfrak{p}$.

§ 4.

Die ambigen Komplexe und die Geschlechter im Körper K.

Die bisherigen Entwickelungen gelten auch, wenn die Klassenzahl h von k durch l teilbar ist; von jetzt ab müssen wir indessen voraussetzen, daß dies nicht der Fall ist. Wir geben zunächst wieder einige Definitionen und Sätze:

Satz 10. *In dem Körper $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ existiert stets ein System relativer Grundeinheiten in bezug auf k: $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \cdots \mathsf{H}_{m'}$, wo $m' = \frac{m(l-1)}{2}$, mit folgenden Eigenschaften:*

1) *der Ausdruck $\mathsf{H}_1^{F_1(S)} \cdots \mathsf{H}_{m'}^{F_{m'}(S)}[\varepsilon]$, wo $F_1(S) \cdots F_{m'}(S)$ ganze ganzzahlige Funktionen von S vom Grade $l-2$ bedeuten und $[\varepsilon]$ eine Einheit aus k oder die in K liegende l^{te} Wurzel aus einer solchen bezeichnet, kann niemals die symbolische $(1-S)^{te}$ Potenz einer Einheit aus K werden, außer wenn sämtliche Werte $F_1(\zeta) \cdots F_{m'}(\zeta)$ durch $1-\zeta$ teilbar sind.*

2) *Für jede Einheit E aus K gilt eine Gleichung von der Gestalt:*

$$E^f = \mathsf{H}_1^{F_1(S)} \cdots \mathsf{H}_{m'}^{F_{m'}(S)}[\varepsilon]$$

wo f einen ganzen, nicht durch l teilbaren Exponenten bedeutet.

3) *Ist*

$$\eta_1 = N_k(\mathsf{H}_1), \cdots \eta_{m'} = N_k(\mathsf{H}_{m'}),$$

so läßt sich jede Einheit ε in k, welche Relativnorm einer Einheit aus K ist, in der Gestalt darstellen:

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \cdots \eta_{m'}^{u_{m'}}[\varepsilon]^l,$$

wo $u_1, \cdots u_{m'}$ ganzzahlige Exponenten sind).*

Def. 6. *Eine Gesamtheit von Einheiten $\varepsilon\xi^l$ aus k, wo ε eine feste Einheit und ξ eine beliebige Einheit aus k bedeutet, heißt ein Einheitenverband.*

Def. 7. *Bedeutet C eine feste Idealklasse aus K und c_i eine beliebige Idealklasse aus k, so bildet die Gesamtheit der Klassen Cc_i einen Klassenkomplex. Der aus den Klassen c_i bestehende Komplex heißt Hauptkomplex. Eine Anzahl Komplexe heißt unabhängig, wenn keiner der Hauptkomplex ist und keiner durch Multiplikation aus den übrigen erzeugt werden kann.*

---

*) D. Hilbert. Algebr. Zahlk. § 55, pg. 272 und § 146, pg. 446.

Def. 8. *Eine Idealklasse aus K heißt ambig, wenn sie mit ihren relativkonjugierten Idealklassen identisch ist. Ein Komplex heißt ambig, wenn er mit seinen relativ konjugierten Komplexen identisch ist. Enthält ein ambiger Komplex eine ambige Klasse, so sagen wir, er entspringt aus dieser Klasse, enthält die ambige Klasse ein ambiges Ideal, so soll es aus dem ambigen Ideal entsprungen heißen*).*

Satz 11. *Ist die Klassenanzahl von k nicht durch l teilbar, so enthält jeder ambige Komplex ambige Klassen**).*

Wir können nunmehr folgenden wichtigen Doppelsatz aussprechen und beweisen:

Satz 12. *Die Anzahl aller ambigen Ideale des Körpers K sei l^t. Machen dann die sämtlichen Einheiten in k, die Relativnormen von Einheiten in K sind, l^{v^*} Einheitenverbände aus, so gilt, wenn wir die Anzahl aller aus ambigen Idealen entspringenden Komplexe in K mit l^{a^*} bezeichnen, die Ungleichung:*

$$a^* \leqq t + v^* - m' - 1 \qquad \left(m' = \frac{m(l-1)}{2}\right).$$

Machen ferner die sämtlichen Einheiten in k, die Relativnormen von ganzen oder gebrochenen Zahlen aus K sind, l^v Einheitenverbände aus, so gilt, wenn wir die Anzahl aller ambigen Komplexe in K mit l^a bezeichnen:

$$a \leqq t + v - m' - 1.$$

Zum Beweise des ersten Teiles des vorstehenden Satzes beachte man, daß sich von den in Satz 10 eingeführten Einheiten η $m' - v^*$ durch die übrigen ausdrücken lassen:

$$\eta_i = \eta_1^{u_1^{(i)}} \cdots \eta_{v^*}^{u_{v^*}^{(i)}} (\xi^{(i)})^l \qquad (i = v^* + 1, \cdots, m')$$

wo die Exponenten bestimmte Werte $0, 1, \cdots l-1$ haben und $\xi^{(i)}$ eine Einheit aus k ist, wenn wir zunächst voraussetzen, daß μ nicht das Produkt aus einer l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl aus k mit einer Einheit aus K ist. Es folgt dann, daß die $m' - v^*$ Ausdrücke

$$\mathsf{H}_i' = \mathsf{H}_i \mathsf{H}_1^{-u_1^{(i)}} \cdots \mathsf{H}_{v^*}^{-u_{v^*}^{(i)}} (\xi^{(i)})^{-1}$$

Einheiten aus K mit der Relativnorm 1 sind und daß man deshalb:

$$\mathsf{H}_i' = \mathsf{M}_i^{(1-S)}$$

setzen kann, wo die M_i ganze Zahlen aus K bedeuten***). Diese, zu denen noch M hinzutritt, liefern dann offenbar $m' - v^* + 1$ Relationen zwischen den ambigen Primidealen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \cdots \mathfrak{D}_t$ in K von folgender Art:

*) D. Hilbert. Rel. quadr. Zahlk. § 11 und § 12, pg. 21—23.

**) D. Hilbert. Rel. quadr. Zahlk. Satz 21, pg. 31.

***) D. Hilbert Algebr. Zahlk. Satz 90, pg. 272.

$$\mathsf{M} = \mathfrak{D}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{D}_t^{a_t} j,$$

$$\mathsf{M}_i = \mathfrak{D}_1^{a_1^{(i)}} \cdots \mathfrak{D}_t^{a_t^{(i)}} j^{(i)},$$

wo j, $j^{(i)}$ Ideale aus k bedeuten. Die letzten Relationen sind, wie leicht zu zeigen, in der Weise von einander unabhängig, daß sich vermittelst derselben die t aus den Idealen $\mathfrak{D}_1, \cdots \mathfrak{D}_t$ entspringenden ambigen Komplexe durch $t + v^* - m' - 1$ unter ihnen ausdrücken lassen. Daraus folgt:

$$a^* \leqq t + v^* - m' - 1.$$

Der ausgeschlossene Fall, daß der Körper K durch $\sqrt[l]{\varepsilon}$ definiert wird, wo ε eine Einheit aus k bedeutet, ist ebenfalls leicht zu erledigen, wenn man beachtet, daß ε Relativnorm einer Einheit aus K ist und unter den Einheiten $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{m'}$ nicht vorkommt.

Im zweiten Teile des Satzes treten zu den Einheiten $\eta_1, \cdots \eta_{v^*}$ noch $v - v^*$ Einheiten $\vartheta_1, \cdots \vartheta_{v-v^*}$ hinzu, die Relativnormen von gebrochenen Zahlen aus K sind:

$$\vartheta_1 = N_k(\Theta_1) \cdots \vartheta_{v-v^*} = N_k(\Theta_{v-v^*}).$$

Da man dann, wie unschwer nachzuweisen ist:

$$\Theta_i = \mathfrak{A}_i^{(1-S)}$$

setzen kann, so ist $\mathfrak{A}_i$ ein Ideal aus K, das offenbar eine ambige Klasse und folglich auch einen ambigen Komplex A_i definiert. Nimmt man diese $v - v^*$ ambigen Komplexe A_i zu den im ersten Teile des Satzes eingeführten hinzu, so kann man beweisen, daß sich jeder ambige Komplex in K durch sie muß ausdrücken lassen, wenn man bedenkt, daß ein ambiger Komplex nur ambige Klassen enthält; es ist daher:

$$a \leqq t + v - m' - 1.$$

Wir wollen nun, um zu dem Begriff des Geschlechts zu kommen, erläutern, was man unter dem Charakterensystem eines Ideals $\mathfrak{J}$ aus K versteht. Wir setzen zu diesem Zweck voraus, daß die in der Relativdiskriminante von K aufgehenden Primideale $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \cdots \mathfrak{d}_t$ aus k sämtlich zu $\mathfrak{l}$ prim sind, und wählen unter ihnen $r^* = t - r$ so aus, daß, wenn $\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_{r^*}$ gewisse Einheiten aus k bedeuten:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\varepsilon_1, \mu}{\mathfrak{d}_t}\right) \neq 1, \\ \left(\dfrac{\varepsilon_2, \mu}{\mathfrak{d}_t}\right) = 1, \quad \left(\dfrac{\varepsilon_2, \mu}{\mathfrak{d}_{t-1}}\right) \neq 1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \left(\dfrac{\varepsilon_{r^*}, \mu}{\mathfrak{d}_t}\right) = 1, \quad \left(\dfrac{\varepsilon_{r^*}, \mu}{\mathfrak{d}_{t-1}}\right) = 1, \cdots \left(\dfrac{\varepsilon_{r^*}, \mu}{\mathfrak{d}_{t-r^*+1}}\right) \neq 1 \end{cases}$$

und daß jede Einheit ξ aus k, die Normenrest von K nach $\mathfrak{d}_t, \cdots \mathfrak{d}_{t-r^*+1}$ ist, auch Normenrest nach $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \cdots \mathfrak{d}_r$ ist*).

Wir bilden dann die Relativnorm j von $\mathfrak{J}$ und setzen $j^{hh'} = (\nu)$, indem wir mit h die Klassenzahl von k bezeichnen und h' als positive ganze Zahl so bestimmen, daß $hh' \equiv 1\,(l)$ ist. Dabei wählen wir die ganze Zahl ν aus k so, daß:

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{d}_t}\right) = 1, \cdots \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{d}_{t-r^*+1}}\right) = 1.$$

Das System von l^{ten} Einheitswurzeln:

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{d}_1}\right), \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{d}_2}\right), \cdots \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{d}_r}\right)$$

nennen wir dann das Charakterensystem des Ideals $\mathfrak{J}$.

Da alle Ideale einer Klasse dasselbe Charakterensystem besitzen, können wir alle Idealklassen, deren Ideale das gleiche Charakterensystem besitzen, zu einem Geschlecht zusammenfassen. Das Geschlecht, dessen sämtliche Charaktere 1 sind und zu dem offenbar die Hauptklasse gehört, heißt das Hauptgeschlecht. Es ist leicht ersichtlich, was unter dem Produkt zweier Geschlechter und unter dem Geschlecht eines Komplexes zu verstehen ist.

Es ist jetzt unsere nächste Aufgabe, eine obere Grenze für die Anzahl der Geschlechter abzuleiten. Wir beweisen zu diesem Zweck zunächst folgenden Hülfssatz:

Satz 13. *Wenn t, v, r, m' die frühere Bedeutung haben, so gilt die Ungleichung:*

$$t + v - m' \leqq r.$$

Der Beweis ergibt sich leicht, wenn man bedenkt, daß die Einheiten:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_{r^*}, \eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{v^*}, \vartheta_1, \vartheta_2, \cdots \vartheta_{v-v^*}$$

von einander unabhängig sind.

Die gesuchte obere Grenze für die Anzahl der Geschlechter ergibt sich aus folgendem Satze:

Satz 14. *Ist r die Anzahl der Charaktere, die ein Geschlecht in K bestimmen, so ist die Anzahl der Geschlechter höchstens l^{r-1}.*

Der Beweis ergibt sich aus der Tatsache, daß die Anzahl der Geschlechter höchstens gleich der Anzahl der ambigen Komplexe in K ist. Bezeichnet man nämlich die Anzahl der letzteren mit A, die Anzahl der Komplexe des Hauptgeschlechts mit f, die Anzahl derjenigen unter ihnen, die symbolische $(1-S)^{\text{te}}$ Potenzen von Komplexen sind, mit f' und die

*) Vergl. D. Hilbert, Rel. quadr. Zahlk. pg. 42—44.

Anzahl der Geschlechter mit g, so erkennt man leicht die Richtigkeit der Gleichungen:

$$M = g \cdot f, \qquad M = A \cdot f',$$

wo M die Anzahl aller Komplexe in K bedeutet. Da $f' \leqq f$, muß $g \leqq A$ sein.

Mit Hülfe von Satz 13 ergibt sich dann, daß höchstens l^{r-1} Geschlechter in K existieren.

§ 5.

Einige Sätze über spezielle unendliche Reihen.

Ehe wir unsere Entwickelungen fortsetzen, müssen wir einige Sätze über gewisse unendliche Reihen einschalten, die nach Normen von Idealen fortschreiten*).

Satz 15. *Es gilt die Gleichung:*

$$\sum_{(\mathfrak{p})} \frac{1}{n(\mathfrak{p})^s} = \log \frac{1}{s-1} + f(s) \qquad s > 1,$$

wo $\sum\limits_{(\mathfrak{p})}$ *über alle Primideale aus* k *zu erstrecken ist und* $f(s)$ *eine Funktion der reellen Veränderlichen* s *bedeutet, die stets zwischen endlichen Grenzen bleibt, wenn* s *sich dem Grenzwert 1 nähert.*

Satz 16. *Bedeutet* α *irgend eine ganze Zahl aus* k *und setzt man*

$$F(s) = \sum_{(\mathfrak{p})} \sum_{(m)} \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)^m \frac{1}{n(\mathfrak{p})^s} \qquad s > 1,$$

wo $\sum\limits_{(\mathfrak{p})} \sum\limits_{(m)}$ *über alle zu* α *primen Primideale aus* k *und über alle Werte* $m = 1, 2, \cdots l-1$ *zu erstrecken ist, so nähert sich die Funktion* $F(s)$ *der reellen Veränderlichen* s *einer endlichen Grenze, wenn* s *nach 1 abnimmt.*

Satz 17. *Es seien* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_t$ *irgend* t *ganze Zahlen des Körpers* k, *welche die Bedingung erfüllen, daß das Produkt*

$$\alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \cdots \alpha_t^{m_t},$$

wenn man jedem Exponenten $m_1, \cdots m_t$ *die Werte* $0, 1, \cdots l-1$ *durchlaufen läßt, jedoch das Wertsystem* $m_1 = m_2 = \cdots = m_t = 0$ *ausschließt, niemals die* l^{te} *Potenz einer Zahl in* k *wird; es seien ferner* $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_t$ *nach Belieben vorgeschriebene* l^{te} *Einheitswurzeln: dann gibt es im Körper* k *stets unendlich viele Primideale* $\mathfrak{p}$, *für die jedesmal bei einem gewissen zu* l *primen Exponenten* m

*) Vergl. D. Hilbert. Algebr. Zahlk. Capitel XXX, pg. 424.

$$\left(\frac{\alpha_1}{\mathfrak{p}}\right)^m = \zeta_1, \left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{p}}\right)^m = \zeta_2, \cdots \left(\frac{\alpha_t}{\mathfrak{p}}\right)^m = \zeta_t$$

wird.

Läßt man dann in $\sum\limits_{(\mathfrak{p})} \frac{1}{n(\mathfrak{p})^s}$ $\mathfrak{p}$ *alle Primideale durchlaufen, die den angegebenen Bedingungen genügen, so wird:*

$$\sum_{(\mathfrak{p})} \frac{1}{n(\mathfrak{p})^s} = \frac{1}{l^t} \cdot \log \frac{1}{s-1} + f_1(s) \qquad s > 1,$$

wenn alle Einheitswurzeln ζ_i *gleich 1 sind und*

$$\sum_{(\mathfrak{p})} \frac{1}{n(\mathfrak{p})^s} = \frac{l-1}{l^t} \log \frac{1}{s-1} + f_2(s) \qquad s > 1,$$

wenn wenigstens eine der Einheitswurzeln ζ_i *von 1 verschieden ist. Die Funktionen* $f_1(s)$ *und* $f_2(s)$ *sind solche Funktionen der reellen Veränderlichen s, die bei Annäherung von s an 1 zwischen endlichen Grenzen bleiben.*

Um den folgenden Satz aussprechen zu können, müssen wir zunächst den Begriff des primären Ideals kennen lernen.

Def. 9. *Ein Ideal* $\mathfrak{a}$ *aus* k *heißt primär, wenn für eine beliebige Einheit* ε *in* k $\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{a}}\right) = 1$ *ist.*

Ist $\mathfrak{a}$ *ein primäres Ideal und* $\mathfrak{b}$ *ein beliebiges Ideal aus* k, *so setzen wir*

$$\left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{\beta}{\mathfrak{a}}\right),$$

wenn $(\beta) = \mathfrak{b}^{hh'}$ *ist.*

Für ein primäres Ideal $\mathfrak{a}$ gilt der folgende Satz:

Satz 18: *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein bestimmtes primäres Ideal in* k, *so stellt die über sämtliche zu* $\mathfrak{a}$ *primen Primideale* $\mathfrak{w}$ *des Körpers* k *und über* $m = 1, 2, \cdots l-1$ *zu erstreckende unendliche Summe:*

$$\sum_{(\mathfrak{w})} \sum_{(m)} \left(\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{a}}\right)^m \cdot \left(\frac{1}{n(\mathfrak{w})^s}\right)$$

eine solche Funktion der reellen Veränderlichen s dar, die stets unterhalb einer positiven endlichen Grenze bleibt, wenn die reelle Veränderliche s sich der Grenze 1 nähert.

Zum Beweise des vorstehenden Satzes, der eine der fundamentalen Grundlagen für unsere Untersuchungen bildet, bedient man sich einer von D. Hilbert angegebenen Verallgemeinerung eines von H. Minkowski und H. Weber bewiesenen Satzes der Integralrechnung, der die Anzahl aller durch ein bestimmtes Ideal teilbaren Hauptideale $\mathfrak{h}$ in k, die nach $\mathfrak{a}$ einen vorgeschriebenen l^{ten} Potenzcharakter haben und deren Normen unterhalb einer gegebenen Grenze liegen, in geeigneter Weise zu schätzen gestattet*).

*) D. Hilbert, Rel. quadr. Zahlk. § 22, pg. 53—60.

§ 6.

Das primäre Primideal.

Wir führen zunächst noch zwei Sätze an, deren Richtigkeit man leicht aus den im § 4 gegebenen Entwickelungen erkennt:

Satz 19. *Die Relativdiskriminante des Körpers* $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ *ist von 1 verschieden.*

Satz 20. *Ist die Einheit* ε *in* k *der* l^{ten} *Potenz einer ganzen Zahl in* k *nach* $\mathfrak{l}^l$ *kongruent, so ist* ε *die* l^{te} *Potenz einer Einheit in* k.

Die vorstehenden Sätze verlieren ihre Gültigkeit, wenn die Klassenzahl des Körpers k durch l teilbar ist.

Es sei nun $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_{m'-1}$ ein volles System von Grundeinheiten für den Körper k, wobei $m' = \frac{m(l-1)}{2}$. Ferner sei $\varepsilon_{m'}$ eine in k liegende Einheitswurzel, deren l^{te} Wurzel nicht in k liegt. Dann läßt sich offenbar jede Einheit ε in k eindeutig in der Form:

$$\varepsilon = \varepsilon_1^{e_1} \cdots \varepsilon_{m'}^{e_{m'}} \cdot \xi^l$$

darstellen, wo die Exponenten $e_1, \cdots e_{m'}$ bestimmte Werte $0, 1, \cdots l-1$ haben. Wir betrachten nun, um die Eigenschaften der primären Ideale zu erkennen, ein gewisses System von m' nichtprimären Primidealen, deren charakteristische Eigenschaften durch den folgenden Satz wiedergegeben werden:

Satz 21. *Ist* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_{m'}$ *das definierte System von Einheiten in* k *und sind* $\mathfrak{q}_1, \cdots \mathfrak{q}_{m'}$ *zu* $\mathfrak{l}$ *prime Primideale in* k, *welche die Bedingungen befriedigen:*

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_i}\right) \neq 1, \quad \left(\frac{\varepsilon_k}{\mathfrak{q}_i}\right) = 1, \quad (i \neq k) \quad (i, k = 1, 2, \cdots m');$$

setzt man ferner:

$$\mathfrak{q}_1^{hh'} = (\varkappa_1), \cdots \mathfrak{q}_{m'}^{hh'} = (\varkappa_{m'}),$$

wo $\varkappa_1, \cdots \varkappa_{m'}$ *ganze Zahlen in* k *bedeuten, so gilt für jede zu* $\mathfrak{l}$ *prime Zahl* ω *in* k *eine Kongruenz:*

$$\omega \equiv \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_{m'}^{u_{m'}} \cdot \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_{m'}^{v_{m'}} \alpha^l \; (\mathfrak{l}^l),$$

worin die Exponenten $u_1, \cdots u_{m'}, v_1, \cdots v_{m'}$ *gewisse Werte* $0, 1, \cdots l-1$ *haben und* α *eine ganze Zahl aus* k *ist.*

Beweis. Die Existenz der Ideale $\mathfrak{q}_i$ folgt aus Satz 17. Um die Richtigkeit unserer Behauptung zu erkennen, weisen wir zunächst nach, daß eine Zahl

$$\mu = \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_{m'}^{u_{m'}} \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_{m'}^{v_{m'}}$$

nie der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl aus k nach $\mathfrak{l}^l$ kongruent sein kann, außer wenn sie selbst eine l^{te} Potenz ist. Es folgt diese Tatsache leicht durch Betrachtung des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ mit Benutzung von Satz 12. Mit Hülfe des angegebenen Resultats erkennt man, daß das System von Zahlen:

$$\varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_{m'}^{u_{m'}} \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_{m'}^{v_{m'}} \alpha_i^l \qquad (u_1, u_2, \cdots, u_{m'}, v_1, \cdots v_{m'} = 0, 1, \cdots l-1)$$

in dem α_i ein volles System von $\varphi(\mathfrak{l})$ zu $\mathfrak{l}$ primen und nach $\mathfrak{l}$ inkongruenten Zahlen durchläuft, im ganzen $l^{2m'}\varphi(\mathfrak{l})$ nach $\mathfrak{l}^l$ inkongruente Zahlen darstellt. Da andrerseits die Anzahl aller zu $\mathfrak{l}$ primen nach $\mathfrak{l}^l$ inkongruenten Zahlen $l^{2m'}\varphi(\mathfrak{l})$ beträgt, so ist damit unser Satz bewiesen.

Stellt man jetzt noch folgende Definition auf:

Def. 10. *Eine Zahl α aus k heißt primär, wenn sie der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl aus k nach $\mathfrak{l}^l$ kongruent ist.* —

so kann man die fundamentale Eigenschaft der primären Primideale in folgendem Doppelsatz ausdrücken:

Satz 22. 1) *Ist $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal in k, so kann man stets eine primäre Zahl π in k finden, so daß $(\pi) = \mathfrak{p}^{hh'}$.*

2) *Ist π eine primäre Zahl in k und $(\pi) = \mathfrak{p}^{hh'}$, wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus k bedeutet, so ist $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal.*

Beweis: Es mögen $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \cdots \mathfrak{q}_{m'}, \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_{m'}$ die angegebene Bedeutung haben und $\mathfrak{p}^{hh'} = (\pi^*)$ sein. Es gilt dann eine Kongruenz:

$$\pi^* \equiv \varepsilon \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_{m'}^{v_{m'}} \gamma^l \quad (\mathfrak{l}^l),$$

wo ε eine Einheit aus k bedeutet. Ist hier nun $v_1 = v_2 = \cdots = v_{m'} = 0$, so ist $\pi^* \varepsilon^{-1}$ eine primäre Zahl und der erste Teil unseres Satzes bewiesen. Sind aber nicht alle Exponenten gleich Null, so betrachte man den Körper $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$, wo

$$\mu = \pi^* \left(\varepsilon \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_{m'}^{v_{m'}}\right)^{l-1}.$$

Da dieser nur ein Geschlecht, das Hauptgeschlecht, besitzen kann, so folgt, daß für jedes Primideal $\mathfrak{r}$ aus k, für das $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{r}}\right) = 1$ ist, auch $\left(\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ sein muß.

Wir wählen nun ein zweites System von m' nichtprimären Primidealen in k $\mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \cdots \mathfrak{q}_{m'}'$, das vom ersten verschieden ist, aber dieselben Potenzcharaktere in bezug auf die Einheiten ε_i besitzt, und gelangen dann entweder zu der gesuchten primären Zahl oder schließen genau wie vorher, daß für ein Primideal $\mathfrak{r}$, für das $\left(\frac{\mu'}{\mathfrak{r}}\right) = 1$ ist, auch $\left(\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ sein muß, wobei

$$\mu' = \pi^* \left(\varepsilon' \varkappa_1'^{v_1'} \varkappa_2'^{v_2'} \cdots \varkappa_{m'}'^{v_{m'}'}\right)^{l-1}.$$

Bezeichnet man jetzt alle Primideale, für die

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{r}_\mu}\right)=1, \quad \text{mit } \mathfrak{r}_\mu,$$

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{r}_{\mu\mu'}}\right)\neq 1, \quad \left(\frac{\mu'}{\mathfrak{r}_{\mu\mu'}}\right)=1, \quad \text{mit } \mathfrak{r}_{\mu\mu'},$$

$$\left(\frac{\mathfrak{r}^{(+)}}{\mathfrak{p}}\right)=1, \quad \text{mit } \mathfrak{r}^{(+)},$$

$$\left(\frac{\mathfrak{r}^{(-)}}{\mathfrak{p}}\right)\neq 1, \quad \text{mit } \mathfrak{r}^{(-)},$$

so ergeben sich aus Satz 17 die Gleichungen:

$$\sum_{(\mathfrak{r}_\mu)} \frac{1}{n(\mathfrak{r}_\mu)^s} = \frac{1}{l}\log\frac{1}{s-1} + f_\mu(s) \qquad (s>1),$$

$$\sum_{(\mathfrak{r}_{\mu\mu'})} \frac{1}{n(\mathfrak{r}_{\mu\mu'})^s} = \frac{l-1}{l^2}\cdot\log\frac{1}{s-1} + f_{\mu\mu'}(s) \quad (s>1),$$

wo $f_\mu(s)$, $f_{\mu\mu'}(s)$ Funktionen von s bedeuten, die stets zwischen endlichen Grenzen bleiben, wenn die reelle Veränderliche s sich der Grenze 1 nähert.

Da sämtliche Primideale $\mathfrak{r}_\mu$ von den Primidealen $\mathfrak{r}_{\mu\mu'}$ verschieden sind und beide zur Sorte $\mathfrak{r}^{(+)}$ gehören, so folgt:

$$\sum_{(\mathfrak{r}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{r}^{(+)})^s} \geqq \frac{2l-1}{l^2}\log\frac{1}{s-1} + f_\mu(s) + f_{\mu\mu'}(s) \quad (s>1).$$

Andrerseits ist nach Satz 15:

$$\sum_{(\mathfrak{r}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{r}^{(+)})^s} + \sum_{(\mathfrak{r}^{(-)})} \frac{1}{n(\mathfrak{r}^{(-)})^s} = \log\frac{1}{s-1} + f(s) \qquad (s>1),$$

wo $f(s)$ eine Funktion von der gleichen Eigenschaft wie $f_\mu(s)$ und $f_{\mu\mu'}(s)$ ist. Dann ergibt sich aber im Widerspruch mit Satz 18:

$$\sum_{(\mathfrak{r})}\sum_{(m)}\left(\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{p}}\right)^m\cdot\frac{1}{n(\mathfrak{r})^s} = (l-1)\sum_{(\mathfrak{r}^{(+)})}\frac{1}{n(\mathfrak{r}^{(+)})^s} - \sum_{(\mathfrak{r}^{(-)})}\cdot\frac{1}{n(\mathfrak{r}^{(-)})^s} \geqq \frac{l-1}{l}\log\frac{1}{s-1}$$
$$+\, l(f_\mu(s)+f_{\mu\mu'}(s)) - f(s) \quad (s>1), \quad (m=1,2,\cdots l-1),$$

womit die Richtigkeit des ersten Teiles unseres Satzes bewiesen ist. Der zweite Teil ergibt sich leicht durch Betrachtung des Körpers

$$K(\sqrt[l]{\pi}, k).$$

§ 7.

Das Reziprozitätsgesetz zwischen einem primären und einem beliebigen Primideal in beschränkter Fassung.

Satz 23. *Ist $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal in k mit der Primärzahl $(\pi) = \mathfrak{p}^{hh'}$ und $\mathfrak{r}$ ein beliebiges Primideal in k und $(\varrho) = \mathfrak{r}^{hh'}$, so ist*

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right) = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)^n,$$

wo

$$n \not\equiv 0(l).$$

Beweis. Es ist nachzuweisen, daß

1) wenn $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right) = 1$, auch $\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ ist,

2) wenn $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right) \neq 1$, auch $\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1$ ist.

Der erste Teil ergibt sich sofort aus der Betrachtung des Körpers $K(\sqrt[l]{\pi}, k)$, der nur ein Geschlecht besitzt. Zum Beweise des zweiten Teiles bestimme man ein primäres Primideal $\mathfrak{p}_1$, so daß $\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right) \neq 1$, $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right) \neq 1$. Dann folgt aus dem ersten Teile dieses Satzes, daß auch $\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{r}}\right) \neq 1$ ist und daß man einen Exponenten e so bestimmen kann, daß

$$\left(\frac{\pi\pi_1^{\,e}}{\mathfrak{r}}\right) = 1, \tag{1}$$

wo π_1 primär und $(\pi_1) = \mathfrak{p}_1^{hh'}$ ist.

Für den Körper $K(\sqrt[l]{\pi\pi_1^{\,e}}, k)$ ist dann $r = 2$, die Anzahl der Geschlechter ist also höchstens l und auch wirklich l, wie man aus den Charakteren von $\mathfrak{P}$, eines Primfaktors von $\mathfrak{p}$ in K, erkennt:

$$\left(\frac{\pi,\ \pi\pi_1^{\,e}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}}\right)^{-e}, \qquad \left(\frac{\pi,\ \pi\pi_1^{\,e}}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right)^{e},$$

die beide von 1 verschieden sind. Setzt man nun

$$\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right)^{-n_1} = 1, \tag{2}$$

wo n_1 eine zu l prime ganze rationale Zahl ist, so gilt offenbar für jedes Geschlecht in K

$$c_1 c_2^{+n_1} = 1,$$

wenn man mit c_1 und c_2 die Charaktere in Bezug auf $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ bezeichnet. Die Anwendung dieser Tatsache auf einen Primfaktor von $\mathfrak{r}$ liefert:

$$\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) \cdot \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right)^{+en_1} = 1. \tag{3}$$

Setzt man daher

$$(4) \qquad \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right)\cdot\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{r}}\right)^{-n_2} = 1,$$

so folgt aus (1), (2), (3), (4)

$$n n_1 n_2 \equiv 1 \ (l).$$

Daraus ergibt sich $n \not\equiv 0 \ (l)$, was zu beweisen war.

Um uns später darauf zu beziehen, formulieren wir zum Schluß noch folgenden Satz, dessen Beweis im vorhergehenden enthalten ist:

Satz 24. *Es seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ drei Primideale in k, von denen wenigstens zwei primär sind, ferner sei*

$$\mathfrak{p}_1^{hh'} = (\pi_1), \quad \mathfrak{p}_2^{hh'} = (\pi_2), \quad \mathfrak{p}_3^{hh'} = (\pi_3),$$

wobei die Zahlen π für die primären Ideale auch primär gewählt sein sollen. Setzt man dann:

$$\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}_2}\right) = \left(\frac{\pi_2}{\mathfrak{p}_1}\right)^{n_{12}}, \quad \left(\frac{\pi_2}{\mathfrak{p}_3}\right) = \left(\frac{\pi_3}{\mathfrak{p}_2}\right)^{n_{23}}, \quad \left(\frac{\pi_3}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}_3}\right)^{n_{31}},$$

so können die Exponenten n stets so gewählt werden, daß:

$$n_{12} \cdot n_{23} \cdot n_{31} \equiv 1 \ (l).$$

II.

§ 8.

Das Reziprozitätsgesetz zwischen einem beliebigen und einem primären Primideal im Kreiskörper der l^{ten} Einheitswurzeln.

Wir haben im letzten Paragraphen den Beweis für das Reziprozitätsgesetz zwischen einem beliebigen und einem primären Primideal in der beschränkten Fassung:

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right) = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)^n, \quad n \not\equiv 0 \ (l),$$

in der noch ein unbestimmter Exponent n auftritt, erbracht. Wir wollen jetzt für gewisse Körperkategorien den Nachweis erbringen, daß $n = 1$ sein muß. Dieser Nachweis wird uns durch die Herstellung von Beziehungen zwischen den Potenzrestsymbolen in k und $k(\zeta)$ gelingen. Wir werden nämlich zunächst den Beweis für die Richtigkeit unserer Behauptung in $k(\zeta)$ erbringen, indem wir uns auf das sogenannte Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz stützen, und dann auf gewisse andere Körperkategorien übergehen.

Satz 25. *Ist $\mathfrak{p}$ ein primäres und $\mathfrak{r}$ ein beliebiges Primideal aus $k(\zeta)$ und setzt man, wenn h die nicht durch l teilbare Klassenzahl von $k(\zeta)$ bedeutet und $hh' \equiv 1$ (l) ist:*

$$\mathfrak{p}^{hh'} = (\pi), \quad \mathfrak{r}^{hh'} = (\varrho),$$

wo π eine primäre Zahl aus $k(\zeta)$ sein soll, so gilt

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right) = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right).$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß $\mathfrak{p}$ und π keine relativkonjugierten Primideale aus $k(\zeta)$ sind und beweisen die Existenz eines primären Primideals $\mathfrak{p}_1$ aus $k(\zeta)$ mit den Eigenschaften:

$$(1) \qquad \left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1, \quad \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{r}}\right) \neq 1,$$

wobei π_1 eine Primärzahl von $\mathfrak{p}_1$ bedeutet.

Es seien p und r die durch $\mathfrak{p}$ resp. $\mathfrak{r}$ teilbaren rationalen Primzahlen und

$$(p^{hh'}) = (\pi)(\pi')\cdots(\pi^{(e_1)}), \quad r^{hh'} = (\varrho)(\varrho')\cdots(\varrho^{(e_2)}),$$

wo $\pi', \cdots \pi^{(e_1)}$, $\varrho', \cdots \varrho^{(e_2)}$ zu einander prime ganze Zahlen aus $k(\zeta)$ und zwar Potenzen von Primidealen bedeuten.

Wir wählen dann, was nach Satz 17 stets möglich ist, das primäre Primideal $\mathfrak{p}_1$ in $k(\zeta)$ so, daß

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right) \neq 1, \ \left(\frac{\pi'}{\mathfrak{p}_1}\right) = 1, \cdots \left(\frac{\pi^{(e_1)}}{\mathfrak{p}_1}\right) = 1,$$

$$\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right) \neq 1, \ \left(\frac{\varrho'}{\mathfrak{p}_1}\right) = 1, \cdots \left(\frac{\varrho^{(e_2)}}{\mathfrak{p}_1}\right) = 1.$$

Gilt nun:

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}}\right)^{n_1} \neq 1, \quad \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{r}}\right)^{n_2} \neq 1,$$

so ist offenbar auch:

$$\left(\frac{p}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{\pi_1}{p}\right)^{n_1} \neq 1, \quad \left(\frac{r}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{r}}\right)^{n_2} \neq 1.$$

Können wir daher nachweisen, daß π_1 einer rationalen ganzen Zahl nach $\mathfrak{l}^2$ kongruent ist, so folgt aus dem Eisensteinschen Reziprozitätsgesetz

$$n_1 = n_2 = 1,$$

und das gesuchte Primideal ist gefunden. Nun gilt, da π_1 eine primäre Zahl sein soll

$$\pi_1 \equiv \alpha^l (\mathfrak{l}^l)$$

wo α eine ganze Zahl aus $k(\zeta)$ bedeutet. Setzt man daher

$$\alpha \equiv a(\mathfrak{l}),$$

wo a eine rationale ganze Zahl bezeichnet, so wird

$$\alpha^l \equiv a^l\,(\mathfrak{l}^l),$$

also auch

$$\pi_1 \equiv a^l\,(\mathfrak{l}^l).$$

π_1 hat also die verlangte Eigenschaft und somit erfüllt $\mathfrak{p}_1$ die Bedingungen (1).

Die Richtigkeit der zu beweisenden Gleichung ergibt sich jetzt ohne weiteres aus Satz 24.

Sind $\mathfrak{p}$ und π relativ konjugiert, so ergibt sich mit Hülfe des eben Bewiesenen leicht die Existenz eines geeigneten Hülfsprimideals.

§ 9.

Beziehungen zwischen den Potenzrestsymbolen verschiedener algebraischer Zahlkörper.

Um noch für weitere Körperkategorien das Reziprozitätsgesetz zwischen einem beliebigen und einem primären Primideal zu beweisen, benutzen wir die Beziehungen, die zwischen den Potenzrestsymbolen verschiedener algebraischer Zahlkörper bestehen. Der vorliegende Paragraph ist der Aufsuchung dieser Beziehungen gewidmet. Wir führen zu diesem Zweck noch folgende Bezeichnungen ein. Um die Potenzrestsymbole für die verschiedenen Körper zu unterscheiden, versehen wir sie unten mit einem Index, also z. B.

$(-)_k$ Potenzrestsymbol im Körper k,
$(-)_K$ „ „ „ K.

Ist kein Irrtum möglich, so lasse ich den Index weg.

Ferner bezeichne ich die Relativnorm eines Ideals $\mathfrak{P}$ aus dem Körper K in Bezug auf den Körper k mit

$$N_k^K(\mathfrak{P}).$$

Handelt es sich um die Norm von $\mathfrak{P}$, so wird der untere Index weggelassen; ist es ferner nicht zweifelhaft, zu welchem Körper das Ideal $\mathfrak{P}$ gerechnet werden soll, so kann der obere Index fortgelassen werden.

Nach diesen Vorbemerkungen führen wir folgende Hülfssätze an:

Satz 26 (Hülfssatz). *Ist K ein Oberkörper von k, so ist die Relativnorm eines Primideals aus K in Bezug auf k die Potenz eines Primideals in k.*

Satz 27 (Hülfssatz). *Ist k ein beliebiger Oberkörper von $k(\zeta)$ und α eine beliebige zu dem Primideal $\mathfrak{p}$ relativ prime Zahl aus k, so gilt für irgend einen positiven ganzzahligen Exponenten e:*

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}^e}\right) \equiv \alpha^{\frac{N(\mathfrak{p}^e)-1}{l}}\,(\mathfrak{p}).$$

Auf den Beweis des ersten Hülfssatzes brauche ich nicht einzugehen; der Beweis des zweiten folgt einfach aus der Kongruenz:

$$\frac{N(\mathfrak{p}^e)-1}{l} \equiv e \cdot \frac{N(\mathfrak{p})-1}{l} \quad (l).$$

Mit Hülfe der vorstehenden beiden Sätze können wir jetzt das folgende Theorem gewinnen:

Satz 28. *Ist k ein Oberkörper von $k(\zeta)$ und K ein Oberkörper von k; ist ferner α eine ganze Zahl aus k und $\mathfrak{R}$ ein zu α primes Primideal aus K mit der Relativnorm $\mathfrak{r}$ in Bezug auf k, so gilt:*

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{R}}\right)_K = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{r}}\right)_k.$$

Beweis: Man kann $\mathfrak{R}$ als Primideal in K ansehen; $\mathfrak{r}$ ist dann in k die Potenz eines Primideals und es gilt daher:

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{R}}\right)_K \equiv \alpha^{\frac{N^K(\mathfrak{R})-1}{l}} \; (\mathfrak{R}), \qquad \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{r}}\right)_k \equiv \alpha^{\frac{N^k(\mathfrak{r})-1}{l}} \; (\mathfrak{R}).$$

Da nun $N^K(\mathfrak{R}) = N^k(\mathfrak{r})$ ist, so folgt:

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{R}}\right)_K = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{r}}\right)_k.$$

Um das zweite Theorem zu erhalten, müssen wir zunächst einen Satz anführen, der sich auf die Zusammensetzung der Relativzerlegungsgruppe eines Primideals bezieht:

Satz 29. *Ist $\mathfrak{P}$ ein Primideal des Körpers K, der ein relativ Galoisscher Oberkörper von k ist, so ist die Relativträgheitsgruppe von $\mathfrak{P}$ g_t eine invariante Untergruppe der Relativzerlegungsgruppe g_z. Man erhält alle Substitutionen von g_z, wenn man die Substitutionen von g_t mit $1, z, \cdots z^{f-1}$ multipliziert, wo z eine geeignet gewählte Substitution aus g_z bedeutet. Die Zahl f ist bestimmt durch die Relation:*

$$N_k^K(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p}^f,$$

in der $\mathfrak{p}$ ein Primideal in k bedeutet. Setzt man außerdem

$$N^k(\mathfrak{p}) = p^a,$$

also

$$N^K(\mathfrak{P}) = p^{af},$$

wo p eine rationale Primzahl ist, so kann z so gewählt werden, daß die Kongruenz:

$$z\mathsf{P} \equiv \mathsf{P}^{p^a} \; (\mathfrak{P})$$

besteht; in dieser bedeutet P eine beliebige Primitivzahl von $\mathfrak{P}$.

Die Begriffe Relativzerlegungs- und Relativträgheitsgruppe sind eine selbstverständliche Verallgemeinerung der Begriffe Zerlegungs- und Trägheitsgruppe. Man erhält den Beweis von Satz 29 durch Ausdehnung der

Betrachtungen, die D. Hilbert in *Algebr. Zahlk. pg. 250—253* angestellt hat, auf relativ Galoissche Körper; man vergleiche auch H. Weber, Lehrbuch der Algebra, Bd. II, pg. 591—597.

Wir können nun dazu übergehen, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 30. *Ist K ein relativ Galoisscher Oberkörper von k, so gilt:*

$$\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{q}}\right)_K = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right)_k,$$

wenn Π eine Zahl aus K, $\mathfrak{q}$ ein Ideal aus k bedeutet und $\pi = N_k^K(\Pi)$ ist.

Beweis Wir können q als Primideal in k ansehen, das in K folgende Spaltung erfährt:

$$\mathfrak{q} = (\mathfrak{Q}_1 \cdot \mathfrak{Q}_2 \cdots \mathfrak{Q}_e)^g,$$

wo $\mathfrak{Q}_1, \cdots \mathfrak{Q}_e$ verschiedene Primideale in K bedeuten. Ist

$$N_k^K(\mathfrak{Q}_1) = \mathfrak{q}^f,$$

so gilt, wenn der Relativgrad von K in Bezug auf k gleich m ist:

$$m = gef.$$

Der Grad der zu $\mathfrak{Q}_1$ gehörigen Relativzerlegungsgruppe ist gf, der Grad der zugehörigen Relativträgheitsgruppe g. Die gesamte Relativgruppe von K in Bezug auf k kann man so schreiben:

$$z^n T_j S_i \begin{cases} i = 1, 2, \cdots e, \\ j = 1, 2, \cdots g, \\ n = 0, 1, \cdots f-1, \end{cases}$$

Dabei sind S_1, S_2, $\cdots$ Substitutionen, welche $\mathfrak{Q}_1$ in $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\cdots$ überführen, T_j die Substitutionen der Relativträgheitsgruppe und z eine geeignete Substitution der Relativzerlegungsgruppe.

Es ist nun:

(1) $$\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{q}}\right)_K = \left(\frac{\Pi}{(\mathfrak{Q}_1 \cdot \mathfrak{Q}_2 \cdots \mathfrak{Q}_e)^g}\right)_K = \left(\frac{\Pi'}{\mathfrak{Q}_1{}^g}\right)_K,$$

wenn man

$$\Pi' = S_1^{-1}\Pi \cdot S_2^{-1}\Pi \cdots S_e^{-1}\Pi$$

setzt.

Ferner ist:

(2) $$\left(\frac{\Pi'}{\mathfrak{Q}_1{}^g}\right)_K = \left(\frac{\Pi''}{\mathfrak{Q}_1}\right)_K,$$

wo

$$\Pi'' = T_1\Pi' \cdot T_2\Pi' \cdots T_j\Pi'$$

ist.

Bedeutet dann K eine Primitivzahl von $\mathfrak{Q}_1$ und ist die Substitution z so gewählt, daß

$$z\mathsf{K} \equiv \mathsf{K}^{q^a} \quad (\mathfrak{Q}_1)$$

wird, wenn $N^k(\mathfrak{q}) = q^a$ ist, so gelten die Kongruenzen:

$$\Pi'' \equiv \mathsf{K}^b \ (\mathfrak{Q}_1),$$
$$z\Pi'' \equiv (\mathsf{K}^{q^a})^b \ (\mathfrak{Q}_1),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$z^{f-1}\Pi'' \equiv (\mathsf{K}^{q^{a(f-1)}})^b \ (\mathfrak{Q}_1),$$

in denen b einen positiven ganzzahligen Exponenten bedeutet.

Aus den letzten Kongruenzen folgt:

$$\Pi'' \cdot z\Pi'' \cdots z^{f-1}\Pi'' \equiv (\mathsf{K}^b)^{\frac{q^{af}-1}{q^a-1}} \ (\mathfrak{Q}_1)$$

oder, da

$$\pi = \Pi'' \cdot z\Pi'' \cdots z^{f-1}\Pi''$$

ist,

$$\pi \equiv \Pi''^{\frac{q^{af}-1}{q^a-1}} \ (\mathfrak{Q}_1),$$

folglich

$$\pi^{\frac{q^a-1}{l}} \equiv (\Pi'')^{\frac{q^{af}-1}{l}} \ (\mathfrak{Q}_1),$$

d. h.

(3) $$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right)_k = \left(\frac{\Pi''}{\mathfrak{Q}_1}\right)_K.$$

Aus (1), (2), (3) folgt $\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{q}}\right)_K = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right)_k.$

§ 10.

Das Reziprozitätsgesetz zwischen einem beliebigen und einem primären Primideal in gewissen relativ Galoisschen Körpern.

Mit dem im vorigen Paragraphen entwickelten Hülfsmitteln gelingt es, das Reziprozitätsgesetz zwischen einem beliebigen und einem primären Primideal noch für weitere Körperkategorieen zu beweisen. Wir stellen in dieser Richtung zunächst folgenden Satz auf:

Satz 31. *Ist k ein relativ Galoisscher Oberkörper des Kreiskörpers $k(\zeta)$, dessen Relativgrad inbezug auf $k(\zeta)$ zu l prim ist, so gilt in k das Reziprozitätsgesetz zwischen einem beliebigen und einem primären Primideal, wenn die Klassenzahlen von k und $k(\zeta)$ nicht durch l teilbar sind.*

Beweis: Behalten wir die Bezeichnungen von Satz 23 bei, so ist nachzuweisen, daß:

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right) = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)$$

ist.

Wir nehmen zunächst wieder an, daß $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{p}$ nicht relativ konjugiert

sind, und beweisen die Existenz eines primären Hülfsprimideals $\mathfrak{p}'$ mit der Primärzahl π', für das

$$\left(\frac{\pi'}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}'}\right) \neq 1, \quad \left(\frac{\pi'}{\mathfrak{r}}\right) = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}'}\right) \neq 1$$

ist. Es seien $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_{a_1}$ und $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}, \mathfrak{r}_2, \cdots, \mathfrak{r}_{a_2}$ die zu $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{r}$ relativ-konjugierten, unter einander verschiedenen Primideale und es sei:

$$(\mathfrak{p}_i)^{hh'} = (\pi_i) \qquad i = 1, 2, \cdots, a_1,$$
$$(\mathfrak{r}_j)^{hh'} = (\varrho_j) \qquad j = 1, 2, \cdots, a_2.$$

Wir bestimmen dann, was stets möglich ist, ein primäres Primideal $\mathfrak{p}'$ in k mit den Eigenschaften:

$$\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}'}\right) \neq 1, \quad \left(\frac{\pi_i}{\mathfrak{p}'}\right) = 1 \qquad i = 2, 3, \cdots, a_1,$$

$$\left(\frac{\varrho_1}{\mathfrak{p}'}\right) \neq 1, \quad \left(\frac{\varrho_j}{\mathfrak{p}'}\right) = 1 \qquad j = 2, 3, \cdots, a_2.$$

Setzen wir jetzt

$$\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}'}\right)_k = \left(\frac{\pi'}{\mathfrak{p}_1}\right)_k^n,$$

indem wir mit π' eine Primärzahl von $\mathfrak{p}'$ bezeichnen, so gilt auch, wenn wir die Relativnormen von Zahlen oder Idealen aus k in Bezug auf $k(\zeta)$ durch einen übergesetzten Strich bezeichnen:

$$\left(\frac{\overline{\pi}}{\mathfrak{p}'}\right)_k = \left(\frac{\pi'}{\mathfrak{p}}\right)_k^n \neq 1.$$

Mit Benutzung der Sätze 28 und 30 folgt dann, wenn man das Potenzrestsymbol in $k(\zeta)$ durch den Index kr bezeichnet:

$$\left(\frac{\overline{\pi}}{\overline{\mathfrak{p}}'}\right)_{kr} = \left(\frac{\overline{\pi}'}{\overline{\mathfrak{p}}}\right)_{kr}^n \neq 1.$$

Folglich ist nach Satz 25, da $\overline{\mathfrak{p}}'$ in $k(\zeta)$ die Potenz eines primären Primideals ist, der Exponent $n = 1$, mithin:

$$\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}'}\right)_k = \left(\frac{\pi'}{\mathfrak{p}_1}\right)_k.$$

Auf dieselbe Weise zeigt man, daß $\left(\frac{\pi'}{\mathfrak{r}}\right) = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}'}\right)$ ist.

Die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes folgt nun aus Satz 24.

In dem ausgeschlossenen Falle, daß $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{r}$ relativ konjugiert sind, kann man nach dem eben Bewiesenen ein beliebiges primäres Primideal $\mathfrak{p}'$ in k, das nicht zu $\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{r}$ relativ konjugiert ist und für das

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}'}\right) \neq 1, \quad \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}'}\right) \neq 1$$

ist, als Hülfsideal benutzen.

Nachdem so der Beweis für Satz 31 vollständig erbracht ist, wollen wir die Richtigkeit des in der Überschrift dieses Paragraphen genannten Reziprozitätsgesetzes noch für eine zweite Körperkategorie durch Beweis des folgenden Satzes zeigen:

Satz 32. *Ist k ein relativ Galoisscher Oberkörper von $k(\zeta)$, dessen Relativgrad in Bezug auf $k(\zeta)$ genau durch die erste Potenz von l teilbar ist, so gilt in k das Reziprozitätsgesetz zwischen einem beliebigen und einem primären Primideal, wenn die Klassenzahlen von k und $k(\zeta)$ nicht durch l teilbar sind.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß man zu jedem Primideal $\mathfrak{r}$ ein primäres Primideal $\mathfrak{p}$ aus k bestimmen kann, so daß:

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right) = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) + 1$$

ist, wobei $\mathfrak{p}^{hh'} = (\pi)$, $\mathfrak{r}^{hh'} = (\varrho)$ ist und π eine primäre Zahl bedeutet. Bezüglich des gegebenen Primideals $\mathfrak{r}$ unterscheiden wir dabei folgende Fälle:

1) Der Grad der Relativzerlegungsgruppe von $\mathfrak{r}$ ist zu l prim.
2) Der Grad der Relativzerlegungsgruppe ist durch l teilbar, der Grad der Relativträgheitsgruppe dagegen nicht.
3) Die Grade der Relativzerlegungs- und Relativträgheitsgruppe sind beide durch l teilbar.

Im ersten Falle findet man das Hülfsprimideal genau wie im vorigen Satze. Im zweiten Falle können wir setzen:

$$\bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r}_2 \cdots \mathfrak{r}_m,$$

wo $\bar{\mathfrak{r}}$ die Potenz eines Primideals in $k(\zeta)$ bedeutet, deren Exponent nicht durch l teilbar ist; $\mathfrak{r}_2, \cdots \mathfrak{r}_m$ sind relativ konjugierte Primideale zu $\mathfrak{r}$; lm ist der Relativgrad von k in Bezug auf $k(\zeta)$.

Ist die Klassenzahl von k gleich h_1, diejenige von $k(\zeta)$ gleich h_2 und setzt man:

$$h = h_1 h_2 h_3 \equiv 1 \quad (l),$$

so gilt:

$$\bar{\varrho} = \varrho \cdot \varrho_2 \cdots \varrho_m \cdot E,$$

wenn

$$(\bar{\varrho}) = \bar{\mathfrak{r}}^h, \quad (\varrho) = \mathfrak{r}^h, \cdots, (\varrho_m) = \mathfrak{r}_m^h$$

ist und E eine Einheit aus k bedeutet.

Man bestimme nun ein primäres Primideal $\mathfrak{p}$ in k derart, daß

$$\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) + 1, \quad \left(\frac{\varrho_i}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \qquad (i = 2, 3, \cdots, m).$$

Durch Übergang auf den Körper $k(\zeta)$ zeigt man dann in analoger Weise wie im vorigen Satze, daß

$$\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right) \neq 1$$

ist. Im dritten Falle kann man setzen:

$$\bar{\mathfrak{r}} = (\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r}_2 \cdots \mathfrak{r}_m)^l,$$

wobei $\mathfrak{r}_2, \cdots \mathfrak{r}_m$ relativ konjugierte Primideale zu $\mathfrak{r}$ sind und $\bar{\mathfrak{r}}$ die Relativnorm von $\mathfrak{r}$ in Bezug auf $k(\zeta)$ bedeutet. Schreibt man wieder:

$$\bar{\mathfrak{r}}^h = (\bar{\varrho}), \quad \mathfrak{r}^h = (\varrho), \quad \mathfrak{r}_2^h = (\varrho_2) \cdots \mathfrak{r}_m^h = (\varrho_m)$$

und wählt $\varrho, \varrho_2, \cdots \varrho_m$ als relativ konjugierte ganze Zahlen aus k und $\bar{\varrho}$ als Relativnorm von ϱ in Bezug auf $k(\zeta)$, so gilt:

$$\bar{\varrho} = E \cdot (\varrho \cdot \varrho_2 \cdots \varrho_m)^l,$$

wobei E eine Einheit aus k bedeutet. Man kann ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Primideale $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_2 \cdots \mathfrak{r}_m$ sämtlich von einander verschieden sind. Der Relativzerlegungskörper k_1 von $\mathfrak{r}$ ist dann vom Relativgrade m in Bezug auf $k(\zeta)$ und k ist in Bezug auf k_1 relativ cyklisch vom Grade l. Da k und k_1 die l^{te} Einheitswurzel ζ enthalten, kann man k aus k_1 durch Adjunktion von $\sqrt[l]{\mu}$ entstehen lassen, wo μ eine ganze, durch das in k_1 gelegene Primideal $\mathfrak{r}^l$ teilbare Zahl aus k_1 bedeutet. Wir suchen jetzt ein Primideal $\mathfrak{p}$ in k_1 mit folgenden Eigenschaften:

a) Alle Einheiten in k_1 sollen l^{te} Potenzreste von $\mathfrak{p}$ sein.

b) Bezeichnet man die Relativnormen von $\varrho, \varrho_2 \cdots \varrho_m$ in Bezug auf k_1 mit $\varrho', \varrho_2', \cdots \varrho_m'$, so soll sein:

$$\left(\frac{\varrho'}{\mathfrak{p}}\right)_{k_1} \neq 1, \quad \left(\frac{\varrho_i'}{\mathfrak{p}}\right)_{k_1} = 1, \quad (i = 2, 3, \cdots, m), \quad \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_{k_1} \neq 1.$$

Da μ nicht ein Produkt aus einer Einheit und der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl aus k_1 sein kann, so widersprechen sich die angegebenen Bedingungen nicht und es existieren daher nach Satz 18 unendlich viele Primideale $\mathfrak{p}$ mit den geforderten Eigenschaften. Ein solches Primideal $\mathfrak{p}$ bleibt dann auch in k Primideal und erfüllt in k folgende Bedingungen:

a) Es ist primär.

b) $\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)_k \neq 1, \quad \left(\frac{\varrho_i}{\mathfrak{p}}\right)_k = 1 \quad (i = 2, 3, \cdots, m).$

Wir schreiben jetzt:

$$\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)_k = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)_k^n \neq 1, \tag{1}$$

wo π eine Primärzahl von $\mathfrak{p}$ in k bedeutet und bestimmen n durch Übergang auf $k(\zeta)$. Die Relativnorm von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf $k(\zeta)$ ist in $k(\zeta)$ die l^{te} Potenz eines Ideals; man kann daher setzen:

$$N_{k(\zeta)}^k(\mathfrak{p}) = \bar{\mathfrak{p}}^l,$$

wo $\bar{\mathfrak{p}}$ eine Potenz eines Primideals aus $k(\zeta)$ bedeutet, deren Exponent nicht durch l teilbar ist. Es gilt dann zunächst:

$$(2) \qquad \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)_k = \left(\frac{\varrho'}{\mathfrak{p}}\right)_{k_1} = \left(\frac{\bar{\varrho}}{\mathfrak{p}}\right)_{k_1} = \left(\frac{\bar{\varrho}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)_{kr}.$$

Bezeichnet man jetzt eine Substitution, die $\mathfrak{r}_i$ in $\mathfrak{r}$ überführt, mit S_i und setzt

$$\bar{\mathfrak{p}}^h = (\bar{\pi}),$$

indem man $\bar{\pi}$ als primäre Zahl in $k(\zeta)$ wählt, so gilt:

$$\bar{\pi} = E_1 \pi \cdot S_2 \pi \cdots S_m \pi,$$

wo E_1 eine Einheit aus k bedeutet, die l^{te} Potenz einer Einheit aus k ist, da $\bar{\pi}, \pi, S_2\pi, \cdots S_m\pi$ primäre Zahlen in k sind. Es gilt daher:

$$(3) \qquad \left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)_k = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}_2\cdots\mathfrak{r}_m}\right)_k = \left(\frac{\bar{\pi}}{\mathfrak{r}}\right)_k = \left(\frac{\bar{\pi}}{\mathfrak{r}}\right)_{kr}.$$

Es folgt somit aus Gleichung (1), (2), (3):

$$\left(\frac{\bar{\varrho}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)_{kr} = \left(\frac{\bar{\pi}}{\mathfrak{r}}\right)_{kr}^n + 1,$$

also $n = 1$. Damit ist auch der dritte Fall erledigt.

Um mit Hülfe der vorstehenden Ausführungen den Satz 32 zu beweisen, nennen wir die beiden Primideale aus k, für die das Reziprozitätsgesetz bewiesen werden soll, $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{r}$. Wir haben dann drei Fälle zu unterscheiden, indem wir zunächst ausschließen, daß $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{r}$ relativ konjugiert sind:

a) $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{r}$ gehören nach der im Vorhergehenden angegebenen Einteilung zu 1) oder 2). Man kann in diesem Falle, wie man leicht erkennt, ein primäres Primideal $\mathfrak{p}$ finden, das für beide Primideale $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{r}$ als Hülfsideal fungieren kann, weil man es so wählen kann, daß

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}}\right) + 1, \quad \left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right) = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) + 1$$

ist, wobei π, ϱ, π_1 zu $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{p}_1$ in der bekannten Beziehung stehen. Das zu beweisende Reziprozitätsgesetz folgt dann aus Satz 24.

b) Das eine der beiden Primideale $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{r}$ gehört zu 1) oder 2), das andere, etwa $\mathfrak{r}$, gehört zu 3). Man wählt in diesem Falle ein Hülfsprimideal nach den zum Falle 3) gegebenen Ausführungen aus dem Körper k_1, fügt aber noch die Bedingung hinzu, daß

$$\left(\frac{\pi_1'}{\mathfrak{p}}\right)_{k_1} + 1$$

sein soll, wo π_1' die Relativnorm von π_1 in Bezug auf k_1 ist. Da das gefundene Primideal $\mathfrak{p}$ unter 2) gehört, gilt nach a)

$$\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}}\right)_k = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right)_k + 1$$

und nach den Ausführungen zum dritten Falle oben:

$$\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)_k = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)_k + 1.$$

c) Beide Primideale $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{r}$ gehören zu 3). Man wähle aus k_1 ein Primideal $\mathfrak{p}$, das dieselben Bedingungen wie unter b) erfüllt, dann ist $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal in k, für das nach b) gilt:

$$\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}}\right)_k = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right)_k + 1, \quad \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)_k = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)_k + 1.$$

Da man auch in dem ausgeschlossenen Falle, daß $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{r}$ relativ konjugiert sind, mit Hülfe des Vorstehenden leicht die Existenz eines Hülfsprimideals nachweisen kann, so folgt die Richtigkeit von Satz 32 jetzt einfach aus Satz 24.

Man kann unter Benutzung der im vorigen Paragraphen entwickelten Hülfsmittel noch für andere Körperkategorieen, speziell für gewisse Unterkörper des hier betrachteten Körpers k das Reziprozitätsgesetz zwischen einem primären und einem beliebigen Primideal beweisen; man vergleiche dazu pg. 43 meiner in den Göttinger Abhandlungen erschienenen Arbeit. Ich gehe indessen hier auf diese Untersuchungen nicht ein, weil ich in einer späteren Abhandlung allgemeinere Entwickelungen darüber zu geben gedenke.

III.

§ 11.

Die Existenz von l^{r-1} Geschlechtern mit dem Charakterenprodukt 1 in solchen relativcyklischen Körpern K, deren Relativdiskriminante zu l prim ist.

Wir haben in den letzten Paragraphen gezeigt, daß es gewisse Körperkategorieen gibt, in denen das Reziprozitätsgesetz zwischen einem beliebigen und einem primären Primideal $\mathfrak{p}$ gilt. Wir werden bei allen folgenden Entwickelungen über den Körper k folgende beiden Annahmen machen:

1) die Klassenzahl h von k ist nicht durch l teilbar,

2) in k gilt das Reziprozitätsgesetz zwischen einem primären und einem beliebigen Primideal.

Wir wollen unter dieser Voraussetzung zunächst den folgenden fundamentalen Satz beweisen:

Satz 33. *Es sei die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ zu l prim und r die Anzahl der Charaktere, die ein Geschlecht in K bestimmen. Sind dann $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_r$ irgendwelche l^{te} Einheitswurzeln, deren Produkt 1 ist, so gibt es stets in K ein Geschlecht mit den Charakteren $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_r$. Die Anzahl aller verschiedenen Geschlechter ist also l^{r-1}.*

Beweis: Es seien $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \cdots \mathfrak{d}_t$ die in der Relativdiskriminante von K aufgehenden Primideale und

$$\mathfrak{d}_1^{hh'} = (\delta_1), \cdots, \mathfrak{d}_t^{hh'} = (\delta_t),$$

$$\mu^{hh'} = \varepsilon \delta_1^{e_1} \delta_2^{e_2} \cdots \delta_t^{e_t} \alpha^l,$$

wo ε eine Einheit und α eine ganze Zahl aus k bedeutet und wo die Exponenten $e_1, e_2, \cdots e_t$ gewisse Werte $1, 2, \cdots l-1$ haben. Sind dann $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \cdots \mathfrak{d}_r$ die nach den Vorschriften für die Geschlechtsbestimmung ausgewählten r Primideale, so bestimme man ein primäres Primideal $\mathfrak{p}$ in k derart, daß für einen zu l primen Exponenten n:

$$\left(\frac{\delta_1^{e_1}}{\mathfrak{p}}\right)^n = \zeta_1, \quad \left(\frac{\delta_2^{e_2}}{\mathfrak{p}}\right)^n = \zeta_2, \cdots \left(\frac{\delta_r^{e_r}}{\mathfrak{p}}\right)^n = \zeta_r, \quad \left(\frac{\delta_{r+1}}{\mathfrak{p}}\right) = 1, \cdots \left(\frac{\delta_t}{\mathfrak{p}}\right) = 1.$$

Es folgt dann aus $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ die Zerlegbarkeit von $\mathfrak{p}$ in l verschiedene Primfaktoren in K. Ist $\mathfrak{P}$ einer von diesen, so hat $\mathfrak{P}^n$ die Charaktere $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_r$, womit unser Satz bewiesen ist.

§ 12.

Das primäre Ideal.

Wir wollen in diesem Paragraphen die früher für die primären Primideale gefundenen Eigenschaften auf beliebige primäre Ideale übertragen durch Beweis des folgenden Satzes:

Satz 34. 1) *Ist α eine primäre Zahl und $(\alpha) = \mathfrak{a}^{hh'}$, so ist $(\mathfrak{a})$ ein primäres Ideal.*

2) *Ist α eine primäre und β eine beliebige zu $\mathfrak{l}$ prime ganze Zahl aus k, so ist*

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

3) *Ist $\mathfrak{a}$ ein primäres Ideal, so läßt sich eine primäre Zahl α so wählen, daß $\mathfrak{a}^{hh'} = (\alpha)$.*

Zum Beweise der Behauptungen 1) und 2) betrachten wir den Körper $K(\sqrt[l]{\alpha}, k)$, der eine zu l prime Relativdiskriminante besitzt und für den daher Satz 33 gilt. Wir setzen:

$$\alpha^{hh'} = \varepsilon \delta_1^{e_1} \delta_2^{e_2} \cdots \delta_t^{e_t} \gamma^l,$$

wo die Größen auf der rechten Seite die analoge Bedeutung haben, wie im vorigen Paragraphen. Um nun nachzuweisen, daß $\left(\frac{\eta}{\mathfrak{a}}\right) = 1$ für eine beliebige Einheit η, bestimme man das primäre Primideal $\mathfrak{p}$ derart, daß:

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) = 1$$

$$\left(\frac{\delta_i^{e_i}}{\mathfrak{p}}\right)^n = \left(\frac{\eta^{e_i}}{\mathfrak{d}_i}\right) \qquad (i = r+1, r+2, \cdots t), \quad n \not\equiv 0 (l).$$

Da jetzt:

$$\left(\frac{\eta\pi^{l-n}, \alpha}{\mathfrak{b}_i}\right) = 1 \qquad (i = r+1, r+2, \cdots t),$$

wenn π eine Primärzahl von $\mathfrak{p}$ bedeutet, so muß nach Satz 33 auch

$$\prod_{(j=1,2,\cdots r)} \left(\frac{\eta\pi^{l-n}, \alpha}{\mathfrak{b}_j}\right) = 1$$

sein. Daraus folgt dann: $\left(\frac{\eta}{\alpha}\right) = 1$.

Die zweite Behauptung ist evident, wenn β eine Einheit oder wenn $\beta = \pi = \mathfrak{p}^{hh'}$ ist und $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal bedeutet. Ist $\beta = \varkappa = \mathfrak{q}^{hh'}$, wo $\mathfrak{q}$ ein nichtprimäres Primideal bedeutet, so sind 2 Fälle zu unterscheiden:

1) $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{q}}\right) = 1$. $\mathfrak{q}$ ist dann in $K(\sqrt[l]{\alpha}, k)$ zerlegbar und mithin nach Satz 33:

$$\left(\frac{\xi\varkappa}{\mathfrak{a}}\right) = 1,$$

wenn ξ eine geeignete Einheit bedeutet; folglich nach der schon bewiesenen ersten Behauptung:

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{a}}\right) = 1.$$

2) $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{q}}\right) = \zeta$, wo ζ eine l^{te} Einheitswurzel bedeutet. Man bestimme das primäre Primideal $\mathfrak{p}$ mit einer Primärzahl π so, daß:

$$\left(\frac{\varkappa}{\alpha\pi^n}\right) = 1$$

ist, wo $n \not\equiv 0 (l)$ ist. Dann ist nach Fall 1) auch

$$\left(\frac{\alpha\pi^n}{\varkappa}\right) = 1, \quad \text{also } \left(\frac{\varkappa}{\alpha}\right) = \left(\frac{\alpha}{\varkappa}\right).$$

Da $\beta^{hh'}$ sich stets als ein Produkt von solchen Zahlen darstellen läßt, wie wir sie betrachtet haben, ist unsere zweite Behauptung ebenfalls bewiesen.

Die Richtigkeit der dritten Behauptung erkennt man leicht auf folgende Weise. Setzt man $\mathfrak{a}^{hh'} = (\alpha^*)$, so ist

$$\alpha^* \equiv \varepsilon \varkappa_1^{v_1} \varkappa_2^{v_2} \cdots \varkappa_{m'}^{v_{m'}} \gamma^l \ (\mathfrak{l}^l),$$

wo ε eine Einheit und γ eine ganze Zahl aus k bedeutet, während $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_{m'}$ die in § 6 angegebene Bedeutung haben. Es ist daher:

$$\alpha' = \alpha^* \varepsilon^{l-1} \varkappa_1^{l-v_1} \varkappa_2^{l-v_2} \cdots \varkappa_{m'}^{l-v_{m'}}$$

eine primäre Zahl und folglich für eine beliebige Einheit η:

$$\left(\frac{\eta}{\alpha'}\right) = 1.$$

Daraus folgt dann, daß $v_1 \equiv 0, \cdots v_{m'} \equiv 0\,(l)$ sein muß, d. h. daß auch $\alpha = \alpha^* \varepsilon^{l-1}$ eine primäre Zahl sein muß. Man kann die ersten beiden Behauptungen unseres Satzes auch in folgender Weise zusammenfassen:

Satz. 35. *Sind ν und μ zwei ganze zu l prime Zahlen aus k und eine von ihnen primär, so ist:*

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = 1,$$

wo das Produkt $\prod\limits_{(\mathfrak{w})}{}'$ über alle zu $\mathfrak{l}$ primen Primideale in k zu erstrecken ist.

§ 13.

Die hyperprimären Ideale und Zahlen.

Def. 11. *Es seien $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \cdots \mathfrak{l}_z$ die sämtlichen von einander verschiedenen in $\mathfrak{l}$ aufgehenden Primideale, so daß*

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1^{l_1} \mathfrak{l}_2^{l_2} \cdots \mathfrak{l}_z^{l_z}$$

wird.

Es sei ferner:

$$\mathfrak{l}_1^{hh'} = (\lambda_1),\ \mathfrak{l}_2^{hh'} = (\lambda_2),\ \cdots \mathfrak{l}_z^{hh'} = (\lambda_z).$$

Wenn dann das zu $\mathfrak{l}$ prime Ideal $\mathfrak{a}$ in k primär ist und überdies die Bedingungen erfüllt:

$$\left(\frac{\lambda_i}{\mathfrak{a}}\right) = 1 \qquad (i = 1, 2, \cdots z),$$

so soll $\mathfrak{a}$ ein hyperprimäres Ideal heißen.

Def. 12. *Eine ganze Zahl in k soll eine hyperprimäre Zahl heißen, wenn sie zu $\mathfrak{l}$ prim ist und der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{ll_1+1} \mathfrak{l}_2^{ll_2+1} \cdots \mathfrak{l}_z^{ll_z+1}$ kongruent ist.*

Um den Zusammenhang zwischen den hyperprimären Idealen und Zahlen zu erkennen, schicken wir einen Satz vorweg, der dem früheren Satz 21 ganz analog ist.

Satz 36. *Es mögen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_{m'}$, $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \cdots \mathfrak{q}_{m'}$, $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_{m'}$ dieselbe Bedeutung wie in Satz 21 haben. Bestimmt man dann z primäre Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots \mathfrak{p}_z$ mit den Primärzahlen $\pi_1, \pi_2, \cdots \pi_z$ so, daß*

$$\left(\frac{\lambda_i}{\mathfrak{p}_i}\right) \neq 1, \quad \left(\frac{\lambda_k}{\mathfrak{p}_i}\right) = 1 \qquad (i \neq k) \quad (i, k = 1, 2, \cdots z)$$

wird, so gilt für jede zu $\mathfrak{l}$ prime ganze Zahl ω in k eine Kongruenz von der Gestalt:

$$\omega \equiv \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_{m'}^{u_{m'}} \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_{m'}^{v_{m'}} \pi_1^{w_1} \cdots \pi_z^{w_z} \cdot \alpha^l \left(\mathfrak{l}_1^{l l_1+1} \mathfrak{l}_2^{l l_2+1} \cdots \mathfrak{l}_z^{l l_z+1}\right),$$

in der die Exponenten $u_1, u_2, \cdots u_{m'}, v_1, \cdots v_{m'}, w_1, \cdots w_z$ gewisse Werte $0, 1, \cdots l-1$ *haben und α eine geeignete ganze Zahl aus k bedeutet.*

Der Beweis ist ebenfalls analog dem für den Satz 21. Man zeigt zunächst durch Betrachtung des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$, daß eine Zahl:

$$\mu = \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_{m'}^{u_{m'}} \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_{m'}^{v_{m'}} \pi_1^{w_1} \cdots \pi_z^{w_z}$$

niemals der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{l}_1^{l l_1+1} \cdots \mathfrak{l}_z^{l l_z+1}$ kongruent sein kann, außer wenn sämtliche Exponenten Null sind. Setzt man dann

$$N_h = N(\mathfrak{l}_h)^{l_h}[N(\mathfrak{l}_h)-1] \qquad (h = 1, 2, \cdots z)$$

und bestimmt ein System von Zahlen:

$$\alpha_h^{(1)}, \alpha_h^{(2)}, \cdots \alpha_h^{\left(\frac{N_h}{l}\right)},$$

die die Eigenschaft haben, daß sie selbst und ihre l^{ten} Potenzen nach $\mathfrak{l}_h^{l_h+1}$ unter einander und mit 0 inkongruent sind und daß sie nach $\mathfrak{l}_j^{l_j+1}$ $(j \neq h)$ kongruent 1 sind, so stellt der Ausdruck:

$$\varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_{m'}^{u_{m'}} \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_{m'}^{v_{m'}} \pi_1^{w_1} \cdots \pi_z^{w_z} \left(\alpha_1^{(i_1)}\right)^l \cdots \left(\alpha_z^{(i_z)}\right)^l,$$

$$u_1, \cdots u_{m'}, \; v_1, \cdots v_{m'}, \; w_1, \cdots w_z = 0, 1, \cdots l-1 \qquad i = 1, 2, \cdots \frac{N}{l}$$

ein System von $l^{2m'} N_1 N_2 \cdots N_z$ nach $\mathfrak{l}_1^{l l_1+1} \cdots \mathfrak{l}_z^{l l_z+1}$ inkongruenten zu $\mathfrak{l}$ primen ganzen Zahlen in k dar. Da es nach dem genannten Modul nicht mehr inkongruente zu $\mathfrak{l}$ prime Zahlen gibt, ist damit unser Satz bewiesen.

Mit Hülfe desselben können wir leicht den gesuchten Zusammenhang zwischen den hyperprimären Idealen und Zahlen in k durch Beweis der folgenden beiden Sätze konstatieren.

Satz 37. *Ist α eine hyperprimäre Zahl in k, so ist (α) ein hyperprimäres Ideal.*

Beweis. Daß (α) ein primäres Ideal ist, folgt aus Satz 34. Es ist also nur noch nachzuweisen:

$$\left(\frac{\lambda_i}{\alpha}\right) = 1 \qquad (i = 1, 2, \cdots z).$$

Der Körper $K(\sqrt[l]{\alpha}, k)$ hat eine zu $\mathfrak{l}$ prime Relativdiskriminante; $\mathfrak{l}_i$ zerfällt in ihm in l verschiedene Primfaktoren, deren einer L_i sei. Wir wählen

dann eine ganze Zahl A in $\mathfrak{P}$, die genau durch die hh'^{te} Potenz von L_i teilbar ist und zu L_j $(j \neq i)$ relativ prim ist. Die Zahl $\frac{N_k(\mathsf{A})}{\lambda_i}$ ist dann eine ganze, zu $\mathfrak{l}$ prime Zahl in k und folglich nach Satz 35:

$$1 = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\frac{N_k(\mathsf{A})}{\lambda_i}, \alpha}{\mathfrak{w}} \right).$$

Daraus folgt:

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\lambda_i, \alpha}{\mathfrak{w}} \right) = 1$$

oder

$$\left(\frac{\lambda_i}{\alpha} \right) = 1.$$

Satz 38. *Ist $\mathfrak{a}$ ein hyperprimäres Ideal in k, so läßt sich stets eine hyperprimäre Zahl α in k so wählen, daß $\mathfrak{a}^{hh'} = (\alpha)$ ist.*

Beweis. Ist $\mathfrak{a}^{hh'} = \alpha^*$, so gilt nach Satz 36:

$$\alpha^* \equiv \varepsilon^* \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_{m'}^{v_{m'}}\, \pi_1^{w_1} \cdots \pi_s^{w_s}\, \gamma^l \qquad (\mathfrak{l}_1^{l l_1 + 1} \cdots \mathfrak{l}_s^{l l_s + 1})$$

und es ist demnach

$$\mu = \alpha^{*l-1} \varepsilon^* \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_{m'}^{v_{m'}}\, \pi_1^{w_1} \cdots \pi_s^{w_s}$$

eine hyperprimäre Zahl in k und folglich müssen nach dem vorigen Satze die Beziehungen:

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\mu} \right) = 1, \cdots \left(\frac{\varepsilon_{m'}}{\mu} \right) = 1, \quad \left(\frac{\lambda_1}{\mu} \right) = 1, \cdots \left(\frac{\lambda_s}{\mu} \right) = 1$$

gelten, aus denen

$$v_1 = v_2 = \cdots = v_{m'} = 0, \quad w_1 = \cdots = w_s = 0$$

folgt, d. h.

$$\varepsilon^{*l-1} \alpha^*$$

ist eine hyperprimäre Zahl der gewünschten Art.

Man kann dem Satz 37, wie leicht zu erkennen ist, folgenden allgemeinen Ausdruck geben:

Satz 39. *Sind ν, μ zwei ganze Zahlen aus k, von denen die eine hyperprimär ist, so ist stets:*

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}} \right) = 1,$$

wo das Produkt $\prod\limits_{(\mathfrak{w})}{}'$ über alle zu $\mathfrak{l}$ primen Primideale $\mathfrak{w}$ in k zu erstrecken ist.

§ 14.

Das Symbol $\left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{l}_i}\right)$.

Wir haben bisher das Normenrestsymbol nur für solche Primideale definiert, die zu $\mathfrak{l}$ prim sind; um diese Beschränkung aufzuheben, fügen wir folgende Definition hinzu:

Def. 13. *Es seien ν, μ zwei beliebige ganze Zahlen aus k und $\mathfrak{l}_1$ sei ein Primideal, das in $\mathfrak{l}$ genau zur l_1^{ten} Potenz und in μ genau zur a^{ten} Potenz aufgeht. Wir bestimmen dann die ganze Zahl μ^* aus k so, daß:*

$$\mu^* \equiv \mu\,(\mathfrak{l}_1^{l l_1+1+a}),$$
$$\mu^* \equiv \alpha^l\,(\mathfrak{l}_2^{l l_2+1} \cdots \mathfrak{l}_z^{l l_z+1}),$$

wo α eine zu $\mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3, \cdots \mathfrak{l}_z$ prime ganze Zahl aus k bedeutet. Wir setzen dann:

$$\left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu,\,\mu^*}{\mathfrak{w}}\right)^{-1},$$

wo das Produkt $\prod\limits_{(\mathfrak{w})}{}'$ über alle zu $\mathfrak{l}$ primen Primideale in k zu erstrecken ist.

Sind ν und μ zu $\mathfrak{l}$ prim, so genügt es, für die Kongruenzen, die μ^* definieren, die Moduln $\mathfrak{l}_1^{l l_1}$ resp. $\mathfrak{l}_2^{l l_2} \cdots \mathfrak{l}_z^{l l_z}$ anzusetzen.

Die Eindeutigkeit der Definition folgt aus Satz 39, resp. Satz 35.

Für das eben definierte Symbol gelten die folgenden Rechenregeln.

Satz 40. *Sind ν, ν_1, μ, μ_1 beliebige ganze Zahlen aus k und ist $\mathfrak{l}_1$ ein in $\mathfrak{l}$ aufgehendes Primideal, so gilt:*

$$1)\quad \left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right) \cdot \left(\frac{\nu_1,\,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\nu\nu_1,\,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right),$$
$$2)\quad \left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right) \cdot \left(\frac{\nu,\,\mu_1}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\nu,\,\mu\mu_1}{\mathfrak{l}_1}\right),$$
$$3)\quad \left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right) \qquad\qquad = \left(\frac{\nu,\,\mu_1}{\mathfrak{l}_1}\right),$$

wenn $\frac{\mu}{\mu_1}$ eine hyperprimäre Zahl ist.

Zum Schluß führen wir noch einen im folgenden gebrauchten Satz an, der eine Verallgemeinerung des Satzes 7 aus § 3 bildet.

Satz 41. *Ist ν eine genau durch $\mathfrak{l}_1^b$ teilbare ganze Zahl aus k und gilt die Kongruenz:*

$$\nu \equiv N_k(\mathsf{A})\ (\mathfrak{l}_1^{l l_1+1+b}),$$

wo A eine ganze Zahl aus $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ bedeutet, so gibt es auch eine ganze Zahl A_e in K, die der Kongruenz:

$$\nu \equiv N_k(\mathsf{A}_e)\ (\mathfrak{l}_1^{l l_1+1+b+e})$$

genügt.

Der Beweis des vorstehenden Satzes ist ganz analog dem Beweis des Satzes 7 in § 3, auf den wir deshalb verweisen.

§ 15.

Zwei Hülfssätze über die Normenreste nach $\mathfrak{l}_i$.

Ehe wir dazu übergehen, den engen Zusammenhang zwischen dem im vorigen Paragraphen definierten Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_i}\right)$ und den Normenresten von $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach $\mathfrak{l}_i$ darzulegen, beweisen wir in diesem Paragraphen zunächst zwei Hülfssätze über die Normenreste nach $\mathfrak{l}_i$, die für die Darlegung des erwähnten Zusammenhangs von wesentlicher Bedeutung sind.

Satz 42. *Sind ν_1 und ν_2 zwei ganze Zahlen aus k, die genau durch $\mathfrak{l}_1^{b_1}$ und $\mathfrak{l}_1^{b_2}$ teilbar sind, wo $b_2 \leqq b_1$, und gilt die Kongruenz:*

$$\nu_1 \equiv \alpha^l \nu_2 \, (\mathfrak{l}_1^{l l_1 + 1 + b_1}),$$

in der α eine ganze Zahl aus k bedeutet, so ist ν_1 und ν_2 gleichzeitig Normenrest oder Normennichtrest von $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$.

Beweis. Die Differenz $b_1 - b_2$ muß durch l teilbar sein; man kann sie ohne wesentliche Beschränkung gleich Null annehmen. Da in diesem Falle α zu $\mathfrak{l}_1$ prim ist, kann man eine ganze Zahl α_1 aus k so bestimmen, daß:

$$\alpha \alpha_1 \equiv 1 \, (\mathfrak{l}_1^{l l_1 + 1 + b_1}),$$

also auch

$$\nu_1 \alpha_1^l \equiv \nu_2 (\mathfrak{l}_1^{l l_1 + 1 + b_1}).$$

Mit Hülfe von Satz 41 ergibt sich dann leicht die Richtigkeit unserer Behauptung.

Satz 43. *Es seien μ_1 und μ_2 zwei ganze Zahlen aus k, die nicht l^{te} Potenzen von ganzen Zahlen aus k sind; die erste sei genau durch $\mathfrak{l}_1^{a_1}$, die zweite genau durch $\mathfrak{l}_2^{a_2}$ teilbar, wo $a_2 \leqq a_1$. Gilt dann die Kongruenz:*

$$\mu_1 \equiv \beta^l \mu_2 \, (\mathfrak{l}_1^{l l_1 + 1 + a_1}),$$

wo β eine ganze Zahl aus k bedeutet, so ist die ganze Zahl ν aus k stets dann und nur dann Normenrest von $K(\sqrt[l]{\mu_1}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$, wenn sie Normenrest von $K(\sqrt[l]{\mu_2}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$ ist.

Beweis. Soll ν Normenrest von $K(\sqrt[l]{\mu_1}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$ sein, so muß eine Kongruenz:

$$\nu \equiv N_k \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \sqrt[l]{\mu_1} + \cdots + \alpha_{l-1} \sqrt[l]{\mu_1^{l-1}}}{\beta_0} \, (\mathfrak{l}_1^N)$$

bestehen, wo $\alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_{l-1}, \beta_0$ ganze Zahlen aus k sind und N einen beliebig großen Exponenten bedeutet. Es sei nun β_0 genau durch $\mathfrak{l}_1^b$ teilbar.

Man bestimme dann, was stets möglich ist, eine ganze Zahl β_N aus k so, daß:

$$\mu_1 \equiv \beta_N^l \mu_2 \,(\mathfrak{l}_1^{N+lb})$$

wird, und bilde die Zahl

$$\mathsf{A}^* = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \beta_N \sqrt[l]{\mu_2} + \alpha_2 \beta_N^2 \sqrt[l]{\mu_2^2} + \cdots + \alpha_{l-1} \beta_N^{l-1} \sqrt[l]{\mu_2^{l-1}}}{\beta_0} \cdot \delta,$$

wo δ zu $\mathfrak{l}_1$ prim und durch $\frac{\beta_0}{\mathfrak{l}_1^b}$ teilbar sein soll. A^* ist dann, wie man leicht nachweist, eine ganze Zahl in $K(\sqrt[l]{\mu_2}, k)$ und es gilt, wenn man δ' so bestimmt, daß

$$\delta \delta' \equiv 1 \,(\mathfrak{l}_1^N)$$

wird,

$$\nu \equiv N_k(\mathsf{A}^* \delta') \,(\mathfrak{l}_1^N).$$

Es ist also ν auch Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu_2}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$. In analoger Weise führt man den umgekehrten Schluß aus.

§ 16.

Die Normenreste nach $\mathfrak{l}_i$ und das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_i}\right)$.

Wir können nunmehr dazu übergehen, den Zusammenhang zwischen den Normenresten von $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach $\mathfrak{l}_i$ und dem Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_i}\right)$, der in den folgenden beiden Sätzen enthalten ist, herzustellen.

Satz 44. *Sind ν und μ zwei beliebige ganze Zahlen aus k und ist ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$, so ist*

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1.$$

Beweis. Es sei μ genau durch $\mathfrak{l}_1^a$ teilbar, ferner sei

$$(\nu) = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{l}_1^{b_1} \cdot \mathfrak{l}_2^{b_2} \cdots \mathfrak{l}_z^{b_z},$$

wo $\mathfrak{n}$ ein zu $\mathfrak{l}$ primes Ideal aus K bedeutet. Bestimmt man dann eine Zahl μ^*, die nicht l^{te} Potenz einer Zahl aus k ist, so, daß

$$\mu^* \equiv \mu \,(\mathfrak{l}_1^{l l_1 + 1 + a}),$$
$$\mu^* \equiv 1 \,(\mathfrak{l}_2^{l l_2 + 1} \cdots \mathfrak{l}_z^{l l_z + 1}),$$

so ist nach Voraussetzung, resp. nach Satz 43 ν Normenrest von $K(\sqrt[l]{\mu^*}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \cdots \mathfrak{l}_z$. Es gibt daher in dem genannten Körper ganze Zahlen $\mathsf{A}_1, \cdots \mathsf{A}_z$, die den Kongruenzen:

$$\nu \equiv N_k(\mathsf{A}_1)\,(\mathfrak{l}_1^{l l_1+1+b_1}),$$
$$\nu \equiv N_k(\mathsf{A}_2)\,(\mathfrak{l}_2^{l l_2+1+b_2}),$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\nu \equiv N_k(\mathsf{A}_z)\,(\mathfrak{l}_z^{l l_z+1+b_z})$$

genügen. Daraus folgt die Existenz einer ganzen Zahl A in $K(\sqrt[l]{\mu^*}, k)$, die der Kongruenz:

$$\nu \equiv N_k(\mathsf{A})\,(\mathfrak{l}_1^{l l_1+1+b_1}\,\mathfrak{l}_2^{l l_2+1+b_2}\ldots\mathfrak{l}_z^{l l_z+1+b_z})$$

genügt. Aus derselben ergibt sich, daß man $\frac{\nu}{N_k(\mathsf{A})}$ in der Form eines Bruches $\frac{\varrho}{\sigma}$ darstellen kann, dessen Zähler und Nenner zu $\mathfrak{l}$ prim sind. Da nun die Kongruenz:

$$\varrho\sigma^{l-1} \equiv \frac{\nu\sigma^l}{N_k(\mathsf{A})} \equiv \sigma^l\,(\mathfrak{l}_1^{l l_1+1}\,\mathfrak{l}_2^{l l_2+1}\ldots\mathfrak{l}_z^{l l_z+1})$$

gilt, so ist nach Satz 39

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\varrho\sigma^{l-1}, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right) = 1,$$

folglich auch:

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right)^{-1} = \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1.$$

Ehe wir dazu übergehen, die Umkehrung des vorstehenden Satzes zu beweisen, wollen wir noch zwei Formeln angeben, die eine Ergänzung von Satz 40 bilden.

Satz 45. *Sind ν und μ zwei beliebige ganze Zahlen aus k, so gilt:*

$$1)\quad \left(\frac{\mu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1,$$
$$2)\quad \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\cdot\left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1.$$

Beweis. Die erste Behauptung folgt direkt aus Satz 44. Um die Gültigkeit der zweiten zu erkennen, schließt man so:

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\nu\mu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)$$
$$\left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\nu\mu, \nu}{\mathfrak{l}_1}\right)$$
$$\overline{\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\cdot\left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\nu\mu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\cdot\left(\frac{\nu\mu, \nu}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\nu\mu, \nu\mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1.}$$

Wir beweisen nunmehr die Umkehrung von Satz 44, die so lautet:

Satz 46. *Sind ν und μ zwei beliebige ganze Zahlen aus k und ist $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1$, so ist ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$.*

Beweis. Es sei μ genau durch $\mathfrak{l}_1^a$, ν durch $\mathfrak{l}_1^b$ teilbar und $\mathfrak{l}_1^{hh'} = (\lambda_1)$, wo λ_1 eine ganze Zahl aus k bedeutet. Man bestimme dann zwei ganze Zahlen μ^* und ν^* aus k so, daß

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\lambda_1{}^a\mu^* \equiv \mu^{hh'}(\mathfrak{l}_1^{l l_1+1+ahh'}), &\qquad& \nu^* \equiv \nu(\mathfrak{l}_1^{l l_1+1+b}),\\ &\lambda_1{}^a\mu^* \equiv 1 \quad (\mathfrak{l}_2^{l l_2+1}\ldots\mathfrak{l}_z^{l l_z+1}), && \nu^* \equiv 1\,(\mathfrak{l}_2^{l l_2+1}\ldots\mathfrak{l}_z^{l l_z+1}) \end{aligned}$$

wird. Ferner bestimme man das Primideal $\mathfrak{p}$ so, daß für einen zu $\mathfrak{l}$ primen Exponenten n das Ideal $\mu^*\mathfrak{p}^{n(l-1)}$ hyperprimär wird und $\mu^*\pi^{l-1}$ eine hyperprimäre Zahl, wenn $(\pi) = \mathfrak{p}^{nhh'}$. Da jetzt aus den Sätzen 42 und 43 folgt, daß ν stets und nur dann Normenrest von $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$ ist, wenn ν^* Normenrest von $K(\sqrt[l]{\lambda_1^a\pi}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$ ist, so ist das Letzte zu beweisen. Wir führen zu diesem Zweck zunächst den Nachweis, daß man im Körper $K(\sqrt[l]{\lambda_1^a\pi}, k)$ stets eine ganze Zahl A finden kann, so daß

$$(2)\qquad \frac{\nu^*}{N_k(\mathsf{A})} = \frac{\varrho}{\sigma}$$

wird, wo ϱ und σ zwei zu $\mathfrak{l}$ prime ganze Zahlen aus k bedeuten. Da ν^* zu $\mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3, \cdots \mathfrak{l}_z$ prim ist, so ist unsere Behauptung evident, wenn $\mathfrak{l}_1$ in $K(\sqrt[l]{\lambda_1^a\pi}, k)$ weiter zerlegbar ist. Ist dies nicht der Fall, so muß $a \equiv 0(l)$ sein. Wir können a dann als Null annehmen, während π eine primäre Zahl wird. Nun erkennt man mit Benutzung von Satz 40 und 45:

$$1 = \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\nu, \lambda_1^a\mu^*}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\lambda_1^a\mu^*, \nu}{\mathfrak{l}_1}\right)^{-1} = \left(\frac{\lambda_1^a\mu^*, \nu^*}{\mathfrak{l}_1}\right)^{-1} = \left(\frac{\nu^*, \lambda_1^a\mu^*}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\nu^*, \lambda_1^a\pi}{\mathfrak{l}_1}\right),$$

also, da $a = 0$ ist,

$$(3)\qquad \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu^*, \pi}{\mathfrak{w}}\right) = 1.$$

Setzt man $\nu^{*hh'} = \lambda_1^b\nu'$, wo ν' zu $\mathfrak{l}$ prim ist, so folgt aus (3), da auch

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu', \pi}{\mathfrak{w}}\right) = 1$$

ist, (Satz 35), daß

$$\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}}\right)^b = 1$$

sein muß.

Da aber $\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1$ ist, weil sonst $\mathfrak{p}$ ein hyperprimäres Ideal wäre entgegen der Annahme, daß $\mathfrak{l}_1$ in $K(\sqrt[l]{\pi}, k)$ unzerlegbar sein soll, so muß

$$b \equiv 0\,(l)$$

sein. Daraus ergibt sich sofort die allgemeine Gültigkeit von (1).

Wir bestimmen nun endlich ein Primideal $\mathfrak{q}$ in k so, daß $\varrho\sigma^{l-1}\mathfrak{q}^{n'}$ für einen zu l primen Exponenten n' ein hyperprimäres Ideal wird und daß:

$$\left(\frac{\lambda_1^a \pi}{\mathfrak{q}}\right) = 1 \tag{4}$$

ist. Wählt man dann $(\varkappa) = \mathfrak{q}^{n'hh'}$ so, daß $\varrho\sigma^{l-1}\varkappa$ eine hyperprimäre Zahl wird, so folgt wieder, daß ν^* dann Normenrest von $K(\sqrt[l]{\lambda_1^a \pi}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$ ist, wenn dies von $\varkappa$ gilt. Die Zahl $\varkappa$ hat überdies die Eigenschaft, daß

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) = 1$$

ist, wie leicht aus (4) und aus der Gleichung

$$1 = \left(\frac{\nu^*,\, \lambda_1^a \pi}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\varkappa,\, \lambda_1^a \pi}{\mathfrak{l}_1}\right)$$

folgt.

Ehe ich zum zweiten Teil des Beweises übergehe, der den Nachweis enthalten soll, daß $\varkappa$ stets gleich der Relativnorm einer Zahl aus $K(\sqrt[l]{\lambda_1^a \pi}, k)$ ist, gebe ich noch, um die Übersicht über den ersten Teil zu erleichtern, eine Tabelle an, aus der die Umwandlungen, welche die Zahlen ν, μ im Vorstehenden erfahren haben, zu ersehen sind; nebenbei sind die Verbindungen angegeben, die die Umwandlungen mit einander verknüpfen:

$\nu,\ \mu$	
	Verbindung durch die Kongruenzen (1).
$\nu^*,\ \lambda_1^a \mu^*$	
	$\mu^*\pi$ hyperprimäre Zahl; π Potenz eines Primideals.
$\nu^*,\ \lambda_1^a \pi$	
	$\frac{\nu^*}{N_k(\mathsf{A})} = \frac{\varrho}{\sigma}$, A ganze Zahl aus $K(\sqrt[l]{\lambda_1^a \pi}, k)$, ϱ, σ ganze *zu* $\mathfrak{l}_1$ *prime* Zahlen aus k,
$\varrho\sigma^{l-1},\ \lambda_1^a \pi$	
	$\varrho\sigma^{l-1}\varkappa$ hyperprimäre Zahl; $\varkappa$ Potenz eines Primideals; $\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right) = 1$.
$\varkappa,\ \lambda_1^a \pi$	

Wir wollen jetzt im zweiten Teil des Beweises zeigen, daß $\varkappa$ stets gleich der Relativnorm einer Zahl aus $K(\sqrt[l]{\lambda_1^a \pi}, k)$ ist, deren Nenner zu $\mathfrak{l}_1$ prim gewählt werden kann.

Wir unterscheiden bei diesem Nachweis 2 Fälle:

1) Die Anzahl der ambigen Komplexe in $K(\sqrt[l]{\lambda_1^a \pi}, k) = K$ ist 1. Dies tritt ein:

a) wenn $a = 0$ und π eine Primärzahl des primären Primideals $\mathfrak{p}$ ist;

b) wenn $\mathfrak{p}$ ein nichtprimäres Primideal ist.

Daß im Falle a) die Anzahl der ambigen Komplexe in K gleich 1

ist, ist evident; im Falle b) erkennt man es auf folgende Weise. Da $\mathfrak{p}$ nicht-primär ist, muß es eine Einheit ε in k geben mit der Eigenschaft

$$\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1,$$

also auch

$$\left(\frac{\varepsilon, \lambda_1^a \pi}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1.$$

Aus der letzten Relation folgt sofort, daß ε nicht die Relativnorm einer Zahl aus K sein kann, es ist daher $v \leqq m' - 1$.

Nun ist nach Satz 12 die Anzahl der ambigen Komplexe höchstens gleich $l^{t+v-m'-1}$; da in unserem Falle $t = 2$ ist, ergibt sich die Richtigkeit unserer Behauptung. Ist aber die Anzahl der ambigen Komplexe in K gleich 1, so läßt sich zeigen, daß die Klassenzahl von K nicht durch l teilbar sein kann. Dies ergibt sich durch einen indirekten Beweis.

Wäre nämlich die Klassenzahl durch l teilbar, so müsste es (vergl. Hilbert, A. Z. Satz 57, S. 232) ein Ideal $\mathfrak{J}$ in K geben, so daß:

$$\mathfrak{J} \not\sim 1, \quad \mathfrak{J}^l \sim 1$$

wäre. Dies Ideal $\mathfrak{J}$ könnte nicht dem Hauptkomplex angehören, denn aus

$$\mathfrak{J} \sim j,$$

wo j ein Ideal aus k bedeutet, würde folgen

$$\mathfrak{J}^h \sim j^h \sim 1$$

und, da $h \not\equiv 0\,(l)$ ist, müsste $\mathfrak{J} \sim 1$ sein gegen unsere Annahme.

Es sei nun C die Idealklasse, der $\mathfrak{J}$ angehört; dann gilt

$$C \not\sim 1, \quad C^l \sim 1,$$

und es läßt sich zeigen, daß ebensowenig wie C auch die Klasse $C^{(1-S)}$ dem Hauptkomplex angehören kann. Wenn dies nämlich der Fall wäre, so müsste (Hilbert, A. Z. S, 468) C eine ambige Klasse sein und daher selbst dem Hauptkomplex angehören. Geht man auf dem angegebenen Wege weiter, so läßt sich der Reihe nach zeigen, daß die Klassen:

$$C^{(1-S)}, \quad C^{(1-S)^2}, \quad C^{(1-S)^3} \ldots C^{(1-S)^l}$$

nicht dem Hauptkomplex angehören können. Da andererseits

$$C^{(1-S)^l} \sim 1,$$

kommen wir zu einem Widerspruch, der nur fortfällt, wenn wir die Annahme, daß die Klassenzahl von K durch l teilbar sei, fallen lassen.

Auf Grund dieser Tatsache können wir nun leicht zeigen, daß $\varkappa$ Normenrest von $K(\sqrt[l]{\lambda_1^a \pi}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$ ist. Da

$$\left(\frac{\lambda_1^a \pi}{\mathfrak{q}}\right) = 1,$$

zerfällt $\mathfrak{q}$ in k in l verschiedene Primfaktoren, von dem wir einen mit $\mathfrak{Q}$ bezeichnen. Ist nun die Klassenzahl von K gleich H und wählen wir H' so, daß $HH' \equiv 1\,(l)$ wird, so können wir:

$$\mathfrak{Q}^{n'hh'HH'} = (\mathsf{A})$$

setzen, wo A eine ganze Zahl aus K bedeutet, deren Relativnorm

$$N_k(\mathsf{A}) = \varepsilon \varkappa^{HH'}$$

ist, unter ε eine Einheit aus k verstanden.

Da im Falle a) jede Einheit aus k Relativnorm einer Einheit aus K ist, so ist für diesen Fall erwiesen, daß $\varkappa$ Normenrest von $K(\sqrt[l]{\lambda_1^a \pi}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$ ist. Im Falle b) existieren sicher Einheiten, die nicht Relativnormen von ganzen oder gebrochenen Zahlen in K sind und zwar sind dies alle die und nur die Einheiten ξ in k, für die

$$\left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1.$$

Wäre nämlich $\xi = N_k\left(\frac{B_0}{B_1}\right)$, wo B_0 und B_1 ganze Zahlen aus K bedeuten, so würde folgen:

$$1 = \left(\frac{N_k(B_0),\, \pi}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\xi\, N_k(B_1),\, \pi}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\xi,\, \pi}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}}\right).$$

Daß alle Einheiten η, für die $\left(\frac{\eta}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ ist, Relativnormen von Zahlen aus K sind, folgt dann aus der Gleichung $v = m' - 1$. Die Einheit ε gehört aber zu diesen Einheiten, weil:

$$\left(\frac{\varepsilon \varkappa^{HH'}}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \text{ und folglich wegen } \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \text{ auch } \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \text{ ist.}$$

Hieraus folgt, daß $\varkappa$ gleich der Relativnorm einer Zahl aus K ist, und da man infolge des Zerfallens von $\mathfrak{l}_1$ in l gleiche Primfaktoren in K den Nenner dieser Zahl zu $\mathfrak{l}_1$ prim wählen kann, so folgt, daß auch im Falle b) $\varkappa$ Normenrest von $K(\sqrt[l]{\lambda_1^a \pi}, \varkappa)$ nach $\mathfrak{l}_1$ ist.

2) Die Anzahl der ambigen Komplexe in $K(\sqrt[l]{\lambda_1^a \pi}, k) = K$ ist gleich l. Dieser Fall tritt ein, wenn $\mathfrak{p}$ ein primäres Ideal, aber π keine Primärzahl desselben ist. Da die Anzahl der ambigen Komplexe sicher nicht größer als l sein kann, weil nur zwei verschiedene Primfaktoren in der Relativdiskriminante von K aufgehen, so ist nur zu zeigen, daß in dem angegebenen Falle die Anzahl der ambigen Komplexe nicht gleich 1 ist. Wir definieren zu diesem Zweck den Begriff des Hauptgeschlechts in K, indem wir alle diejenigen Ideale $\mathfrak{J}$ aus K als zum Hauptgeschlecht gehörig betrachten, für die

$$\left(\frac{i}{\mathfrak{p}}\right) = 1, \text{ wenn } i = j^{hh'} \text{ und } j = N_k(\mathfrak{J}) \text{ ist.}$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß nicht alle Komplexe in K zum Hauptgeschlecht gehören. Denn setzt man

$$\pi = \varepsilon\pi^*,$$

wo π^* primär sein soll, und bestimmt dann ein Primideal $\mathfrak{r}$ in k so, daß

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right) = 1, \quad \left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{r}}\right) \neq 1,$$

so wird $\mathfrak{r}$ in K zerlegbar und ein Primfaktor $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{r}$ bestimmt einen Komplex, der nicht zum Hauptgeschlecht gehört, weil

$$\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1, \quad \text{wenn} \quad (\varrho) = \mathfrak{r}^{hh'}.$$

Es sei nun f die Anzahl aller Komplexe des Hauptgeschlechts in K und f' die Anzahl derjenigen unter ihnen, die symbolische $(1-S)^{\text{te}}$ Potenzen von Komplexen sind. Wir erkennen dann genau wie früher (vergl. Satz 14) die Richtigkeit der Gleichung:

$$Af' = lf$$

aus der $A = l$, $f = f'$, $a = 1$, $v = m'$ folgt, d. h. es gibt l ambige Komplexe in K, jeder Komplex des Hauptgeschlechtes ist $(1-S)^{\text{te}}$ Potenz eines Komplexes und jede Einheit in k ist Relativnorm einer Zahl aus K.

Wegen $\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ gehört nun jeder Primfaktor $\mathfrak{Q}$ in K, der in $\mathfrak{q}$ aufgeht, zum Hauptgeschlecht, woraus:

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{J}^{(1-S)} \cdot \mathsf{A} \cdot j$$

folgt, wenn $\mathfrak{J}$ ein Ideal, A eine Zahl aus K und j ein Ideal aus k bedeutet. Für $\mathfrak{q}$ gilt folglich:

$$\mathfrak{q} = j^l \cdot N_k(\mathsf{A})$$

und hieraus ergibt sich sofort unter Beachtung der Gleichung $v = m'$, daß $\varkappa$ gleich der Relativnorm einer Zahl in K ist, deren Nenner offenbar wieder zu $\mathfrak{l}_1$ prim gewählt werden kann, weil $\mathfrak{l}_1$ in K in l gleiche Primfaktoren zerfällt. $\varkappa$ ist daher auch in diesem zweiten Falle Normenrest von $K(\sqrt[l]{\lambda_1^a \pi}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$, und unser Satz hiermit vollständig bewiesen.

§ 17.

Das Produkt $\prod\limits_{(\mathfrak{w})}\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)$ und das allgemeine Reziprozitätsgesetz nebst seinen beiden Ergänzungssätzen.

Wir können nunmehr zum Abschluß unserer Entwickelungen gelangen, indem wir einen Satz beweisen, der alle bisherigen Resultate in eine einzige Formel von hervorragender Einfachheit zusammendrängt:

Satz 47. *Sind μ, ν zwei beliebige ganze Zahlen aus k, so ist*

$$\prod_{(\mathfrak{w})}\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)=1,$$

wenn das Produkt $\prod$ über alle Primideale in k erstreckt wird.

Beweis: Ich nehme *erstens* an, daß μ zu $\mathfrak{l}$ prim und ν eine beliebige Zahl aus k ist. Bestimmt man dann z ganze Zahlen $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_z$ in k, die den Kongruenzen genügen:

$$\begin{array}{llll} \mu_1\equiv\mu, & \mu_2\equiv 1, & \cdots & \mu_z\equiv 1\,(\mathfrak{l}_1^{l l_1+1}), \\ \mu_1\equiv 1, & \mu_2\equiv\mu, & \cdots & \mu_z\equiv 1\,(\mathfrak{l}_2^{l l_2+1}), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \mu_1\equiv 1, & \mu_2\equiv 1, & \cdots & \mu_z\equiv\mu\,(\mathfrak{l}_z^{l l_z+1}), \end{array}$$

so wird $\mu(\mu_1\mu_2\cdots\mu_z)^{l-1}$ eine hyperprimäre Zahl in k und es gilt folglich:

$$1=\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu,\,\mu(\mu_1\mu_2\cdots\mu_z)^{l-1}}{\mathfrak{w}}\right)$$

$$=\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)\cdot\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu,\mu_1}{\mathfrak{w}}\right)^{-1}\cdot\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu,\mu_2}{\mathfrak{w}}\right)^{-1}\cdots\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu,\mu_z}{\mathfrak{w}}\right)^{-1}$$

$$=\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)\cdot\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\cdot\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{l}_2}\right)\cdots\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{l}_z}\right)=\prod_{(\mathfrak{w})}\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right).$$

Bedeuten *zweitens* $\mathfrak{l}_i$ und $\mathfrak{l}_k$ zwei Primfaktoren von $\mathfrak{l}$ und setzt man $\mathfrak{l}_i^{hh'}=(\lambda_i)$, $\mathfrak{l}_k^{hh'}=(\lambda_k)$, so wollen wir zeigen, daß

$$\prod_{(\mathfrak{w})}\left(\frac{\lambda_i,\lambda_k}{\mathfrak{w}}\right)=1.$$

Ist $i=k$, so folgt die Richtigkeit der letzten Gleichung aus Satz 5 und Satz 45. Ist $i\neq k$, so bestimme man eine ganze Zahl μ' aus k so, daß

$$\lambda_k\mu'\equiv 1\,(\mathfrak{l}_j^{l l_j+1})\qquad j=1,2,\cdots z+k.$$

Es ist dann, da nach Def. 13 $\left(\frac{\lambda_i,\lambda_k\mu'}{\mathfrak{l}_j}\right)=1$ ist:

$$\prod_{(\mathfrak{w})}\left(\frac{\lambda_i,\lambda_k\mu'}{\mathfrak{w}}\right) = \left(\frac{\lambda_i}{\mu'}\right)\cdot\left(\frac{\lambda_i,\lambda_k\mu'}{\mathfrak{l}_k}\right) = \left(\frac{\lambda_i}{\mu'}\right)\cdot{\prod_{(\mathfrak{w})}}'\left(\frac{\lambda_i,\lambda_k\mu'}{\mathfrak{w}}\right)^{-1} = \left(\frac{\lambda_i}{\mu'}\right)\cdot\left(\frac{\lambda_i}{\mu'}\right)^{-1} = 1.$$

Folglich ist auch:

$$\prod_{(\mathfrak{w})}\left(\frac{\lambda_i,\lambda_k}{\mathfrak{w}}\right) = 1.$$

Aus dem Bewiesenen ergibt sich leicht die vollständige Richtigkeit unseres Satzes.

Als spezielle Fälle von Satz 47 führen wir noch die folgenden an:

Satz 48. *Das allgemeine Reziprozitätsgesetz für l^{te} Potenzreste im Körper k.*

Es seien $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \cdots \mathfrak{l}_z$ die in $\mathfrak{l} = (1-\zeta)$ aufgehenden Primideale des Körpers k; ferner seien $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ zwei zu $\mathfrak{l}$ prime Primideale und π, $\varkappa$ zwei ganze Zahlen in k, sodaß:

$$(\pi) = \mathfrak{p}^{hh'}, \quad (\varkappa) = \mathfrak{q}^{hh'}$$

ist. Es gilt dann die Gleichung:

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right)^{-1} = \left(\frac{\pi,\varkappa}{\mathfrak{l}_1}\right)\cdot\left(\frac{\pi,\varkappa}{\mathfrak{l}_2}\right)\cdots\left(\frac{\pi,\varkappa}{\mathfrak{l}_z}\right).$$

Satz 49. *Der erste Ergänzungssatz zum allgemeinen Reziprozitätsgesetz.*

Ist ε eine beliebige Einheit aus k und werden im übrigen die Bezeichnungen des vorigen Satzes beibehalten, so gilt:

$$\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{p}}\right)^{-1} = \left(\frac{\varepsilon,\pi}{\mathfrak{l}_1}\right)\cdot\left(\frac{\varepsilon,\pi}{\mathfrak{l}_2}\right)\cdots\left(\frac{\varepsilon,\pi}{\mathfrak{l}_z}\right).$$

Satz 50. *Der zweite Ergänzungssatz zum allgemeinen Reziprozitätsgesetz.*

Setzt man

$$\mathfrak{l}_i^{hh'} = (\lambda_i),$$

wo $\mathfrak{l}_i$ einen beliebigen Primfaktor von $\mathfrak{l}$ bedeutet und behält sonst die Bezeichnungen von Satz 48 bei, so gilt:

$$\left(\frac{\lambda_i}{\mathfrak{p}}\right)^{-1} = \left(\frac{\lambda_i,\pi}{\mathfrak{l}_1}\right)\cdot\left(\frac{\lambda_i,\pi}{\mathfrak{l}_2}\right)\cdots\left(\frac{\lambda_i,\pi}{\mathfrak{l}_z}\right).$$

Zum Schluß führen wir noch an, daß sich folgende Verallgemeinerungen früherer Sätze, die in speziellen Fällen bereits als richtig erkannt sind, leicht ausführen lassen:

1) Ausdehnung von Satz 9 auf die in $\mathfrak{l}$ aufgehenden Primideale,

2) Nachweis, daß in jedem Oberkörper $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ l^{r-1} Geschlechter mit dem Charakterenprodukt 1 existieren (vergl. Satz 33),

3) Nachweis, daß jeder Komplex, der dem Hauptgeschlecht in K angehört, symbolische $(1-S)^{\text{te}}$ Potenz eines Komplexes in K ist (vergl. Beweis zu Satz 46),

4) Beweis, daß eine beliebige Zahl ν aus k mit der Eigenschaft:

$$\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)=1,$$

wo $\mathfrak{w}$ irgend ein Primideal aus k bedeutet, stets die Relativnorm einer Zahl aus $K(\sqrt[l]{\mu},k)$ ist (vergl. Beweis zu Satz 46).

Bezüglich der Beweise für diese Verallgemeinerungen verweise ich auf D. Hilbert, *Rel. quadr. Zahlk.* § 40—43.

Schluß.

Kurze Angabe der gewonnenen Resultate.

Ist k ein beliebiger Oberkörper des Kreiskörpers $k(\zeta)$ der l^{ten} Einheitswurzeln und ist die Klassenzahl von k nicht durch l teilbar, so gelten in k die folgenden beiden Sätze:

1) *Ist h die Klassenzahl von k und $hh'\equiv 1\,(l)$; setzt man ferner $\mathfrak{p}^{hh'}=(\pi)$, wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal und π eine ganze Zahl aus k bedeutet, so ist $\mathfrak{p}$ stets ein primäres Ideal, wenn π eine primäre Zahl ist und es läßt sich π stets als primäre Zahl wählen, wenn $\mathfrak{p}$ ein primäres Ideal ist.*

2) *Ist $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal und $\mathfrak{r}$ ein beliebiges Primideal aus k und setzt man $\mathfrak{p}^{hh'}=(\pi)$, $\mathfrak{r}^{hh'}=(\varrho)$, wo π eine primäre Zahl aus k bedeutet, so ist stets dann und nur dann π l^{ter} Potenzrest von $\mathfrak{r}$, wenn ϱ l^{ter} Potenzrest von $\mathfrak{p}$ ist.*

Mit Benutzung des Restsymbols läßt sich der letzte Satz in die Formel fassen:

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)=\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)^n \qquad n\not\equiv 0\,(l).$$

Die angeführten Sätze sind im ersten Teil dieser Arbeit vollständig bewiesen.

Der Nachweis, daß in der vorstehenden Formel $n=1$ sein muß, ist nicht allgemein erbracht, sondern nur unter der weiteren Annahme, daß der Oberkörper k in Bezug auf $k(\zeta)$, dessen Klassenzahl jetzt ebenfalls als zu $\mathfrak{l}$ prim vorausgesetzt wird, ein relativ Galoisscher ist und daß sein Relativgrad entweder zu l prim oder genau durch die erste Potenz von l teilbar ist. Damit ist die Gültigkeit des Reziprozitätsgesetzes zwischen einem beliebigen und einem primären Primideal in etwas weiterem Umfange erwiesen als in meiner früheren in den Abhandlungen der

Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften (Neue Folge Bd. II, Nr. 3) schienenen Arbeit. Es sei noch erwähnt, daß ich in der genannten Arbeit noch für gewisse Unterkörper von k die Gültigkeit des angeführten Reziprozitätsgesetzes bewiesen habe; ich bin hier auf diese Beweise nicht eingegangen, weil ich später die Ausdehnung der gewonnenen Resultate in allgemeinerer Weise vorzunehmen hoffe.

Im dritten Teile der vorliegenden Arbeit wird über die betrachteten Oberkörper von $k(\zeta)$ die Annahme gemacht, daß ihre Klassenzahl nicht durch l teilbar ist und daß das Reziprozitätsgesetz:

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right) = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)$$

in ihnen gilt. Es wird gezeigt, daß unter diesen Annahmen die oben genannten Sätze 1) und 2) sich auf beliebige primäre Ideale verallgemeinern lassen und daß entsprechende Sätze auch für die hyperprimären Ideale gelten. Endlich wird nachgewiesen, daß in den betrachteten Körpern auch das allgemeine Reziprozitätsgesetz mit seinen beiden Ergänzungssätzen Gültigkeit hat, daß also die allgemeine Formel:

$$\prod_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\mu,\, \nu}{\mathfrak{w}}\right) = 1,$$

in die sich alle die genannten Gesetze zusammendrängen lassen, in diesen Körpern zu Recht besteht.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 1

I.

§ 1. Definitionen und vorbereitende Sätze 2

§ 2. Die Zerlegung der Primideale aus k in den relativ cyklischen Oberkörpern K vom Relativgrade l 4

§ 3. Normenreste und das Normenrestsymbol 7

§ 4. Die ambigen Komplexe und die Geschlechter im Körper K 11

§ 5. Einige Sätze über spezielle unendliche Reihen 15

§ 6. Das primäre Primideal 17

§ 7. Das Reziprozitätsgesetz zwischen einem primären und einem beliebigen Primideal in beschränkter Fassung 20

II.

§ 8. Das Reziprozitätsgesetz zwischen einem beliebigen und einem primären Primideal im Kreiskörper der l^{ten} Einheitswurzeln 21

§ 9. Beziehungen zwischen den Potenzrestsymbolen verschiedener algebraischer Zahlkörper 23

§ 10. Das Reziprozitätsgesetz zwischen einem beliebigen und einem primären Primideal in gewissen relativ Galoisschen Körpern 26

III.

Seite

§ 11. Die Existenz von l^{r-1} Geschlechtern mit dem Charakterenprodukt 1 in solchen relativ cyklischen Körpern K, deren Relativdiskriminante zu $\mathfrak{l}$ prim ist 31

§ 12. Das primäre Ideal 32

§ 13. Die hyperprimären Ideale und Zahlen 34

§ 14. Das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_i}\right)$ 37

§ 15. Zwei Hülfssätze über die Normenreste nach $\mathfrak{l}_i$ 38

§ 16. Die Normenreste nach $\mathfrak{l}_i$ und das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_i}\right)$ 39

§ 17. Das Produkt $\prod\limits_{(\mathfrak{w})}\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)$ und das allgemeine Reziprozitätsgesetz mit seinen beiden Ergänzungssätzen 46

Schluß. Kurze Angabe der gewonnenen Resultate 48

Untersuchungen über Fouriersche Reihen.

Von

Leopold Fejér aus Budapest.

Einleitung.

Es sei $f(x)$ eine reelle Funktion der reellen Variabelen x mit der Periode 2π, welche überall stetig ist. Bekanntlich glaubte Dirichlet und wahrscheinlich auch noch Riemann, daß die zu $f(x)$ gehörige Fouriersche Reihe

$$(1') \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n(\alpha - x)\,d\alpha\right]$$

überall konvergent sei. Du Bois-Reymond zeigte, daß dies nicht der Fall ist, indem er eine überall stetige Funktion konstruierte, deren Fouriersche Reihe an überall dicht liegenden Stellen divergiert. Es bleibe nun dahingestellt, ob es stetige Funktionen gibt, deren Fouriersche Reihe für jedes x divergiert*) — jedenfalls können wir sagen: aus der bloßen Stetigkeit der Funktion an einer Stelle x folgt die Konvergenz der Fourierschen Reihe an dieser Stelle noch nicht. Es müssen vielmehr noch für den Modus der Stetigkeit — wenn uns dieser Ausdruck gestattet ist — gewisse Beschränkungen hinzugezogen werden**), damit die Konvergenz der Reihe gesichert ist.

Indem wir aber die in der Literatur etwas zu ausführlich behandelte Frage nach den hinreichenden Bedingungen für die Konvergenz der Fourierschen Reihe fallen lassen — wenden wir uns zur Fourierschen Reihe mit einer Fragestellung, die der Borel-Mittag-Lefflerschen in Bezug auf die Potenzreihe komplexen Argumentes vollkommen entspricht und folgendermaßen lautet:

*) Wie es z. B. stetige Funktionen gibt, die an keiner Stelle einen Differentialquotienten haben.

**) Wir denken an die bekannten Beschränkungen von Dirichlet, Lipschitz, Jordan u. s. w.

Ist es möglich aus der zur stetigen Funktion $f(x)$ gehörigen Fourierschen Reihe, b. w. aus der mit ihr äquivalenten Funktionsfolge

(1) $$s_0(x),\ s_1(x),\ \cdots,\ s_n(x),\ \cdots$$

wo

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \sum_{\nu=1}^{n}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos\nu(\alpha-x)\,d\alpha\right\},$$

eine andere Funktionsfolge abzuleiten, welche aber für ein beliebiges x konvergiert, und zwar zu $f(x)$ als Grenzfunktion? Dies ist in der Tat möglich. Man gehe einfach von der Folge (1) zur Folge der arithmetischen Mittel über

(2) $$s_0(x),\ \frac{s_0(x)+s_1(x)}{2},\ \ldots,\ \frac{s_0(x)+\cdots+s_{n-1}(x)}{n},\ \ldots$$

so besitzt diese neue Funktionsfolge, welche ebenso aus endlichen trigonometrischen Reihen besteht wie die Folge (1), die verlangte Eigenschaft. Es zeigt sich auch, daß die Folge (2) in jedem Intervalle gleichmäßig zu $f(x)$ konvergiert, während die Folge (1) — wenn sie auch für jedes x konvergiert — nicht gleichmäßig zu konvergieren braucht.

Wenn weiter die — noch immer stetige — Funktion $f(x)$ an einer Stelle a des Intervalles $(0, 2\pi)$ integrabel unendlich wird, so ist die Folge der Partialsummen (1) im allgemeinen wieder divergent*). Es müssen auch hier gewisse — den Modus der Integrirbarkeit an der Stelle a beschränkende Bedingungen hinzugezogen werden**), damit die Konvergenz der Folge (1) an einer Stelle x $(x \gtrless a)$ gesichert ist. Es zeigt sich, daß die Konvergenz der Folge (2) durch das Auftreten einer Stelle a, wo $f(x)$ beliebig integrabel unendlich wird, ungestört bleibt.

Nehmen wir weiter eine Funktion $f(x)$, die an einer Stelle a eine Unstetigkeit erster Art besitzt und sonst z. B. beliebig oft differenzierbar ist. Bekanntlich ist dann die aus der Fourierschen Reihe von $f(x)$ durch gliedweise Differentiation gewonnene trigonometrische Reihe für jedes x divergent. Wenn wir aber für diese Reihe die betreffenden arithmetischen Mittel bilden, so erweisen sich diese als konvergent und geben als Grenzfunktion die Ableitung $f'(x)$.

Indem wir die Aufzählung der Sätze unterbrechen, erwähnen wir bloß daß sie viele Anwendungen gestatten, welche sich auf die Theorie der konvergenten Fourierschen Reihen und mit ihr zusammenhängenden Fragen beziehen.

---

*) Auch wenn z. B. $f(x)$ in den Intervallen $(0, a-\varepsilon)$ und $(a+\varepsilon, 2\pi)$ — $\varepsilon > 0$ — den einfachen Dirichletschen Bedingungen genügt.

**) Wir denken an die Bedingungen von Dirichlet, Du Bois Reymond, Harnack usw.

Unsere Untersuchungen lassen überhaupt die Theorie der konvergenten Fourierschen Reihe in neuem Lichte erscheinen — wie denn überhaupt das Studium der Divergenz einer Funktionenreihe ein tieferes Eindringen in die Natur der Reihe gestattet, eine Tatsache die schon allein der Theorie der divergenten Reihen eine Existenzberechtigung gibt*).

Inhaltsverzeichnis:

§ 1. Ausführung der in der Einleitung schon größtenteils angedeuteten Untersuchungen.

§ 2. Hülfsatz.

§ 3. Anwendungen.

§ 1.

Konvergenz der arithmetischen Mittel der Fourierschen Partialsummen.

Es sei $f(x)$ eine Funktion deren absoluter Betrag im Intervalle von 0 bis 2π eine endliche obere Grenze besitzt. Eine weitere, von der Natur der Sache geforderte Beschränkung sei die, daß sie integrabel ist. Wenn nun x eine Stelle bezeichnet, wo $f(x)$ entweder stetig ist, oder eine Diskontinuität von der ersten Art besitzt, so soll bewiesen werden, daß *die unter* (2) *stehende Folge der arithmetischen Mittel konvergiert,* und zwar *zu* $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$ *als Grenzwert.*

Wir schicken voraus, daß die Reihe

$$\frac{1}{2}+\cos\vartheta+\cos 2\vartheta+\cdots+\cos(n-1)\vartheta+\cdots$$

selbst zu den divergenten Reihen der betrachteten einfachen Natur gehört. Es ist nämlich

$$\sigma_{n-1}=\frac{1}{2}+\cos\vartheta+\cdots+\cos(n-1)\vartheta=\frac{1}{2}\,\frac{\cos(n-1)\vartheta-\cos n\vartheta}{1-\cos\vartheta}$$

folglich

$$\frac{\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-1}}{n}=\frac{1}{2n}\,\frac{1-\cos n\vartheta}{1-\cos\vartheta}=\frac{1}{2n}\left(\frac{\sin\frac{n\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\right)^2. \tag{3}$$

Wenn also $\vartheta \gtrless 2k\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots)$, so ist

$$\lim\frac{\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-1}}{n}=0 \tag{3'}$$

*) Diese Arbeit ist — von einigen Modifikationen abgesehen — in der ungarischen Zeitschrift: „Mathematikai és Physikai Lapok" (1902) erschienen; kurze Notizen über denselben Gegenstand sind in den Comptes Rendus (1900, 10 décembre und 1902, 7 avril) publiziert.

und es existiert also ein ganz bestimmter Grenzwert. — Wenn wir nun der Kürze halber

$$\frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_{n-1}(x)}{n} = S_n(x)$$

setzen, so erhalten wir mit Berücksichtigung der Formel (3)

$$S_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\left(\frac{\sin n\frac{\alpha - x}{2}}{\sin\frac{\alpha - x}{2}}\right)^2 d\alpha$$

oder mit Benützung einer Integrationsvariabeln

$$\beta = \frac{\alpha - x}{2}$$

$$S_n(x) = \frac{1}{n\pi}\int_{-\frac{x}{2}}^{\pi - \frac{x}{2}} f(x + 2\beta)\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta. \tag{4}$$

Während man also in der Theorie der konvergenten Fourierschen Reihen den Grenzwert des Dirichletschen Integrals

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{x}{2}}^{\pi - \frac{x}{2}} f(x + 2\beta)\frac{\sin(2n-1)\beta}{\sin\beta}\, d\beta$$

untersucht, so haben wir hier den Grenzwert des Integrals $S_n(x)$ unter (4) zu bestimmen. Von diesen beiden Integralen hat $S_n(x)$ den einfacheren Charakter. Während nämlich im Dirichletschen Integrale neben f der Faktor $\frac{\sin(2n-1)\beta}{\sin\beta}$ steht — bei dem die Anzahl der Zeichenwechsel mit n unbegrenzt wächst — tritt im Integrale $S_n(x)$ neben f der niemals negative Faktor $\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2$ auf. Diesem Umstande ist es zu verdanken, daß man bei der Bestimmung des Grenzwertes $\lim\limits_{n=\infty} S_n(x)$ im wesentlichen mit dem ersten Integralmittelwertsatze auskommen kann, während die Grenzwertbestimmung $\lim\limits_{n=\infty} s_n(x)$ die Anwendung des tiefer liegenden zweiten benötigt.

Nehmen wir an daß $0 < x < 2\pi$. Es genügt offenbar den Grenz wert des Integrals

$$J_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{a} \varphi(\beta)\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta \tag{5}$$

zu untersuchen, wo $\varphi(\beta)$ eine an der Stelle 0 von rechts stetige Funktion bedeutet und $0 < a < \pi$.

Nach Voraussetzung läßt sich zu einer beliebigen positiven Größe δ eine Größe ε bestimmen, so daß

$$|\varphi(h) - \varphi(+0)| < \delta$$

wenn

$$0 < h \leqq \varepsilon \leqq \pi - a.$$

Dann zerlegen wir in üblicher Weise

$$J_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^\varepsilon \varphi(\beta)\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta + \frac{1}{n\pi}\int_\varepsilon^a \varphi(\beta)\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta$$

$$= \quad i_n \quad + \quad i_n'$$

Besteht nun

$$|\varphi(\beta)| < M$$

wenn

$$0 \leqq \beta \leqq a,$$

so ist

$$|i_n'| < \frac{M}{n\sin^2\varepsilon}$$

und mit Benützung des ersten Integralmittelwertsatzes:

$$i_n = (\varphi(+0) + \eta)\,\frac{1}{n\pi}\int_0^\varepsilon \left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta,$$

wo

$$|\eta| < \delta.$$

Nun hat man weiter

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^\varepsilon \left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta = \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta - \frac{1}{n\pi}\int_\varepsilon^\pi \left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta$$

$$= \quad j_n \quad - \quad j_n'$$

Hier ist

$$|j_n'| < \frac{1}{n\sin^2\varepsilon}$$

und infolge der Identität (3)

$$j_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta = \frac{1}{2}\cdot$$

Folglich erhält man

$$J_n = (\varphi(+0) + \eta)\left(\frac{1}{2} - j_n'\right) + i_n'$$

und also

$$\left|J_n - \frac{\varphi(+0)}{2}\right| < \delta,$$

wenn nur n gehörig groß ist.

Wir können damit den Satz

$$\lim_{n=\infty} S_n(x) = \frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$$

als allgemein bewiesen betrachten, da im Falle $x = 0$ die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} S_n(0) = \frac{1}{2}\{f(+0) + f(2\pi-0)\}$$

sich in analoger Weise leicht ergibt*). —

Wir lassen nun die Beschränkung der Endlichkeit der Funktion $f(x)$ fallen und behandeln auch den Fall, wo sie unendlich wird, da wir glauben, daß dieser auch einiges Interesse darbietet. — Wir nehmen an, daß $f(x)$ *an einer endlichen Anzahl von Stellen des Intervalles* $(0, 2\pi)$ *unendlich wird, unterwerfen sie aber außer der Integrierbarkeit* — die doch immer durch die Natur der Fragestellung gefordert ist — *keiner weitern Beschränkung.* Während das Auftreten solcher Unendlichkeitsstellen die Konvergenz der Fourierschen Reihe für ein *beliebiges* x zerstören kann**), *bleiben die arithmetischen Mittel* $S_n(x)$ — und das soll eben jetzt bewiesen werden — *konvergent, so daß also wieder*

$$\lim. S_n(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$$

ist, an jeder Stelle x, wo $f(x+0)$, $f(x-0)$ beide existieren.

Das hängt mit folgendem Satze zusammen:

Ist $f(x)$ *in einem Intervalle* (a, b) *integrabel und mit Ausnahme einer einzigen Stelle* c *des Intervalles endlich, so ist****)

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n}\int_a^b f(\alpha) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (n\alpha)\, d\alpha = 0.$$

---

*) Auch im Falle daß die Funktion sich an der Stelle x beliebig verhält, läßt sich über das Schwanken der $S_n(x)$ etwas aussagen. Ist nämlich $M(x)$ die Größte, $m(x)$ die Kleinste unter den vier Unbestimmtheitsgrenzen der Funktion $f(x)$ an der Stelle x, so ist

$$m(x) \leqq \lim_{n=\infty} \inf. S_n(x) \leqq \lim_{n=\infty} \sup. S_n(x) \leqq M(x).$$

Etwas Analoges findet bei den Fourierschen $s_n(x)$ nicht statt.

**) Riemann: Habilitationsschrift. Ges. Werke S. 246.

***) Dieser Satz ist die Verallgemeinerung eines bekannten Riemannschen Satzes, nach welchem schon $\lim_{n=\infty} \int_a^b f(\alpha) \sin n\alpha\, d\alpha = 0$ ist, wenn $f(\alpha)$ im Intervalle (a, b) eine endliche obere Grenze besitzt. Ist dies nicht der Fall, so kann das Integral mit wachsendem n beliebig groß werden. (Riemann: Habilitationsschrift. Ges. Werke S. 246).

Es genügt offenbar zu zeigen, daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \int_a^c f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha = 0$$

ist. Nach Voraussetzung können wir zu einem beliebigen positiven δ eine positive Größe ε finden, so daß

(6) $$\left| \int_\sigma^\tau f(\alpha)\, d\alpha \right| < \delta,$$

wenn

$$c - \varepsilon \leqq \sigma \leqq \tau < c.$$

Wir zerlegen dann:

$$\frac{1}{n} \int_a^{c-\varepsilon} f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha + \frac{1}{n} \int_{c-\varepsilon}^c f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha$$

$$= \qquad i_n \qquad + \qquad i_n'$$

Ist nun

$$|f(x)| < \mathsf{M}$$

wenn

$$a \leqq x \leqq c - \varepsilon,$$

so besteht:

$$|i_n| < \frac{\mathsf{M}(c-a)}{n}.$$

Um i_n' abzuschätzen, bezeichnen wir nacheinander mit

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu$$

jene ungeraden Multipla von $\frac{\pi}{2n}$, welche in das Innere des Intervalles von $(c - \varepsilon)$ bis c fallen, und zerlegen dieser Einteilung gemäß

$$n i_n' = \int_{c-\varepsilon}^{\alpha_1} + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} + \cdots + \int_{\alpha_{\nu-1}}^{\alpha_\nu} + \int_{\alpha_\nu}^{c},$$

wo als gemeinsamer Integrand $f(\alpha) \sin n\alpha$ zu denken ist. Jedes dieser Teilintegrale hat einen absoluten Betrag der kleiner ist als 2δ. Denn es ist z. B.

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha = \sin n\alpha_1 \int_{\alpha_1}^{\xi} f(\alpha)\, d\alpha + \sin n\alpha_2 \int_{\xi}^{\alpha_2} f(\alpha)\, d\alpha,$$

$$\alpha_1 < \xi < \alpha_2$$

infolge des zweiten Integralmittelwertsatzes, woraus die Behauptung schon

folgt, wenn wir die Ungleichung (6) in Betracht nehmen*). Wir erhalten daher

$$n|i_n'| < (\nu+1)\,2\,\delta,$$

wo ν zwar mit n ins Unendliche wächst aber dennoch immer die Ungleichung

$$(\nu+1)\,\frac{\pi}{n} \leqq c-(c-\varepsilon)=\varepsilon$$

besteht. Folglich ist

$$|i_n'| < \frac{2\varepsilon}{\pi}\,\delta$$

und

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_a^c f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha\right| < \frac{M(c-a)}{n} + \frac{2\varepsilon}{\pi}\,\delta$$

und

$$< \frac{4\varepsilon}{\pi}\,\delta$$

wenn n gehörig groß ist.

Damit ist aber der Hilfsatz schon bewiesen.

Ganz ähnlich kann man zeigen — und das ist eigentlich der Satz, den wir sogleich gebrauchen werden — daß *unter den nämlichen Voraussetzungen auch*

$$\lim.\ \frac{1}{n}\int\limits_a^b f(\alpha)\sin^2 n\alpha\,d\alpha = 0$$

ist. —

Betrachten wir nun wieder das Integral (5) aber unter der Annahme, daß $\varphi(\beta)$ *an einer Stelle c des Intervalles beliebig integrabel unendlich wird.* Wenn wir zeigen können daß

$$\lim_{n=\infty}\ \frac{1}{n\pi}\int\limits_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(\beta)}{\sin^2\beta}\sin^2 n\beta\,d\beta = 0, \tag{7}$$

wo

$$0<\varepsilon<c<a<\pi,$$

so können alle übrigen Schlußfolgerungen beibehalten werden. Die unter (7) ausgesprochene Behauptung ist aber eine direkte Folge des eben bewiesenen Hilfsatzes, so daß wir also zusammenfassend sagen können:

---

*) Der letzte Teil $\int\limits_{\alpha_\nu}^{c}$ bietet wegen

$$\int\limits_{\alpha_\nu}^{c} = \lim_{\varrho=0}\int\limits_{\alpha_\nu}^{c-\varrho}$$

keine besondere Schwierigkeit.

Hauptsatz: *Ist $f(x)$ eine im Intervalle von 0 bis 2π integrable Funktion, die nur an einer endlichen Anzahl von Stellen dieses Intervalles unendlich wird, so konvergiert die Folge der arithmetischen Mittel $S_n(x)$ an jeder Stelle x, wo $f(x)$ stetig ist, oder eine Diskontinuität von der ersten Art besitzt, und zwar zu $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ als Grenzwert.*

Um für $f(x)$ eine an den in Betracht kommenden Stellen *konvergente Reihenentwickelung* zu bekommen, bilden wir, in üblicher Weise:

$$S_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(S_n - S_{n-1}). \tag{8}$$

Eine kleine Rechnung zeigt, daß

$$S_n - S_{n-1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,\frac{\cos(\alpha-x)+2\cos 2(\alpha-x)+\cdots+(n-1)\cos(n-1)(\alpha-x)}{n(n-1)}\,d\alpha.$$

Wenn wir daher die Funktionen

$$c_n(\xi) = \frac{\cos\xi + 2\cos 2\xi + \cdots + (n-1)\cos(n-1)\xi}{n(n-1)},$$

$$(n = 2, 3, \cdots, \infty)$$

einführen, so erhält die Reihe (8) die Form

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,c_n(\alpha-x)\,d\alpha\right\} \tag{2'}$$

eine zur Fourierschen vollkommen ähnliche Reihenentwickelung. Dabei entspricht die Funktion $c_n(\xi)$ in der Entwickelung (2') der Funktion $\cos n\xi$ in der Fourierschen Entwickelung (1'). Die Funktionen $c_n(\xi)$ und $\cos n\xi$ haben in der Tat wichtige Eigenschaften gemeinsam. $c_n(\xi)$ ist nach 2π periodisch, bleibt dem absoluten Betrage nach < 1 für jedes reelle ξ, hat eine ähnliche Wurzelverteilung wie $\cos n\xi$, und auch ihre Potenzreihenentwickelungen können in einfache Beziehung gesetzt werden. Während nämlich

$$\cos n\xi = 1 - \frac{n^2}{2!}\xi^2 + \frac{n^4}{4!}\xi^4 - \cdots$$

ist, so erhält man

$$c_n(\xi) = 1 - \frac{\psi_2(n)}{2!}\xi^2 + \frac{\psi_4(n)}{4!}\xi^4 + \cdots.$$

Hier ist

$$\psi_{2k} = \frac{\varphi_{2k+1}(n)}{n(n-1)},$$

wo $\varphi_{2k+1}(n)$ das $(2k+1)^{te}$ Bernoullische Polynom bedeutet. $\psi_{2k}(n)$ ist also eine ganze rationale Funktion $2k^{ten}$ Grades in n, welche der Potenz n^{2k} in der Entwickelung von $\cos n\xi$ entspricht.

Ist $f(x)$ überall stetig, so konvergiert die Folge (2) der $S_n(x)$ (oder die Reihe (2')) überall, und zwar gleichmäßig. Genauer formuliert:

Zusatz zum Hauptsatze: *Ist die den Bedingungen des Hauptsatzes genügende Funktion $f(x)$ in einem Intervalle (b, c) $(0 \leqq b < c \leqq 2\pi)$ ausnahmslos stetig, so konvergieren die $S_n(x)$ in jedem Intervalle (b_1, c_1) $(b < b_1 < c_1 < c)$ gleichmäßig zur Grenzfunktion $f(x)$.*

Unsere Beweisführungen lassen dies sofort erkennen, wenn man noch die Tatsache hinzunimmt, daß die Stetigkeit einer Funktion in einem Intervalle ihre gleichmäßige Stetigkeit nach sich zieht.

Es ist überhaupt bemerkenswert, wie die Approximationskurven $S_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ sich so zu sagen von Beginn an der beliebigen integrablen aber endlichen Funktion anpassen. Es ist nämlich

$$S_n(x) = \frac{1}{n\pi}\int_{-\frac{x}{2}}^{\pi-\frac{x}{2}} f(x+2\beta)\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

Sind nun M und m die Weierstraßsche obere resp. untere Grenze der Funktion $f(x)$ für das Intervall $(0, 2\pi)$, so ergibt sich, da doch

$$\frac{1}{n\pi}\int_{-\frac{x}{2}}^{\pi-\frac{x}{2}} \left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta = 1$$

die Ungleichheit

$$m \leqq S_n(x) \leqq M$$

für

$$0 \leqq x \leqq 2\pi \quad \text{und} \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

d. h. *keine der Approximationsfunktionen $S_n(x)$ nimmt einen größeren Wert an als $f(x)$, und keine einen kleinern Wert als $f(x)$* — eine Eigenschaft die den Fourierschen $s_n(x)$ auch schon bei sehr einfachen $f(x)$ nicht zukommt. Hingegen bleibt jene Eigenschaft der Fourierschen Annäherungskurven, daß je zwei, $s_k(x)$ und $s_l(x)$ sich unbedingt schneiden und daß jede von ihnen die (stetige) Grenzkurve $f(x)$ schneidet — auch für die Kurven $S_n(x)$ erhalten, denn es ist*)

$$\int_0^{2\pi} (S_k(x) - S_l(x))\,dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} S_k(x) - f(x)\,dx = 0$$

für

$$k, l = 1, 2, 3, \cdots.$$

*) Figuren zur Illustration der Annäherungsart der $s_n(x)$ findet man z. B. in dem Buche von Byerly: An elementary treatise on Fourier's series, p. 63, 64.

Im folgenden wollen wir zeigen, daß die Betrachtung der arithmetischen Mittel auch bei einer andern wichtigen Frage der Theorie der Fourierschen Reihen von Nutzen ist.

Nehmen wir die Funktion $\frac{\pi - x}{2}$. Ihre — für das Intervall $(0, 2\pi)$ bezügliche Fouriersche Entwickelung lautet:

$$(9) \qquad \frac{\pi - x}{2} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots.$$

Die Funktion hat den Differentialquotienten $-\frac{1}{2}$, während die gliedweise Differentiation die total divergente trigonometrische Reihe

$$(10) \qquad \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots$$

liefert*). Wir sahen aber schon daß die arithmetischen Mittel der Reihe (10) wirklich konvergieren, und zwar zu $-\frac{1}{2}$ als Grenzwert**).

Diese spezielle Bemerkung läßt sich zu folgendem allgemeinen Satze erheben:

*Ist $f(x)$ eine Funktion, welche, mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Stellen a_r des Intervalles $(0, 2\pi)$, an welchen sie einen einfachen Sprung erleidet***), überall stetig ist, und eine stetige Ableitung $f'(x)$ besitzt, so ist die aus der Fourierschen Reihe von $f(x)$*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

durch gliedweise Differentiation erhaltene Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx)$$

bekanntlich für jedes x divergent — während die arithmetischen Mittel dieser Reihe eine — von den Stellen a_r abgesehen — überall konvergente Folge bilden, die als Grenzfunktion die Ableitung $f'(x)$ besitzt.

Es genügt den Satz für eine Funktion $f(x)$ zu beweisen, die nur eine einzige Sprungstelle a $(0 < a < 2\pi)$ besitzt.

Da die Ableitung $f'(x)$ stetig ist, so konvergieren die arithmetischen Mittel ihrer Fourierschen Reihe

*) Die Reihe (9) ist im wesentlichen das klassische Beispiel von Abel, welches zum ersten Male bei der gliedweisen Differentiation einer unendlichen Reihe zur Vorsicht mahnte.

**) S. Gleichung (3'). Die Stellen $0, \pm 2\pi, \cdots$ sind natürlich wieder ausgenommen.

***) Ist $f(+0) \neq f(2\pi - 0)$, so rechnen wir die Stelle 0 (oder 2π) auch zu den a_r-s.

$$a_0' + \sum_{n=1}^{\infty} a_n' \cos nx + b_n' \sin nx) \tag{11}$$

gewiß zu $f'(x)$ (von der Stelle a abgesehen). Wenn wir nun den Sprung $f(a-0) - f(a+0) = D_a$ setzen, so erhält man durch Zerlegung und partielle Integration

$$a_0' = \frac{D_a}{2\pi} \qquad \left.\begin{aligned} a_n' &= \frac{D_a}{\pi} \cos na + nb_n \\ b_n' &= \frac{D_a}{\pi} \sin na - na_n \end{aligned}\right\} \quad n = 1, 2, \cdots$$

und die Reihe (11) erscheint in folgender Form:

$$\frac{D_a}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{D_a}{\pi} \cos n(a-x) + (nb_n \cos nx - na_n \sin nx) \right\} \cdot$$

Der Teil

$$\frac{D_a}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n(a-x) \right\}$$

kann aber weggelassen werden, da doch die arithmetischen Mittel dieser Reihe für jedes x zu 0 konvergieren, die Stellen $a + 2k\pi$ ausgenommen, die uns aber ohnedies nicht interessieren*). Folglich konvergieren schon allein die arithmetischen Mittel von

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx)$$

zu $f'(x)$ w. z. b. w.

Die Konvergenz ist wieder eine gleichmäßige in jedem Intervalle, das von Sprungstellen frei ist.

§ 2.

Hülfsatz.

Bevor wir zu den Anwendungen übergehen, schicken wir einen allgemeinen Grenzwertsatz voraus, der auch bei andern Untersuchungen von Nutzen sein dürfte.

*Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ eine divergente Reihe, welche aber nach der Ausdrucksweise des Herrn Cesàro**), „einfach unbestimmt" ist, d. h. eine Reihe für welche der Grenzwert*

---

*) S. Gleichung (3').

**) Bulletin de Darboux: 1890, p. 114.

$$\lim. S_n = S, \tag{12}$$

$$S_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}, \qquad s_n = \sum_{n=0}^{n} u_n$$

existiert. Es sei ferner $\varphi(t)$ *eine Funktion*), welche folgenden Bedingungen genügt*

$$|\varphi(t)| < \frac{\mathsf{M}}{t^{2+\varrho}}, \qquad \left|\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right| < \frac{\mathsf{M}}{t^{2+\varrho}}, \tag{13}$$

wenn t *positiv ist und* > 1. M *und* ϱ *bedeuten hier positive Konstanten. Dann ist die Reihe*

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \varphi(nt) \tag{14}$$

für jedes positive t *konvergent, und — wenn* $\varphi(0) = 1$ —

$$\lim_{t=+0} F(t) = S.$$

Beweis. Die Reihe (14) ist in der Tat für jedes positive t konvergent; denn aus (12) folgt leicht, daß $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_n}{n} = 1$ ist, und also mit Berücksichtigung von (13) die Vergleichbarkeit mit der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varrho}}.$$

Da

$$u_n = (n+1)S_n - 2nS_{n-1} + (n-1)S_{n-2} \qquad (n=0, 1, 2, \cdots)$$
$$(S_{-2} = S_{-1} = 0),$$

folglich

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+1)S_n - 2nS_{n-1} + (n-1)S_{n-2}\}\varphi(nt)$$

oder nach den S_n ordnend**)

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)S_n \left\{\varphi(nt) - 2\varphi\left(\overline{n+1}\,t\right) + \varphi\left(\overline{n+2}\,t\right)\right\}.$$

Setzen wir

$$S_n = S + \varepsilon_n \qquad (\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0)$$

dann ergibt sich die Zerlegung

---

*) Bei den Anwendungen des Satzes wird sie eine ganze transcendente Funktion sein.

**) Dies ist infolge der Bedingung (13) gestattet.

$$F(t) = S + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\varepsilon_n\{\varphi(nt) - 2\varphi(\overline{n+1}\,t) + \varphi(\overline{n+2}\,t)\} = S + R(t)$$

und wir behaupten also daß

$$\lim_{t=+0}. R(t) = 0.$$

Um dies zu zeigen, wählen wir eine von t unabhängige ganze Zahl ν, sodaß $|\varepsilon_n| < \delta$ wenn $n > \nu$, und eine andre ganze Zahl N, sodaß

(15) $$(N-1)t \leqq 1 < Nt$$

unter δ eine positive Größe verstehend. Wir zerlegen nun

$$R = \sum_{0}^{\nu} + \sum_{\nu+1}^{N} + \sum_{N+1}^{\infty} = R_1 + R_2 + R_3.$$

Ist t gehörig klein, so ist gewiß

$$|R_1| < \delta,$$

und es handelt sich im wesentlichen um die Abschätzung von R_2 und R_3. Dies gestaltet sich folgenderweise:

$$|R_2| < \delta \sum_{\nu+1}^{N}(n+1)|\varphi(nt) - 2\varphi(\overline{n+1}\,t) + \varphi(\overline{n+2}\,t)|$$

und da für jedes n und t

$$|\varphi(nt) - 2\varphi(\overline{n+1}\,t) + \varphi(\overline{n+2}\,t)| < 2t^2|\varphi''(\xi)|,$$

$$nt < \xi < (n+2)t,$$

so erhalten wir

$$|R_2| < \delta \cdot 2t^2\mu \sum_{0}^{N}(n+1),$$

wo μ positiv ist und so gewählt, daß

$$|\varphi''(\xi)| < \mu \quad \text{wenn} \quad 0 \leqq \xi \leqq 1.$$

Mit Berücksichtigung von (15) erhalten wir endlich für R_2

$$|R_2| < \delta \cdot 2 \cdot \frac{\mu}{(N-1)^2}\,\frac{(N+1)(N+2)}{2} < 6\mu\delta.$$

Für R_3 haben wir:

$$|R_3| < 2t^2\delta \sum_{N+1}^{\infty}(n+1)|\varphi''(\xi)|,$$

und da nach (13)

$$|\varphi''(\xi)| < \frac{\mathsf{M}}{\xi^{2+\varrho}} < \frac{\mathsf{M}}{n^{2+\varrho}\,t^{2+\varrho}}$$

und nach (15) $t > \frac{1}{N}$, so ist

$$|R_3| < 2\mathsf{M}\delta\left(N^\varrho \sum_{N+1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^{2+\varrho}}\right),$$

und weil man bekanntlich eine positive Zahl G finden kann, sodaß für jedes N

$$N^\varrho \sum_{N+1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^{2+\varrho}} < G,$$

so erhalten wir schließlich

$$|R| < \delta + 6\mu\delta + 2\mathsf{M}G\delta$$

für gehörig kleines t w. z. b. w.

Zusatz: *Sind die u_n Funktionen eines Parameters ϑ und konvergieren die arithmetischen Mittel $S_n(\vartheta)$ gleichmäßig zu $S(\vartheta)$, so konvergiert auch* — wie leicht ersichtlich — $F(t, \vartheta)$ *für* $t = +0$ *gleichmäßig zu* $S(\vartheta)$.

Wir heben einige spezielle Fälle unseres Hülfssatzes hervor.

Die Funktion

$$\varphi(t) = e^{-t}$$

genügt den aufgestellten Bedingungen, folglich ist

$$\lim_{t=+0} \sum_{0}^{\infty} u_n e^{-nt} = S$$

oder $e^{-t} = r$ setzend

(16) $$\lim_{r=1-0} \sum_{0}^{\infty} u_n r^n = S$$

ein bekannter Satz des Herrn Frobenius*).

Wenn wir weiter

$$\varphi(t) = e^{-t^2}$$

nehmen, so erhalten wir einen *neuen Satz*

(17) $$\lim_{t=+0} \sum_{0}^{\infty} u_n e^{-n^2t^2} = S$$

*) Crelle Journal Bd. 89, p. 262—264. Vgl. auch Hölder, Grenzwerte von Reihen an der Konvergenzgrenze, Math. Annalen Bd. 20, p. 535—549.

oder*) auch

$$\lim_{r=1-0} \sum_{0}^{\infty} u_n r^{n^2} = S$$

usw.

Zu allen diesen Sätzen läßt sich ein, dem obigen entsprechender *Zusatz* formulieren.

§ 3.

Anwendungen.

Wir gehen jetzt zu einigen Anwendungen unsrer Untersuchungen über.

a) Es sei $f(\varphi)$ eine nach 2π periodische, überall stetige Funktion von φ mit der Fourierschen Reihe

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Bilden wir die Reihe

$$(18) \qquad P(r, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) r^n,$$

so ist diese für $r < 1$ konvergent und genügt der Potentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Da nun nach unserm Hauptsatze die arithmetischen Mittel der Koeffizientenreihe der Potenzreihe (18) gleichmäßig zu $f(\varphi)$ konvergieren, so folgt — mit Benutzung des Satzes (16) und seinem Zusatze — daß $P(r, \varphi)$ *für* $r = 1 - 0$ *gleichmäßig zu* $f(\varphi)$ *konvergiert.* Es läßt sich also der sogenannte „Satz vom Poissonschen Integrale" wirklich direkt durch

*) Um eine kleine Anwendung dieses Satzes zu geben, betrachten wir die Potenzreihe in q

$$\vartheta_4(v, q) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2n\pi v.$$

Hier ist die — im wesentlichen schon oft betrachtete — Reihe

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos 2n\pi v$$

für jedes v $\left(\text{außer } v = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \cdots\right)$ einfach unbestimmt und liefert den Grenzwert $S = 0$. Folglich ist $\lim\limits_{q=1-0} \vartheta_4(v, q) = 0$. (Vergl. in Borels Leçons sur les séries divergentes $p \cdot 7$ den Beweis des Herrn Tannery.)

die ursprüngliche Reihenentwickelung (18) erweisen. Dies mag von historischem Interesse sein*).

Bilden wir weiter

$$(19)\qquad \Theta(\tau, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) e^{-n^2\tau},$$

so ist diese Reihe für $\tau > 0$ konvergent, genügt der Wärmeleitungsgleichung**)

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial\varphi^2}$$

und *geht für* $\tau = +0$ *gleichmäßig in* $f(\varphi)$ *über*. Dies folgt mit Hülfe des Theorems (17) und seinem Zusatze.

b) *Der bekannte Weierstraßsche Satz über die Annäherung einer beliebigen stetigen Funktion durch endliche trigonometrische Reihen ist ein Korollarium unseres Hauptsatzes.* Man entwickele die stetige Funktion $f(x)$ in die Fouriersche Reihe, so haben die arithmetischen Mittel $S_n(x)$ die verlangte Eigenschaft. Die Möglichkeit durch Polynome zu approximieren folgt dann schon bekanntlich sehr einfach***).

c) Folgende Anwendungen beziehen sich auf Fragen, die in der Theorie der *konvergenten* Fourierschen Reihen auftreten.

---

*) Vergl. H. A. Schwarz: Gesammelte Abhandlungen Bd. II, p. 189.

**) Den Satz über die Reihe (18) hat zuerst Herr Schwarz bewiesen, und Herr Picard benützt die gleichmäßige Konvergenz zum Beweise des Weierstraßschen Satzes über die Approximation einer stetigen Funktion durch endliche trigonometrische Reihen.

Den tiefer liegenden Satz (19) hat Weierstraß bewiesen und benutzt den gleichmäßigen Übergang in $f(\varphi)$ eben zum Beweise seines gerade erwähnten Satzes. Wir sehen aber, daß eigentlich an der Spitze unser Hauptsatz zu stellen ist, denn aus ihm folgt am natürlichsten der Weierstraßsche Satz über die stetige Funktion, die Sätze (18), (19) usw. Vergl. in Picards Traité d'Analyse 2ième Edition Bd. I, p. 283—287, wo der Weierstraßsche Grundgedanke mit größter Klarheit hervorgehoben wird, und auch Poincaré: Propagation de la châleur chap. V.

***) Durch die eben angegebene Weise läßt sich der Weierstraßsche Satz für eine stetige Funktion $f(x)$ beweisen, die in einem beliebigen *endlichen* Intervalle (a, b) definiert ist. Ist $(-\infty, +\infty)$ das Definitionsintervall, so verfährt man folgenderweise: man bestimmt für jedes n eine ganze rationale Funktion $P_n(x)$, sodaß

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n^2}$$

wenn $-n \leqq x \leqq n$. Die Reihe

$$P_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (P_n - P_{n-1})$$

stellt dann die Funktion $f(x)$ dar, und ist in jedem endlichen Intervalle gleichmäßig (und absolut) konvergent.

Es sei $f(x)$ eine Funktion die den Bedingungen unsres Hauptsatzes genügt. Angenommen, daß die Fouriersche Reihe von $f(x)$ an einer Stelle, wo $f(x)$ stetig ist, konvergiert, stellt sie dort notwendigerweise den Funktionswert $f(x)$ dar? Bekanntlich ja, und wir zeigen dies folgenderweise: Vorausgesetzt daß die Fourierschen $s_n(x)$ nicht zu $f(x)$ konvergieren, so müßten auch die arithmetischen Mittel $S_n(x)$ zu diesem von $f(x)$ verschiedenen Grenzwerte zustreben. Das steht mit unsrem Hauptsatze in Widerspruch. — Ebenso läßt sich zeigen, daß die $S_n(x)$ an einer Sprungstelle nur zu $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ konvergieren können. — Der Charakter der Divergenz der $s_n(x)$ kann an einer Stetigkeitsstelle x nur ein oscillatorischer sein und $f(x)$ liegt notwendigerweise zwischen den Unbestimmtheitsgrenzen der schwankenden $s_n(x)$. Analoges gilt für eine Sprungstelle.

d) Wir wollen einiges über die *Eindeutigkeitsfrage* bemerken. Nach dem Satze des Herrn Cantor folgt aus der Gleichung

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots = 0,$$

daß sämtliche Koeffizienten der linksstehenden trigonometrischen Reihe $= 0$ sind, wenn diese Reihe mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Stellen des Intervalles $(0, 2\pi)$ konvergiert. Daß die *Konvergenz* hier wirklich tief benutzt wird, darin mag uns vielleicht folgende Bemerkung bestärken:

Wenn die arithmetischen Mittel einer trigonometrischen Reihe, mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Stellen des Intervalles $(0, 2\pi)$ überall zu 0 konvergieren, so folgt daraus das Verschwinden der Koeffizienten *nicht*. In der Tat die Reihe

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots$$

besitzt die erwähnte Eigenschaft (Gl. (3')) und hat nicht lauter verschwindende Koeffizienten. Ob nicht das Verschwinden sämtlicher Koeffizienten folgt, wenn wir Ausnahmestellen ausschließen, bleibe noch dahingestellt. Jedenfalls *besteht* aber *folgender, dem bekannten Satze von* Riemann *vollständig analoger Satz:*

Es sei

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

eine trigonometrische Reihe die an einer Stelle x einfach unbestimmt ist, und den Wert $f(x)$ liefert*). Eine viermalige gliedweise Integration ergibt die überall konvergente Reihe

*) Es sei ferner $|a_n| < n^2$, $|b_n| < n^2$ wenn n eine gewisse Grenze überschreitet.

$$F(x) = C + C'x + C''x^2 + C'''x^3 + \frac{a_0 x^4}{24} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^4}$$

und der sogenannte mittlere vierte Differenzenquotient von $F(x)$ hat die Form:

$$\frac{\Delta_4(t)}{16t^4} = \frac{F(x+4t) - 4F(x+2t) + 6F(x) - 4F(x-2t) + F(x-4t)}{16t^4}$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \left(\frac{\sin nt}{nt}\right)^4.$$

Es besteht nun:

$$\lim_{t=0} \frac{\Delta_4(t)}{16t^4} = f(x).$$

Dies folgt aus unserem allgemeinen Grenzwertsatze, wenn wir

$$\varphi(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^4$$

nehmen.

Göttingen, im Januar 1903.

Jacobi's Criterion when Both End-points are Variable.

By

G. A. Bliss in Göttingen.

The object of the present paper is the extension of Jacobi's criterion to problems of the calculus of variations where both end-points are allowed to vary along given fixed curves. The result for the length integral

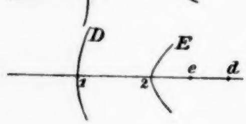
$$J = \int \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

has already been stated in geometrical form by Erdmann*), and is of interest here because the theorem for the more general integral is a direct generalisation. If D and E are the fixed curves, and C the shortest curve joining them, then, as is well-kuown,

1) *C is a straight line.*

2) *C is normal to both curves.*

We denote the intersections of D and E with this common normal by *1*, *2* respectively and the centers of curvature by the letters d and e. Then the Jacobi condition is



3) *d and e must lie on opposite sides of D and E respectively, or if on the same side, then one of the pairs (1, d), (2, e) includes the other***).

The geometrical meaning of this condition is clear from the figures. The conditions 1), 2), 3) are necessary and sufficient for a minimum of the integral J, if the case d and e coincident is excluded.

*) Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 23 (1878), p. 369. In this article Erdmann also discussed the second variation for the general problem with variable endpoints.

**) In an exceptional case, d and e may coincide. The analogous exception in the general problem with fixed endpoints, is when the endpoints are conjugates. See Osgood, Transactions of the American Mathematical Society, Vol 2, p. 166.

For the more general problem, where

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx,$$

the conditions which correspond to 1) and 2) are already well-known. In the following pages the analogue to 3), the Jacobi criterion when the end-points are variable, is to be developed.

§ 1.

Critical points.

We are to consider an integral J for which

a) F is regular, b) $F > 0$, c) $F_{y'y'} > 0$*),

in a certain region R of the xy-plane, and for every value of y'. The curves used will be supposed always in the form

$$y = f(x)$$

where $f(x)$ is regular. In particular D and E are two curves which lie at least partly in the region R, and do not intersect there. C is a curve joining D and E, and lying entirely in R. The problem of the calculus of variations is then to find the necessary and sufficient conditions that the value of the integral J taken along the curve C form D to E, shall be smaller than the corresponding value of J along any other curve joining D and E and lying in the neighborhood of C.

Two of these conditions are well-known**) and can be stated here without further proof:

I. *C must be an extremal, in other words a solution of the differential equation****)

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

II. *C must cut both D and E transversally*, i. e. *in its intersection points 1 and 2 with the curves D and E the condition must hold,*

(1) $$F + (\bar{y}' - y') F_{y'} = 0$$

---

*) Problems satisfying the condition c) have been named by Hilbert, *regular* problems.

**) See for example, Kneser, Variationsrechnung, pp. 22, 30: Osgood, Sufficient Conditions in the Calculus of Variations, Annals of Mathematics, 2^d Ser., Vol. 2, p. 105.

***) Literal subscripts denote partial derivatives. The arguments of F and its derivatives are always x, y, y' referring to the curve C, unless otherwise indicated. The prime denotes total differentiation with respect to x.

where y, y' refer always to the curve C, and $\bar{y}$, $\bar{y}'$ to D or E. The Jacobi condition to be found is a third condition upon the arc *12* of C, which with I and II is necessary and sufficient for a minimum of the integral J.

In order to find this condition, we must first consider the *critical* points which arise in problems where one end-point only is variable. We think for a moment of the curve C and D by themselves, and suppose that C is an extremal cutting D transversally. Under these circumstances the curve D defines a critical point d on C, with the following characteristic property*), where J_{13} denotes the value of the integral taken along C from D to some point *3*:

If C is an extremal cutting a given curve D transversally (see figure), *then J_{13} is a minimum as compared with the values of J along other curves in the neighborhood of C joining D and the point 3, provided that the critical point d lies without the arc 13. But J_{13} is not a minimum if 1 and 3 include d between them.*

An example is the critical point of the length integral, which has been mentioned in the foregoing paragraphs. For that integral the extremal C is a straight line, and is transversal to a given curve D when perpendicular to it. The critical point on such a normal is the center of curvature.

It has been shown in general that the position of the critical point d depends only upon the curvature of the curve D at its intersection point *1* with the transversal extremal C**). The abscissa of d is in fact determined by an equation

$$\mathsf{H}(r_1, x) = 0,$$

where r_1 is the radius of curvature of D at the point 1, and H is completely determined to a constant factor by the properties:

1) H is an integral of the Jacobi equation

$$F_{y'y'}\mathsf{H}'' + F'_{y'y}\mathsf{H}' + (F'_{yy'} - F_{yy})\mathsf{H} = 0; \tag{2}$$

2) in the point 1, H satisfies the condition***),

$$\left(\frac{P_1}{r_1} + Q_1\right)\mathsf{H}_1 + R_1 H_1' = 0, \tag{3}$$

---

*) See Kneser, l. c. pp. 89, 97; Bliss, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 3, p. 132.

**) Bliss, l. c. The notation of the present article is slightly different, P, Q, R being used in place of P_1, P_2, Q.

***) Numerical subscripts denote value of functions in the corresponding points of the figures.

where

$$P = F_{y'}\sqrt{1+\bar{y}'^2},$$

$$Q = (F_x - y' F_{xy'} - y' y'' F_{y'y'}) \frac{1}{1+\bar{y}'^2}$$

$$+ (F_{xy'} + y'' F_{y'y'} + F_y - y' F_{yy'}) \frac{\bar{y}'}{1+\bar{y}'^2} + F_{yy'} \frac{\bar{y}'^2}{1+\bar{y}'^2},$$

$$R = F_{y'y'} \frac{(y'-\bar{y}')^2}{1+\bar{y}'^2}.$$

If we take any two linearly independent integrals U, V of the equation (2), and determine the constants in the general integral

$$c_1 U + c_2 V \tag{4}$$

so that the condition (3) is satisfied, then H is determined to a constant factor in the form

$$\mathsf{H}(r_1, x) = \left(\frac{P_1}{r_1} + Q_1\right)\Theta + R_1 \frac{\partial \Theta}{\partial x_1}, \tag{5}$$

where

$$\Theta = U V_1 - U_1 V.$$

The coefficients P_1, Q_1, R_1 are completely determined by the directions of the curves C and D in their intersection point. If we consider D fixed only in so far as it cuts C transversally, that is only in direction, then its radius of curvature at the point *1* is defined by the expression (5) put equal to zero as a function of the abscissa of the critical point, and is found to have the value

$$r_1 = \frac{-P_1 \Theta}{Q_1 \Theta + R_1 \dfrac{\partial \Theta}{\partial x_1}},$$

which will be of service later.

The critical point has also an interesting geometrical interpretation. We suppose a one-parameter set of extremals

$$y = \varphi(x, \gamma), \tag{6}$$

regular in the region

$$x_1 \leqq x \leqq x_2, \quad \gamma = \gamma_0,$$

containing C for $\gamma = \gamma_0$, and such that every extremal C_γ in the set cuts the curve D transversally*). The function

$$\varphi_\gamma(x, \gamma) = \frac{\partial \varphi(x, \gamma)}{\partial \gamma}$$

for $\gamma = \gamma_0$, i. e. along the curve C, has the properties 1) and 2) of H, and its zero consequently determines the abscissa of the critical point. We have seen, namely, that a function satisfying these two conditions is

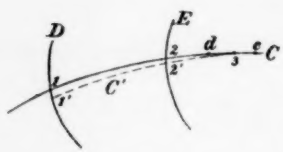
*) For a proof that such a set can be determined, see Kneser l. c. p. 109.

determined with the exception of a constant factor. It follows then that the critical point is the point of tangency of the extremal C with the envelope of the set (6).

§ 2.

A new necessary condition.

When the conditions I and II of the preceding article are satisfied, then both of the given curves D and E define critical points d, e on the extremal C, and a third necessary condition is that the point d must not lie between 1 and e. Suppose for a moment that d does lie between 1 and the point e, and consider a point 3 lying on C between d and e, and also between 2 and e. From the properties of critical points as stated in § 2, it follows that C is not a minimizing curve between the fixed point 3 and the fixed curve D, because the interval 13 includes the critical point d. In any arbitrarily small neighborhood of C, a curve C' can therefore always be found joining D and 3 and giving to the integral J a smaller value than C gives; i. e.



$$J'_{1'3} < J_{13}.$$

On the other hand C does minimize J between the curve E and the point 3, because the critical point e is outside the interval 23. Hence if the curve C' is taken near enough to C,

$$J'_{2'3} > J_{23}.$$

By subtracting these inequalities we see that in every sufficiently small neighborhood of C, a cuve C' can be found, such that

$$J'_{1'2'} < J_{12}.$$

Consequently the point d can not lie between 1 and 3, and we have proven the following*):

If C is a curve joining the two given curves D and E and satisfying the necessary conditions I *and* II, *then a third necessary condition for a minimum of the integral J is,*

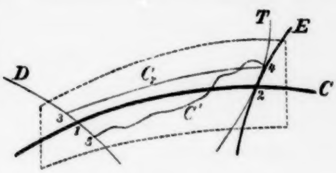
III. *the critical point d of D must not lie between the point 1* (see figure) *and the critical point e of E.*

*) It has been tacitly assumed that the continuation of the extremal C from 2 to the points d and e lies in the given region R. This assumption could be avoided by making a direct proof from the second variation without the use of the auxiliary theorems of § 1.

§ 3.

Sufficient Conditions.

In order to find a set of conditions which are sufficient for a minimum, we assume that the necessary conditions I, II, III, are satisfied, and that a one-parameter set (6) of extremals has been found about C. Then on account of III, the derivative φ_γ does not vanish anywhere on the arc 12, and the equation



$$y = \varphi(x, \gamma)$$

can be solved for γ in the neighborhood of C. More specifically, if we consider the (x, γ) points

$$\begin{matrix} x_1 - \varrho \leqq x \leqq x_2 + \varrho \\ \gamma_0 - \sigma \leqq \gamma \leqq \gamma_0 + \sigma \end{matrix} \qquad (\varrho > 0,\ \sigma > 0),$$

then ϱ and σ can be taken so small that the corresponding (xy) points of the extremals (6) simply cover a portion of the xy-plane, and constitute a so-called *field**) about the extremal C. Every point (x, y) of this strip determines one and only one extremal which passes through it, or in other words the parameter γ is a single-valued, indeed a regular, function of x and y in the field.

It is easy to see that if ϱ and σ are properly restricted, the function φ_γ will be different from zero in the entire field. A similar decrease in σ alone, if necessary, enables us to find a parameter representation of the curve D. The equation of D is

$$y = \bar{y}(x),$$

and the abscissae of its intersection with the extremals are defined by the equation

$$\bar{y}(x) - \varphi(x, \gamma) = 0, \tag{7}$$

which has in particular the solution (x_1, γ_0). In this point the derivative of (7) for x,

$$\bar{y}' - \varphi' = \bar{y}' - y',$$

can not vanish. Otherwise the equation (1) shows that the function F would also vanish in the point 1, which is contrary to our assumptions of § 1. Equation (7) admits therefore of a solution

$$x = x_3(\gamma)$$

*) The interior of the dotted lines in the figure. See Bolza, Transactions of the American Mathematical Society, Vol 2, p. 424.

in the neighborhood of γ_0, and for a suitably restricted field D has the parameter representation,

(8) $$x = x_3(\gamma), \quad y = \varphi(x_3, \gamma).$$

Similar equations with subscript *4* can be found for the curve E.

We now come to a function of γ which plays an important role with respect to the minimum, namely the Integral

$$J(\gamma) = \int_{x_3}^{x_4} F(x, \varphi, \varphi')\, dx$$

taken along an extremal C_γ of the field between the curves D and E. Its importance is a consequence of the following:

Auxiliary Theorem. A necessary and sufficient condition that

$$J_{12} = J(\gamma_0)$$

is a minimum with respect to the values of the Integral J along any other curves in the field between D and E, is that the function $J(\gamma)$ has a minimum at the point $\gamma = \gamma_0$.

The truth of the necessary part is easily seen, for if $J(\gamma_0)$ were not a minimum of the function $J(\gamma)$, then in any neighborhood of C an extremal C_γ could be found for which

$$J(\gamma) \leqq J(\gamma_0).$$

On the other hand, suppose C' is any curve whatsoever in the field cutting the curves D and E in the points *5* and *4* respectively, and consider the particular extremal C_γ which passes through the point *4*. Then C_γ gives to the integral J a smaller value than any other curve of the field joining D and the point *4**), so that

$$J(\gamma) \leqq J'_{54}.$$

But if $J(\gamma_0)$ is a minimum, it follows that

$$J(\gamma_0) < J(\gamma) \leqq J'_{54},$$

and we see that the value of J along C is less than its value along any other curve whatsoever of the field from D to E, so that a minimum is assured.

It remains then to examine the behavior of $J(\gamma)$ in the neighborhood of γ_0. The first derivative is**)

---

*) This is a consequence of the field, which is a field for C_γ as well as for C, and of the fact that $F_{y'y'} > 0$ for all values of y'. See Osgood, Annals, l. c., p 119.

**) The notations $|^4$, $|_4$ denote respectively plus and minus the value of the function indicated in the point *4*.

$$\frac{dJ}{d\gamma} = \frac{dx}{d\gamma} F(x, \varphi, \varphi')\Big|_3^4 + \int_{x_3}^{x_4} \{\varphi_\gamma F_y(x, \varphi, \varphi') + \varphi_\gamma' F_{y'}(x, \varphi, \varphi')\} dx$$

where *3* and *4* denote intersections of C_γ with D and E respectively, and the derivative $\frac{dx}{d\gamma}$ refers to the parameter representations of D and E in these points. After a partial integration, on account of I,

$$\frac{dJ}{d\gamma} = \frac{dx}{d\gamma} F(x, \varphi, \varphi') + \varphi_\gamma F_{y'}(x, \varphi, \varphi')\Big|_3^4.$$

If we substitute the value of $\frac{dx}{d\gamma}$ from the equation (7), we see that the part of $\frac{dJ}{d\gamma}$ due to the curve D vanishes identically in γ, because the extremals of the field are all transversal to the curve D. The remaining part is

(9) $$\frac{dJ}{d\gamma} = \frac{dx}{d\gamma} F(x, \varphi, \varphi') + \varphi_\gamma F_{y'}(x, \varphi, \varphi')\Big|^4,$$

or on account of the equation for E which corresponds to (7),

(10) $$\frac{dJ}{d\gamma} = \frac{\varphi_\gamma}{\bar{y} - y'} \{F(x, \varphi, \varphi') + (\bar{y}' - y') F_{y'}(x, \varphi, \varphi')\}\Big|^4.$$

For $\gamma = \gamma_0$ this also vanishes, since C is transversal to E in the point 2, and $J(\gamma_0)$ is therefore surely a minimum if $\frac{d^2J}{d\gamma^2}$ is positive for $\gamma = \gamma_0$.

The value for the second derivative in the point 2 ($\gamma = \gamma_0$) is found from equation (10) after some calculation*) to be

(11) $$\frac{d^2J}{d\gamma^2} = \varphi_\gamma \frac{1 + \bar{y}'^2}{(\bar{y}' - y')^2} \left\{\left(\frac{P}{r} + Q\right) \varphi_\gamma + R\varphi_\gamma'\right\}\Big|^2.$$

According to the necessary condition III which has been assumed to hold true, the critical point e can coincide with d, or lie to the left of d. It is desired to show that in the former case the expression (11) vanishes, and in the latter case is positive.

When d and e coincide, then the integral φ_γ of the equation (2) which determines d, and the integral which determines e, have a common zero. But two integrals of a linear differential equation of the second order which have a common zero can differ only by a constant factor.

---

*) One must bear in mind that (1) holds at the point 2.

On the other hand the integral which determines e is uniquely defined by a condition in the point 2 similar to (3). It follows then that

$$\left(\frac{P_2}{r_2} + Q\right) \varphi_\gamma + R\varphi_\gamma'\Big|^2 = 0,$$

and consequently $\frac{d^2 J}{d\gamma^2}$ vanishes when d and e coincide.

If we consider the expression (11) as a function of the abscissa of e, then as e moves along the curve C the radius of curvature r_2 is the only variable, because everything else depends only upon the direction of E, which does not vary. From § 1 the radius has the value

$$r_2 = \frac{-P_2 \Omega}{Q_2 \Omega + R_2 \dfrac{\partial \Omega}{\partial x_2}},$$

where

$$\Omega = U V_2 - U_2 V.$$

We make use next of the theorem that any two linearly independent integrals of the differential equation (2) satisfy a relation*)

$$UV' - U'V = \frac{c}{F_{y'y'}}, \qquad c = \text{const.}$$

and find that the derivative of the expression (11) with respect to the abscissa of the point e, must have the sign of

$$\frac{d}{dx}\frac{P_2}{r_2} = -\frac{R_2 c^2}{F_{y'y'}\,|^2\, F_{y'y'}\,\Omega^2},$$

a positive factor only having been omitted. This last expression is however always negative, so that as the abscissa of e decreases, i. e. where e lies to the left of d, the value of the derivative (11) is always positive.

We have proven then the theorem:

When the necessary conditions I, II *upon the curve C are satisfied, then a sufficient condition for a minimum of the integral J is,*

III′. *the critical point e of the curve E lies between E and the critical point d of D.*

---

*) Found by substituting U, V in (2) and eliminating the terms in U, V. The constant c must be different from zero, otherwise U and V could not be linearly independent. See Jordan, Cours d'Analyse, III, p. 152.

§ 4.

Necessary and sufficient conditions*).

In the preceding articles it was found that a minimum of the integral J can not possibly exist when the order of the critical points is $d\,e$, but on the other hand a minimum surely exists when the order is $e\,d$. To prove a condition which is at the same time necessary and sufficient, we must consider the case where d and e coincide, that is where $\frac{d^2J}{d\gamma^2}$ vanishes for $\gamma = \gamma_0$.

According to the auxiliary theorem of article 3, the arc 12 of the curve C minimizes the integral J if and only if an odd number, $2s-1$ of the derivatives of $J(\gamma)$ vanish, while the derivative of order $2s$ is positive. In order to find a geometrical interpretation of this criterion, we consider a curve through the point 2, which like the curve D cuts all the extremals of the field transversally. Such a curve can be found by solving the differential equation

$$F(x, \varphi, \varphi') + \left(\frac{dy}{dx} - \varphi'\right) F_{y'}(x, \varphi, \varphi') = 0, \tag{12}$$

where the parameter γ is regarded as a function of x and y in the field. There is one and only one solution T of this equation which passes through the point 2, and it has a parameter representation

$$x = x_5(\gamma), \quad y = \varphi(x_5, \gamma), \tag{13}$$

similar to those of D and E. The first derivative of the function

$$K(\gamma) = \int_{x_3}^{x_5} F(x, \varphi, \varphi')\, dx$$

for this curve T, vanishes identically in γ, as we see by referring to the equations (10) and (12), so that the value $K(\gamma)$ of the integral J taken along an extremal C_γ of the field between D and T is a constant independent of γ.

We compare next the derivatives of the functions $J(\gamma)$ and $K(\gamma)$ in the point $2\,(\gamma = \gamma_0)$. If the first derivative of $J(\gamma)$ vanishes, then it must be equal to the first derivative of $K(\gamma)$, and inasmuch as the function F is different from zero, the equation (9) and the corresponding one for $K(\gamma)$ show that

$$\frac{dx_4}{d\gamma} - \frac{dx_5}{d\gamma}\bigg|^2 = 0.$$

*) It should be remarked that the conditions here found are necessary and sufficient only for *regular* problems.

Similarly when both first and second derivatives of $J(\gamma)$ vanish,

$$\frac{d^2x_4}{d\gamma^2} - \frac{d^2x_5}{d\gamma^2}\Big|^2 = 0;$$

and in general the conditions

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^\mu J}{d\gamma^\mu} &= \frac{d^\mu K}{d\gamma^\mu} \\ \frac{d^{2s} J}{d\gamma^{2s}} &> \frac{d^{2s} K}{d\gamma^{2s}} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \mu &= 1, 2, \cdots, 2s-1, \\ \gamma &= \gamma_0, \end{aligned}$$

are equivalent to

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^\mu x_4}{d\gamma^\mu} &= \frac{d^\mu x_5}{d\gamma^\mu} \\ \frac{d^{2s} x_4}{d\gamma^{2s}} &> \frac{d^{2s} x_5}{d\gamma^{2s}} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \mu &= 1, 2, \cdots, 2s-1, \\ \gamma &= \gamma_0. \end{aligned}$$

But from the form of the parameter representations (8), (13) of E and T it follows that these are the conditions which determine a contact of order $2s - 1$ between those curves at the point 2, and furthermore one such that E lies entirely to the right of J in the neighborhood of the contact point. We derive easily then the following theorem:

If the curve C satisfies the necessary conditions I, II, III, *and if T is the curve through the intersection of C and E which cuts all the extremals of the field transversally, then it is further a necessary and sufficient condition for a minimum of the integral J, that E and T have a contact of odd order in their intersection with C, such that E lies entirely on the opposite side of T from D in the neighborhood of the point of contact.*

The theorems of §§ 2, 3 were special cases of this one, where the contact was of the first order.

Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik.

Von

Adolf Kneser in Berlin.

Viele Fragen der mathematischen Physik, besonders solche, die sich auf die Verteilung der Wärme und auf Schwingungsvorgänge beziehen, führen auf eine analytische Aufgabe, der Sturm und Liouville in den ersten Bänden des Liouvilleschen Journals eine Reihe klassischer Abhandlungen gewidmet haben, und die in folgender Weise ausgesprochen werden kann.

Es seien g, k, l drei in dem Intervall von $x = 0$ bis $x = X$ gegebene Funktionen von x, und r ein positiver Parameter. Bestimmt man dann V als Funktion von x durch die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dV}{dx}\right) + (gr - l)V = 0$$

und verlangt, daß sie den Bedingungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} k\frac{dV}{dx} - hV \Big|^{0} &= 0, \\ k\frac{dV}{dx} + HV \Big|^{X} &= 0 \end{aligned}$$

genüge, in denen durch h und H Konstante bezeichnet sind, so ist dies nur möglich, wenn dem Parameter r gewisse besondere Werte beigelegt werden. Man erhält für ihn eine transcendente Gleichung, die, wenn für die Funktionen k, g, l angemessene Voraussetzungen gemacht werden, nur einfache positive Wurzeln $r_1, r_2, \cdots$ besitzt. Die zugehörigen Funktionen V, welche bis auf einen konstanten Faktor bestimmt sind, seien $V_1, V_2, \cdots$; sie werden*) als die Normalfunktionen der betreffenden Aufgabe bezeichnet und haben die leicht erweisliche Grundeigenschaft

*) Lord Rayleigh, Theory of sound I Nr. 118.

(2) $$\int_0^X g V_\mu V_\nu dx = 0,$$

wenn μ und ν verschiedene ganze Zahlen sind. Es handelt sich darum, eine in dem Intervall von $x=0$ bis $x=X$ willkürlich gegebene Funktion $f(x)$ durch eine Reihe von der Form

(3) $$f(x) = A_1 V_1 + A_2 V_2 + \cdots$$

darzustellen, für deren Koeffizienten man, wenn die Entwicklung möglich ist und gleichmäßig konvergiert, auf Grund der Eigenschaft (2) sofort den Ausdruck

(4) $$A_\nu = \frac{\int_0^X g f(x) V_\nu dx}{\int_0^X g V_\nu^2 dx}.$$

erhält, indem man nach Fourier die Gleichung (3) mit $g V_\nu$ multipliziert und von 0 bis X integriert.

Das Ziel, dem die vorliegenden Untersuchungen zustreben, besteht nun darin, unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen zu beweisen, daß die mit den Koeffizienten (4) gebildete Reihe (3) die Funktion $f(x)$ wirklich darstellt; dies gelingt, indem der Funktion $f(x)$ im wesentlichen dieselben Beschränkungen wie bei dem Dirichletschen Beweise für die Fouriersche Reihendarstellung auferlegt werden. Einzelne analytische Entwicklungen, die ich dabei benutze, sind durch die hierher gehörigen Arbeiten von Dini*), Harnack**), Poincaré***) und Stekloff†) angeregt oder aus ihnen entlehnt; der Grundgedanke aber kann in folgender Weise angedeutet werden.

Die angeführten neueren Autoren benutzen sämtlich ein von Cauchy††) bei seiner Untersuchung der Fourierschen Reihe eingeführtes Hülfsmittel; sie konstruieren eine Funktion einer komplexen Variablen r, welche x als Parameter enthält, an Singularitäten nur Pole $r = r_\nu$ aufweist, und als Residuen die entsprechenden Glieder der Reihe (3) ergibt. Poincaré hat wie es scheint zuerst darauf hingewiesen, daß die Cauchysche Hülfsfunktion dasjenige Integral der Gleichung

---

*) Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche, Pisa 1880.

**) Sächs. Ber. 1884.

***) Théorie analytique de la propagation de la chaleur, Paris 1895. Rendiconti del circolo mat. di Palermo 1894.

†) Annales de la faculté des sciences de Toulouse (2) III.

††) Exercices 1827, Oeuvres (2) VII.

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dV}{dx}\right)+(gr-l)V+f(x)=0$$

ist, welches den Bedingungen (1) genügt. Hinsichtlich dieser Funktion von r benutze ich nur die leicht ersichtliche Tatsache, daß irgend ein Wert r_ν aus der Reihe ihrer Pole wegfällt, wenn der entsprechende Koeffizient A_ν verschwindet; sind diese Größen sämtlich gleich Null, so ist die Cauchysche Hülfsfunktion ganz, d. h. eine beständig konvergente Potenzreihe des Arguments r. Das ist aber, wie sich zeigen läßt, nur möglich, wenn die Funktion $f(x)$ identisch verschwindet, und so gewinnt man den Satz, daß in dem Intervall von $x=0$ bis $x=X$ überall die Gleichung

$$f(x)=0$$

gilt, wenn alle A_ν verschwinden.

Hieraus erschließt man durch die oben angedeutete Argumentation von Fourier die gewünschte Gleichung (3), sobald deren rechte Seite gleichmäßig konvergiert, und der zweite Teil unsrer Arbeit besteht darin, Bedingungen aufzusuchen, denen die Funktion $f(x)$ unterworfen werden muß, um für die Reihe (3) die bezeichnete Eigenschaft zu sichern. Die erhaltenen Bedingungen werden dann einerseits möglichst erweitert; andrerseits untersuche ich die Vereinfachungen des Beweises, die bei engeren Voraussetzungen möglich werden und von Interesse sind, wenn man die einzelnen Probleme der mathematischen Physik mit einem möglichst geringen Aufwande von allgemeiner Theorie behandeln will.

I. Neue Theorie der Fourierschen Reihe.

§ 1.

Vorbereitungen.

Es sei $f(x)$ eine von $x=0$ bis $x=\pi$ stetige Funktion, ϱ eine Konstante; setzt man

$$p=p(x)=\frac{1}{\varrho}\int_0^x f(\alpha)\sin\varrho(\alpha-x)\,d\alpha,$$

so findet man

$$p'(x)=-\int_0^x f(\alpha)\cos\varrho(\alpha-x)\,d\alpha,$$

$$p''(x)=-f(x)-\varrho\int_0^x f(\alpha)\sin\varrho(\alpha-x)\,d\alpha,$$

und sieht unmittelbar, daß p ein Integral der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\varrho^2y+f(x)=0 \tag{1}$$

ist, und zwar dasjenige, für welches

$$p(0) = p'(0) = 0. \tag{2}$$

Aus einer Lösung dieser Gleichung findet man aber andere, indem man beliebige Integrale der homogenen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \varrho^2 y = 0$$

addiert; vier Lösungen der Gleichung (1) sind demnach, wenn durch C Konstante bezeichnet werden,

$$u = p + C_1 \sin \varrho x, \qquad v = p + C_2 \cos \varrho x,$$
$$w = p + C_3 \sin \varrho x, \qquad s = p + C_4 \cos \varrho x,$$

und die Gleichungen (2) ergeben

$$u(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad w(0) = 0, \quad s'(0) = 0.$$

In diesen Ausdrücken bestimmen wir die Konstanten C durch die Forderungen

$$u(\pi) = 0, \quad v'(\pi) = 0, \quad w'(\pi) = 0, \quad s(\pi) = 0;$$

dann bieten die vier Größen u, v, w, s alle vier möglichen Fälle dar, in denen an jeder der Stellen $x = 0$ und $x = \pi$ entweder die Funktion, oder ihre erste Ableitung verschwindet, und man erhält für die Konstanten C folgende Bestimmungen:

$$p(\pi) + C_1 \sin \varrho\pi = 0, \qquad p'(\pi) - C_2 \varrho \sin \varrho\pi = 0,$$
$$p'(\pi) + C_3 \varrho \cos \varrho\pi = 0, \qquad p(\pi) + C_4 \cos \varrho\pi = 0.$$

Hieraus folgt weiter

$$u = \frac{\varrho\, p(x) \sin \varrho\pi - \varrho\, p(\pi) \sin \varrho x}{\varrho \sin \varrho\pi},$$

$$v = \frac{\varrho\, p(x) \sin \varrho\pi + p'(\pi) \cos \varrho x}{\varrho \sin \varrho\pi},$$

$$w = \frac{\varrho\, p(x) \cos \varrho\pi - p'(\pi) \sin \varrho x}{\varrho \cos \varrho\pi},$$

$$s = \frac{\varrho\, p(x) \cos \varrho\pi - \varrho\, p(\pi) \cos \varrho x}{\varrho \cos \varrho\pi},$$

und da die Ausdrücke für $p(x)$ und $p'(x)$ zeigen, daß $\varrho p(x)$, $\varrho p(\pi)$ und $p'(\pi)$ ganze Funktionen von ϱ sind, so gilt dasselbe von den Zählern der Brüche u, v, w, s, und zwar sind diese, wie man leicht sieht, bei u und v gerade, bei w und s ungerade Funktionen von ϱ; sie mögen der Reihe nach durch G_1, G_2, G_3, G_4 bezeichnet werden, sodaß

$$u = \frac{G_1(\varrho)}{\varrho \sin \varrho\pi}, \quad v = \frac{G_2(\varrho)}{\varrho \sin \varrho\pi}, \quad w = \frac{G_3(\varrho)}{\varrho \cos \varrho\pi}, \quad s = \frac{G_4(\varrho)}{\varrho \cos \varrho\pi}.$$

Man findet dann leicht

$$G_1(0) = G_3(0) = G_4(0) = 0, \quad G_2(0) = p'(\pi)|^{\varrho=0} = -\int_0^\pi f(\alpha)\,d\alpha;$$

da nun $G_1(\varrho)$ und $G_2(\varrho)$ gerade Funktionen sind und $\varrho = 0$ im Nenner von u und v eine doppelte, im Nenner von w und s eine einfache Nullstelle ist, so ist $\varrho = 0$ ein Pol nur bei v, und auch hier nur, wenn $G_2(0)$ von Null verschieden ist.

Wenn ferner n eine positive ganze Zahl oder Null ist, gelten die Gleichungen

$$G_1(n) \qquad = -np(\pi)\sin nx = -\sin nx\int_0^\pi f(\alpha)\sin n(\alpha-\pi)\,d\alpha,$$

$$G_2(n) \qquad = +p'(\pi)\cos nx = -\cos nx\int_0^\pi f(\alpha)\cos n(\alpha-\pi)\,d\alpha,$$

$$G_3\left(n+\frac{1}{2}\right) = -p'(\pi)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\int_0^\pi f(\alpha)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)(\alpha-\pi)\,d\alpha,$$

$$G_4\left(n+\frac{1}{2}\right) = -\left(n+\frac{1}{2}\right)p(\pi)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x$$

$$= -\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\int_0^\pi f(\alpha)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\alpha-\pi)\,d\alpha,$$

oder kurz, da die Funktionen G entweder gerade oder ungerade sind,

$$(3)\qquad \begin{aligned} G_1(\pm n) \qquad &= \pm\sin nx\int_0^\pi f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha, \\ G_2(\pm n) \qquad &= \pm\cos nx\int_0^\pi f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha, \\ G_3\left(\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\right) &= \pm\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\int_0^\pi f(\alpha)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\,d\alpha, \\ G_4\left(\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\right) &= \pm\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\int_0^\pi f(\alpha)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\,d\alpha. \end{aligned}$$

Nun sind $\varrho = \pm n$ die Nullstellen der Nenner von u und v, $\varrho = \pm\left(n+\frac{1}{2}\right)$ diejenigen der Nenner von w und s, und alle diese Nullstellen sind, abgesehen von $\varrho = 0$, von der ersten Ordnung; verschwindet also z. B. $G_1(n)$, so ist der betreffende Wert von n sowie auch $-n$ nur scheinbar eine

singuläre Stelle von u, und Entsprechendes gilt, wenn eine der anderen Größen (3) verschwindet, während x ein beliebiger der Werte von 0 bis π sein kann. Bestehen alle Gleichungen

$$G_1(n) = 0,$$

so hat u überhaupt keine Singularität für endliche Werte von ϱ, ist also eine ganze Funktion; das analoge Resultat ist für v, w und s leicht auszusprechen, wobei zu beachten ist, daß, wie bemerkt, die Funktion v ihren doppelten Pol $\varrho = 0$ unter der Bedingung $G_2(0) = 0$ verliert. Man erhält somit folgendes Resultat:

Besteht eine der vier Gleichungen

$$\int_0^\pi f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha = 0, \qquad \int_0^\pi f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha = 0,$$

$$\int_0^\pi f(\alpha) \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha \, d\alpha = 0, \qquad \int_0^\pi f(\alpha) \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha \, d\alpha = 0$$

für alle nicht negativen ganzen Werte von n, so ist im ersten Falle u, im zweiten v, im dritten w, im vierten s eine ganze Funktion von ϱ, und zwar für alle dem Intervall von 0 bis π angehörigen Werte von x.

§ 2.

Der Fall, daß alle Koeffizienten einer Fourierschen Reihe verschwinden.

Ist eine der Funktionen u, v, w, s ganz, so muß, wie wir zeigen wollen, die Funktion $f(x)$ identisch verschwinden.

Zu diesem Zweck gehen wir davon aus, daß in den Ausdrücken u, v, w, s Zähler und Nenner immer zugleich gerade oder ungerade Funktionen von ϱ sind, daß also irgend eine dieser Größen, etwa u, wenn sie eine ganze Funktion von ϱ ist, in der Form

(1) $$u = u_0 + u_1 \varrho^2 + u_2 \varrho^4 + \cdots$$

entwickelt werden kann. Die Koeffizienten u_0, u_1, $\cdots$ sind stetige Funktionen von x und haben stetige erste und zweite Ableitungen, da dies von $p(x)$ und den übrigen in den Zählern $G_1(\varrho)$, $\cdots$ vorkommenden Funktionen von x gilt; aus der Form des Ausdrucks $p(x)$ ist ferner ersichtlich, daß die Reihe (1) nach x gliedweise differenziert werden darf und, wenn ϱ festgehalten wird, im ganzen Intervall von $x = 0$ bis $x = \pi$ gleichmäßig konvergiert.

Substituiert man die angegebene Reihe für u in die Differentialgleichung

$$u'' + \varrho^2 u + f(x) = 0,$$

und setzt die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von ϱ^2 gleich Null, so erhält man

$$u_0'' + f(x) = 0,\ u_1'' + u_0 = 0,\ u_2'' + u_1 = 0, \cdots. \tag{2}$$

Multipliziert man von den hier vorkommenden Formeln

$$u''_{m+1} + u_m = 0, \qquad u''_n + u_{n-1} = 0$$

die erste mit u_n, die zweite mit u_{m+1}, so ergibt sich

$$\int_0^\pi u_n u''_{m+1}\,dx = -\int_0^\pi u_m u_n\,dx, \quad \int_0^\pi u_{m+1} u''_n\,dx = -\int_0^\pi u_{m+1} u_{n-1}\,dx. \tag{3}$$

Andrerseits erhält man durch zwei partielle Integrationen

$$\int_0^\pi u''_n u_{m+1}\,dx = u_{m+1}u'_n - u'_{m+1}u_n \Big|_0^\pi + \int_0^\pi u_n u''_{m+1}\,dx, \tag{4}$$

und in allen diesen Formeln kann man den Buchstaben u durch v, w oder s ersetzen, indem man von den Entwicklungen

$$\begin{aligned} v &= v_0 + v_1\varrho^2 + v_2\varrho^4 + \cdots, \\ w &= w_0 + w_1\varrho^2 + w_2\varrho^4 + \cdots, \\ s &= s_0 + s_1\varrho^2 + s_2\varrho^4 + \cdots \end{aligned} \tag{5}$$

ausgeht.

Jetzt bedenken wir, daß für beliebige Werte von ϱ die Gleichungen

$$u(0) = u(\pi) = 0, \quad v'(0) = v'(\pi) = 0, \quad w(0) = w'(\pi) = 0,$$
$$s'(0) = s(\pi) = 0$$

bestehen; differenzieren wir dieselben nach ϱ^2, so folgt, wenn die Entwicklungen (1), (5) vorausgesetzt werden,

$$\begin{aligned} u_\nu(0) &= u_\nu(\pi) = 0, \quad & v_\nu'(0) &= v_\nu'(\pi) = 0, \\ w_\nu(0) &= w_\nu'(\pi) = 0, \quad & s_\nu'(0) &= s_\nu(\pi) = 0, \end{aligned}$$

woraus man unmittelbar schließt, daß

$$u_{m+1}u'_n - u_n u'_{m+1} \Big|_0^\pi = 0, \tag{6}$$

und daß diese Gleichung richtig bleibt, wenn man u durch v, w oder s ersetzt. Demgemäß ergeben die Formeln (3), (4)

$$\int_0^\pi u_{m+1} u_{n-1}\,dx = \int_0^\pi u_m u_n\,dx$$

nebst drei Relationen derselben Form für v, w und s; das Integral auf der rechten Seite ist also nur von der Summe $m + n$ abhängig und kann demnach durch U_{m+n} bezeichnet werden. Es ist offenbar analog jenem

Integral gebildet, das Schwarz bei der Integration einer partiellen Differentialgleichung eingeführt hat*).

Eine häufig benutzte Argumentation geht dann, indem man unter α, β beliebige reelle Konstante versteht, von der Identität

$$\int_0^\pi (\alpha u_{n+1} + \beta u_{n-1})^2 dx = U_{2n+2}\alpha^2 + 2U_{2n}\alpha\beta + U_{2n-2}\beta^2$$

aus; da die rechte Seite eine quadratische Form der Argumente α, β ist, die nicht negativ werden kann, so kann ihre Determinante nicht positiv sein, d. h.

$$U_{2n}^2 - U_{2n-2}U_{2n+2} \leqq 0. \tag{7}$$

Wäre nun

$$U_{2n} = \int_0^\pi u_n^2 dx = 0,$$

so müßte u_n als stetige Funktion von x in dem ganzen Integrationsintervall verschwinden, woraus sich den Relationen (2) zufolge dasselbe für $u_{n-1}, u_{n-2}, \cdots$ und schließlich für u_0 und $f(x)$ ergeben würde. Wenn also $f(x)$ an mindestens einer Stelle des Intervalls von 0 bis π von Null verschieden ist, so sind die Größen $U_0, U_2, U_4, \cdots$ sämtlich positiv und die Ungleichung (7) ergibt

$$\frac{U_2}{U_0} \leqq \frac{U_4}{U_2} \leqq \frac{U_6}{U_4} \leqq \cdots. \tag{8}$$

Von hier aus kommt man leicht zu dem weiteren Resultat, daß u nicht für alle Werte von x in dem Intervall von 0 bis π eine ganze Funktion von ϱ sein kann. Bei dieser Annahme wäre nämlich, da die mit u_0 multiplizierte Reihe (1) von $x = 0$ bis $x = \pi$ gliedweise integriert werden darf, auch die Reihe

$$\int_0^\pi dx(u_0^2 + u_0u_1\varrho^2 + u_0u_2\varrho^4 + \cdots) = U_0 + U_1\varrho^2 + U_2\varrho^4 + \cdots \tag{9}$$

eine ganze Funktion von ϱ und bliebe ganz, wenn man die ungeraden Potenzen von ϱ^2 striche. In der so erhaltenen Reihe sind aber die Quotienten jedes Gliedes durch das vorhergehende

$$\frac{U_2\varrho^4}{U_0}, \frac{U_4\varrho^4}{U_2}, \frac{U_6\varrho^4}{U_4}, \cdots$$

also den Relationen (8) zufolge nicht kleiner als der erste von ihnen, der, da U_2 von Null verschieden ist, größer als Eins ist, sobald man für ϱ^2 einen angemessenen positiven Wert nimmt. Die Reihe (9) ist demnach

*) Schwarz Abhandlungen I, S. 247.

sicher nicht beständig konvergent, es sei denn, daß alle Größen $U_0, U_2, \cdots$ den Wert Null haben, d. h. daß $f(x)$ in dem oben angegebenen Umfange identisch verschwinde.

Berücksichtigt man noch, daß die an die Gleichung (6) geknüpften Schlüsse wie diese selbst gültig bleiben, wenn man den Buchstaben u durch v, w oder s ersetzt, so kann das erhaltene Resultat auf Grund des in § 1 Bewiesenen in folgender Weise ausgesprochen werden:

Ist $f(x)$ eine in dem Intervall von $x = 0$ bis $x = \pi$ stetige Funktion und gilt eins der Gleichungssysteme

$$\int_0^\pi f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha = 0, \qquad \int_0^\pi f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha = 0,$$

$$\int_0^\pi f(\alpha) \sin\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\alpha \, d\alpha = 0, \quad \int_0^\pi f(\alpha) \cos\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\alpha \, d\alpha = 0,$$

indem man unter n alle positiven ganzen Zahlen oder Null versteht, so hat $f(x)$ in dem bezeichneten Intervall überall den Wert Null.

§ 3.

Gleichmäßige Konvergenz und Summe der Fourierschen Reihe.

Das Resultat des § 2 führt leicht zu dem Satze, daß irgend eine der Reihen

$$R_1 = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu}^{1,\infty} \sin \nu x \int_0^\pi f(\alpha) \sin \nu\alpha \, d\alpha,$$

$$R_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\alpha)\, d\alpha + \frac{2}{\pi} \sum_{\nu}^{1,\infty} \cos \nu x \int_0^\pi f(\alpha) \cos \nu\alpha \, d\alpha,$$

$$R_3 = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu}^{0,\infty} \sin\left(\nu + \tfrac{1}{2}\right) x \int_0^\pi f(\alpha) \sin\left(\nu + \tfrac{1}{2}\right)\alpha \, d\alpha,$$

$$R_4 = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu}^{0,\infty} \cos\left(\nu + \tfrac{1}{2}\right) x \int_0^\pi f(\alpha) \cos\left(\nu + \tfrac{1}{2}\right)\alpha \, d\alpha,$$

in dem ganzen Intervall von 0 bis π mit $f(x)$ übereinstimmt, sobald sie in diesem Intervall mit Einschluß der Grenzen gleichmäßig konvergiert und demnach eine stetige Funktion von x ist. Dann kann man die entsprechende der Reihen

$$R_1 \sin nx, \quad R_2 \cos nx, \quad R_3 \sin\left(n + \tfrac{1}{2}\right) x, \quad R_4 \cos\left(n + \tfrac{1}{2}\right) x$$

gliedweise von 0 bis π integrieren und findet, wenn n und m verschiedene ganze Zahlen sind, vermittelst der Gleichungen

$$\int_0^\pi \sin nx \sin mx\,dx = \int_0^\pi \cos nx \cos mx\,dx = \int_0^\pi \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)dx$$

$$= \int_0^\pi \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x \cos\left(m+\frac{1}{2}\right)x\,dx = 0,$$

$$\int_0^\pi \sin^2 nx\,dx = \int_0^\pi \cos^2 nx\,dx = \int_0^\pi \sin^2\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,dx = \int_0^\pi \cos^2\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

eins der Resultate

$$\int_0^\pi (R_1 - f(x)) \sin nx\,dx = 0, \qquad \int_0^\pi (R_2 - f(x)) \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_0^\pi (R_3 - f(x)) \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,dx = 0, \quad \int_0^\pi (R_4 - f(x)) \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,dx = 0,$$

womit nach § 2 eine entsprechende der Gleichungen

$$f(x) = R_1, \quad f(x) = R_2, \quad f(x) = R_3, \quad f(x) = R_4$$

bewiesen ist.

Um diese Bemerkungen fruchtbar zu machen, suchen wir Bedingungen, unter denen eine der Reihen R in dem angegebenen Bereiche gleichmäßig konvergiert.

Die Funktion $f(x)$ habe zunächst in dem Intervall von 0 bis π stetige erste und zweite Ableitungen; dann findet man für die Koeffizienten der Reihen R, indem man zweimal partiell integriert, folgende Ausdrücke:

$$\int_0^\pi f(\alpha) \sin n\alpha\,d\alpha = -\frac{f(\alpha)\cos n\alpha}{n}\Bigg|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi f'(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha$$

$$= -\frac{f(\alpha)\cos n\alpha}{n} + \frac{f'(\alpha)\sin n\alpha}{n^2}\Bigg|_0^\pi - \frac{1}{n^2}\int_0^\pi f''(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha,$$

$$\int_0^\pi f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha = \frac{f(\alpha)\sin n\alpha}{n}\Bigg|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi f'(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha$$

$$(1) \qquad = \frac{f(\alpha)\sin n\alpha}{n} - \frac{f'(\alpha)\cos n\alpha}{n^2}\Bigg|_0^\pi + \frac{1}{n^2}\int_0^\pi f''(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha,$$

$$\int_0^\pi f(\alpha)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\,d\alpha = -\frac{f(\alpha)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{n+\frac{1}{2}}\Bigg|_0^\pi + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^\pi f'(\alpha)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\,d\alpha$$

$$= -\frac{f(\alpha)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{n+\frac{1}{2}} + \frac{f'(\alpha)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\Bigg|_0^\pi$$

$$-\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\int_0^\pi f''(\alpha)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\,d\alpha,$$

$$\int_0^\pi f(\alpha)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\,d\alpha = \frac{f(\alpha)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{n+\frac{1}{2}}\Bigg|_0^\pi - \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^\pi f'(\alpha)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\,d\alpha$$

$$= \frac{f(\alpha)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{n+\frac{1}{2}} + \frac{f'(\alpha)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\Bigg|_0^\pi$$

$$-\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\int_0^\pi f''(\alpha)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\,d\alpha.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß die Koeffizienten der Reihe R_1 bei der Annahme

$$f(0) = f(\pi) = 0$$

die Gestalt

$$\frac{\Psi}{n^2}$$

haben, wobei Ψ zwischen endlichen von n unabhängigen Grenzen verbleibt; dasselbe gilt demnach auch von den Gliedern der Reihe R_1, welche somit, wie der Vergleich mit der Reihe

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

lehrt, unbedingt und gleichmäßig konvergiert. Ähnliche Schlüsse macht man für die Reihe R_2 ohne irgend eine Voraussetzung betreffs der Werte $f(0)$ und $f(\pi)$, für R_3 bei der Annahme

$$f(0) = 0,$$

und für R_4 bei der Annahme

$$f(\pi) = 0;$$

damit ist nach den zu Anfang dieses Paragraphen gemachten Bemerkungen folgender Satz bewiesen:

Ist die Funktion $f(x)$ nebst ihrer ersten und zweiten Ableitung in dem Intervall von $x = 0$ bis $x = \pi$ stetig, so gilt für dieses die Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\alpha)\,d\alpha + \frac{2}{\pi}\sum_\nu^{1,\infty} \cos\nu x \int_0^\pi f(\alpha)\cos\nu\alpha\,d\alpha;$$

wird ferner vorausgesetzt

$$f(0) = f(\pi) = 0,$$

so ist

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_\nu^{1,\infty} \sin\nu x \int_0^\pi f(\alpha)\sin\nu\alpha\,d\alpha;$$

endlich hat man bei der Annahme

$$f(0) = 0$$

die Gleichung

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_\nu^{0,\infty} \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right)x \int_0^\pi f(\alpha)\sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\alpha\,d\alpha$$

und bei der Annahme

$$f(\pi) = 0$$

die Entwicklung

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_\nu^{0,\infty} \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right)x \int_0^\pi f(\alpha)\cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\alpha\,d\alpha.$$

In jeder dieser vier Gleichungen konvergiert bei der zugehörigen Voraussetzung die rechte Seite von $x = 0$ bis $x = \pi$ gleichmäßig und absolut.

Die Darstellung einer stetigen mit stetiger erster und zweiter Ableitung versehenen periodischen Funktion $f(x)$ durch die nach Cosinus und Sinus fortschreitende Reihe ergibt sich jetzt sehr leicht; hat man nämlich

$$F(x + 2\pi) = F(x), \quad F(-\pi) = F(+\pi),$$

so setze man

$$f(x) = \frac{F(x) - F(-x)}{2};$$

dann ist

$$f(0) = f(\pi) = 0, \quad f(-x) = -f(x),$$

und unser Satz gibt für $f(x)$ eine Reihe R_1, welche auch für das Intervall von $-\pi$ bis 0 gilt. Setzt man ferner

$$g(x) = \frac{F(x) + F(-x)}{2}$$

sodaß

$$g(-x) = g(x),$$

so erhält man für $g(x)$ eine von $-\pi$ bis $+\pi$ geltende Cosinusreihe, woraus sich vermittelst der Gleichung

$$F(x) = f(x) + g(x)$$

das gesuchte Resultat ergibt.

So einfach und im einzelnen bekannt diese Entwicklungen sind, schien es mir doch von Interesse, die Theorie der Fourierschen Reihe unter Voraussetzungen, die in sehr vielen Anwendungen ausreichen, ohne jene feineren Betrachtungen zu entwickeln, die das Wesen des von Dirichlet gegebenen Konvergenzbeweises ausmachen und auch in den auf dem zweiten Mittelwertsatze beruhenden Beweisen implizite enthalten sind. Allerdings sind unsere Voraussetzungen keineswegs bei allen Anwendungen zulässig; man denke nur an die Theorie der gezupften Saite*), bei welcher Unstetigkeiten von $f'(x)$ auftreten, und an die harmonische Analyse in der Wechselstromtechnik**), bei welcher unstetige Funktionen $f(x)$ darzustellen sind.

§ 4.

Allgemeinere Bedingungen der Konvergenz.

Wir sagen im Anschluß an Poincaré, eine Funktion sei der Dirichletschen Bedingung unterworfen, wenn sie als Differenz zweier monotoner Funktionen dargestellt werden kann, d. h. zweier Funktionen, deren jede entweder nicht zunimmt oder nicht abnimmt. Speziell genügt, wie man leicht sieht***), eine Funktion der Dirichletschen Bedingung, wenn sie nur eine endliche Anzahl von Unstetigkeiten und Extremen aufweist, wie es Dirichlet selbst in seiner klassischen Abhandlung über die Fouriersche Reihe voraussetzt. Übrigens hat jede der Dirichletschen Bedingung unterworfene Funktion eine beschränkte Schwankung und umgekehrt; ferner ist jede solche Funktion integrierbar†).

Es seien nun $F(x)$ eine monotone Funktion, ϱ, ξ, η Konstante, ξ_1, η_1 Werte zwischen ξ und η; dann gibt der zweite Mittelwertsatz die Formeln

*) Helmholtz, Vorlesungen über Akustik § 35.

**) Perry (Fricke-Süchting) Analysis für Ingenieure § 134.

***) Picard, Traité d'analyse I, Kap. 9, Nr. 13.

†) Jordan, Cours d'analyse, 2. Aufl., I, Nr. 67—72. Poincaré, Théorie analytique de la propagation de la chaleur Nr. 37.

$$\int_\xi^\eta F(\alpha)\sin\varrho\alpha\,d\alpha = F(\xi)\int_\xi^{\xi_1}\sin\varrho\alpha\,d\alpha + F(\eta)\int_{\xi_1}^\eta \sin\varrho\alpha\,d\alpha$$

$$= \frac{F(\xi)[\cos\varrho\xi - \cos\varrho\xi_1] + F(\eta)[\cos\varrho\xi_1 - \cos\varrho\eta]}{\varrho},$$

$$\int_\xi^\eta F(\alpha)\cos\varrho\alpha\,d\alpha = \frac{F(\xi)(\sin\varrho\eta_1 - \sin\varrho\xi) + F(\eta)(\sin\varrho\eta - \sin\varrho\eta_1)}{\varrho};$$

man kann also setzen

$$\int_\xi^\eta F(\alpha)\sin\varrho\alpha\,d\alpha = \frac{\Psi_0}{\varrho}, \qquad \int_\xi^\eta F(\alpha)\cos\varrho\alpha\,d\alpha = \frac{\Psi_1}{\varrho},$$

wobei Ψ_0 und Ψ_1 absolut kleiner sind als das Vierfache des größten absoluten Betrages der Funktion $F(x)$. Daraus folgen unmittelbar, wenn $f(x)$ eine von $x=\xi$ bis $x=\eta$ der Dirichletschen Bedingung unterworfene Funktion ist, die Gleichungen

$$\int_\xi^\eta f(\alpha)\sin\varrho\alpha\,d\alpha = \frac{\Psi_2}{\varrho}, \qquad \int_\xi^\eta f(\alpha)\cos\varrho\alpha\,d\alpha = \frac{\Psi_3}{\varrho},$$

in denen ebenfalls die Größen Ψ zwischen endlichen, von ϱ unabhängigen Grenzen liegen; sie sind als Differenzen zweier Größen Ψ_0 oder Ψ_1 dem absoluten Betrage nach kleiner als das Achtfache des größten absoluten Betrages der beiden monotonen Funktionen, deren Differenz $f(x)$ ist.

Hat $f(x)$ die bezeichnete Eigenschaft in einem größeren, die Werte ξ und η umfassenden Intervall J, in welchem wir uns ξ und η veränderlich denken, so können die Größen Ψ in Grenzen eingeschlossen werden, die von ϱ, ξ und η unabhängig sind; denn diese Grenzen können in der angegebenen Weise durch die größten absoluten Beträge der im Intervall J monotonen Funktionen ausgedrückt werden, deren Differenz $f(x)$ ist, also durch Werte, die offenbar von ξ und η nicht abhängen. Hiervon wird in den späteren Abschnitten vielfach Gebrauch gemacht.

Auf Grund dieser Bemerkungen zeigen die Formeln (1) des § 3, wenn man nach der ersten partiellen Integration stehen bleibt, daß die Reihen R_1, R_2, R_3, R_4 schon dann absolut und gleichmäßig konvergieren, wenn die übrigen Voraussetzungen des § 3 für $f(x)$ festgehalten werden, hinsichtlich der Ableitungen aber nur festgesetzt wird, daß $f'(x)$ der Dirichletschen Bedingung genüge, während die zweite Ableitung nicht einmal zu existieren braucht; denn für jede der vier Reihen ergibt sich das allgemeine Glied in der Form

$$\frac{\Psi}{n^2},$$

wobei Ψ zwischen endlichen von n unabhängigen Grenzen liegt. *Der Satz des § 3 bleibt also richtig, wenn unter $f(x)$ nur eine von $x=0$ bis $x=\pi$ stetige Funktion verstanden wird, die eine der Dirichletschen Bedingung unterworfene erste Ableitung besitzt.*

Hiermit dürfte die Theorie der Fourierschen Reihe für alle Anwendungen, bei denen keine unstetigen Funktionen darzustellen sind, in genügendem Umfange begründet sein.

§ 5.

Rückblick auf die Dirichletsche Theorie.

Um aber unsre Untersuchung so allgemein wie möglich gestalten zu können, müssen wir auf den Grundgedanken des Dirichletschen Beweises zurückgehen, den man für jede einzelne der vier Reihen R mit geringer Modifikation durchführen könnte, da sich bei ihnen allen die ersten n Glieder in ähnlicher Weise wie bei der gewöhnlichen Fourierschen Reihe summieren lassen. Noch bequemer ist es, diese Reihen als spezielle Fälle der gewöhnlichen Fourierschen Reihe aufzufassen, was nach einfachen Substitutionen auch bei R_3 und R_4 möglich ist.

Die Funktion $f(x)$ genüge auf der Strecke von $x=-\pi$ bis $x=+\pi$ der Dirichletschen Bedingung; daraus folgt*), daß sie bei der Annäherung an eine Unstetigkeitsstelle von links oder rechts her bestimmten Grenzen zustrebt, die wie gewöhnlich durch $f(x-0)$ und $f(x+0)$ bezeichnet werden mögen. Sie sei ferner periodisch mit der Periode 2π, sodaß allgemein

$$f(x+2\pi+0)=f(x+0), \quad f(x+2\pi-0)=f(x-0)$$

gesetzt werden kann. Wenn nun vorausgesetzt wird

$$-\pi \leqq x \leqq +\pi, \quad -\pi \leqq g < h \leqq \pi,$$

und die Reihe

$$\frac{1}{2\pi}\int_g^h f(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_\nu^{1,\infty}\cos\nu x\int_g^h f(\alpha)\cos\nu\alpha\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_\nu^{1,\infty}\sin\nu x\int_g^h f(\alpha)\sin\nu\alpha\,d\alpha$$

durch $R^{g,h}$ oder nötigenfalls durch $R(x)^{g,h}$ bezeichnet wird, so können die wichtigsten Ergebnisse der Dirichletschen Theorie in folgender Form ausgesprochen werden:

I. Wenn $f(x)$ überall stetig ist, konvergiert $R^{-\pi,\pi}$ auf jeder endlichen Strecke gleichmäßig**).

*) Poincaré, Théorie analytique de la propagation de la chaleur, Nr. 37.

**) Picard, Traité d'analyse I, S. 239.

II. Wenn

$$x > g, \qquad x - g < 2\pi,$$

so ist

$$R^{g,x} = \frac{1}{2} f(x-0);$$

wenn dagegen

$$x < h, \qquad h - x < 2\pi,$$

so ist

$$R^{x,h} = \frac{1}{2} f(x+0).$$

III. Wenn entweder

$$x < g, \qquad h - x < 2\pi,$$

oder

$$x > h, \qquad x - g < 2\pi,$$

d. h. wenn x außerhalb der Strecke von g bis h liegt und von keinem ihrer Punkte den Abstand 2π hat, so ist

$$R^{g,h} = 0.$$

Um diese Eigenschaften, soweit es geht, auf die Reihen $R_1, \cdots, R_4$ zu übertragen, werde jetzt unter $f(x)$ eine Funktion verstanden, die nur im Intervall von $x = 0$ bis $x = \pi$ gegeben ist und der Dirichletschen Bedingung genügt, und werde angenommen

$$0 \leqq g < h \leqq \pi, \qquad 0 \leqq x \leqq \pi.$$

Ferner sei $R_\nu^{g,h}$ die Reihe, welche aus R_ν entsteht, wenn man im Koeffizienten jedes Gliedes die Integrationsgrenzen 0 und π durch g und h ersetzt; genauer werde die so erhaltene Reihe durch $R_\nu(x)^{g,h}$ bezeichnet. Für negative Argumente werde $f(x)$ in verschiedener Weise definiert.

1) Es werde festgesetzt

$$f(-x) = -f(x), \qquad f(x + 2\pi) = f(x); \tag{1}$$

dann gelten die Gleichungen

$$\int_g^h f(\alpha) \sin \nu\alpha \, d\alpha = -\int_{-g}^{-h} f(\alpha) \sin \nu\alpha \, d\alpha,$$

$$\int_g^h f(\alpha) \cos \nu\alpha \, d\alpha = \int_{-g}^{-h} f(\alpha) \cos \nu\alpha \, d\alpha,$$

und aus ihnen folgt sofort

$$R_1^{g,h} = R^{g,h} - R^{-g,-h}. \tag{2}$$

Nun ist die durch die Gleichungen (1) definierte erweiterte Funktion $f(x)$ im allgemeinen an den Stellen $x = 0$ und $x = \pm\pi$ unstetig; unter der besonderen Voraussetzung

$$f(0) = f(\pi) = 0$$

fallen jedoch diese Unstetigkeiten weg, und wenn $f(x)$ außerdem von $x=0$ bis $x=\pi$ stetig ist, so zeigt die Eigenschaft I kombiniert mit der Gleichung (2), in der man $g=0$ und $h=\pi$ setzt, daß die Reihe $R_1^{0,\pi}$ in dem bezeichneten Intervall gleichmäßig konvergiert.

Wenn ferner
$$\pi > x > g \geqq 0,$$
so ist
$$x-g < 2\pi, \qquad x-(-x) < 2\pi;$$
in der Eigenschaft II können also x und g, in der Eigenschaft III die Werte $-x$ und $-g$ für g und h genommen werden und man findet
$$R^{g,x} = \frac{1}{2} f(x-0), \qquad R^{-g,-x} = 0,$$
also
$$R_1^{g,x} = \frac{1}{2} f(x-0). \tag{3}$$
Ebenso ergibt sich, wenn
$$\pi \geqq h > x > 0$$
ist, die der Formel (3) analoge
$$R_1^{x,h} = \frac{1}{2} f(x+0). \tag{4}$$
Endlich gilt nach III bei einer der Annahmen
$$0 \leqq x < g, \qquad \pi \geqq x > h$$
die Gleichung
$$R_1^{g,h} = 0, \tag{5}$$
da x außerhalb der Intervalle von g bis h und von $-g$ bis $-h$ liegt, und von keinem ihrer Punkte den Abstand 2π hat.

2) Erweitert man die Definition von $f(x)$ durch die Gleichungen
$$f(-x) = f(x), \qquad f(x+2\pi) = f(x),$$
so findet man leicht
$$\int_g^h f(\alpha) \sin \nu\alpha \, d\alpha = \int_{-g}^{-h} f(\alpha) \sin \nu\alpha \, d\alpha,$$
$$\int_g^h f(\alpha) \cos \nu\alpha \, d\alpha = -\int_{-g}^{-h} f(\alpha) \cos \nu\alpha \, d\alpha,$$
und hieraus
$$R^{g,h} - R^{-g,-h} = R_2^{g,h} = \frac{1}{\pi}\int_g^h f(\alpha)\, d\alpha + \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{2}{\pi} \cos \nu x \int_g^h f(\alpha) \cos \nu\alpha \, d\alpha. \tag{6}$$
Dabei ist die erweiterte Funktion von $x=g$ bis $x=h$ stetig, wenn dies von der ursprünglichen gilt; die Eigenschaft I ergibt also daß die Reihe $R_2^{0,\pi}$ von $x=0$ bis $x=\pi$ gleichmäßig konvergiert, wenn $f(x)$ auf dieser Strecke stetig ist.

Man findet ferner aus der Gleichung (6) genau wie unter 1) die Gleichungen (3), (4), (5), in denen R_2 für R_1 gesetzt ist, unter den dort ausgesprochenen Voraussetzungen.

3) Um ähnliche Entwicklungen für die Reihe R_3 durchführen zu können, werde

$$f(2x) = \bar{f}(x)$$

gesetzt, sodaß $\bar{f}$ zunächst nur von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$ gegeben ist; in weiterem Umfang definieren wir durch die Gleichungen

$$\bar{f}(\pi - x) = \bar{f}(x), \qquad \bar{f}(-x) = -\bar{f}(x), \tag{7}$$

aus denen die Periodizität

$$\bar{f}(x + 2\pi) = \bar{f}(x)$$

folgt, sodaß $\bar{f}$ unter 1) für f gesetzt und zur Bildung einer Reihe R_1 benutzt werden kann, die wir durch $\bar{R}_1$ bezeichnen. Nun findet man leicht aus der ersten Gleichung (7)

$$\begin{aligned}
\int_g^h \bar{f}(\alpha) \sin 2\nu\alpha \, d\alpha \quad &= \int_{\pi-g}^{\pi-h} \bar{f}(\alpha) \sin 2\nu\alpha \, d\alpha, \\
\int_g^h \bar{f}(\alpha) \sin (2\nu + 1)\alpha \, d\alpha &= -\int_{\pi-g}^{\pi-h} \bar{f}(\alpha) \sin (2\nu + 1)\alpha \, d\alpha,
\end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{aligned}
\bar{R}_1^{g,h} - \bar{R}_1^{\pi-g,\pi-h} &= \sum_\nu^{0,\infty} \frac{4}{\pi} \sin (2\nu + 1)x \int_g^h \bar{f}(\alpha) \sin (2\nu + 1)\alpha \, d\alpha \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_\nu^{0,\infty} \sin (2\nu + 1)x \int_{2g}^{2h} f(\alpha) \sin \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \alpha \, d\alpha \\
&= R_3(2x)^{2g,2h},
\end{aligned}$$

oder auch

$$\bar{R}_1 \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}g, \frac{1}{2}h} - \bar{R}_1 \left(\frac{x}{2}\right)^{\pi - \frac{1}{2}g, \pi - \frac{1}{2}h} = R_3^{g,h}. \tag{8}$$

Diese Gleichung ergibt bei einer der Voraussetzungen

$$\pi > x > g \geqq 0, \qquad \pi \geqq h > x > 0, \tag{9}$$

da dann $\frac{x}{2}$ außerhalb der Strecke von $\pi - \frac{1}{2}h$ bis $\pi - \frac{1}{2}g$ liegt, also der Gleichung (5) zufolge

$$\bar{R}_1 \left(\frac{x}{2}\right)^{\pi - \frac{1}{2}g, \pi - \frac{1}{2}h} = 0$$

ist, die einfachere Formel

$$R_3^{g,h} = \bar{R}_1 \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}g, \frac{1}{2}h},$$

und die Gleichungen (3), (4) zeigen sofort, je nachdem die erste oder zweite Voraussetzung (9) gilt,

$$R_3^{g,x} = \frac{1}{2}\bar{f}\left(\frac{x}{2}-0\right) = \frac{1}{2}f(x-0)$$

oder

$$R_3^{x,h} = \frac{1}{2}\bar{f}\left(\frac{x}{2}+0\right) = \frac{1}{2}f(x+0).$$

Ferner erhält man, wenn eine der Ungleichungen

$$0 \leqq x < g, \qquad \pi \geqq x > h$$

gilt, aus der Gleichung (8), da in beiden Fällen auch

$$\frac{x}{2} < \pi - \frac{1}{2}h < \pi - \frac{1}{2}g$$

ist, die Folgerung

$$R_3^{g,h} = 0.$$

Damit sind auch für R_3 Gleichungen von derselben Form wie (3), (4), (5) unter denselben Voraussetzungen nachgewiesen.

Was endlich die Eigenschaft I betrifft, so ist davon auszugehen, daß $\bar{f}(x)$ im allgemeinen an der Stelle $x = 0$ unstetig ist, und daß diese Unstetigkeit wegfällt bei der Annahme

$$f(0) = 0; \tag{10}$$

die an der Stelle $x = \pi$ erscheinende Unstetigkeit von $\bar{f}(x)$ braucht nicht beachtet zu werden, da auf der linken Seite der Gleichung (8) nur $\bar{f}\left(\frac{x}{2}\right)$ vorkommt. Die Eigenschaft I ergibt also bei der Voraussetzung (10) und wenn $f(x)$ von $x = 0$ bis $x = \pi$ stetig ist, daß die Reihe $R_3^{0,\pi}$ auf dieser Strecke gleichmäßig konvergiert.

4) Die Reihe R_4 bedarf keiner besonderen Betrachtung; denn die Identität

$$\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x\int_g^h f(\alpha)\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\alpha\,d\alpha$$

$$= \cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(\pi-x)\int_{\pi-g}^{\pi-h} f(\pi-\alpha)\cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\alpha\,d\alpha$$

zeigt, daß die mit der Funktion $f(\pi-x)$ gebildete Reihe $R_4^{\pi-g,\pi-h}$ mit der früher betrachteten $R_3^{g,h}$ identisch ist. Man sieht hieraus leicht, daß die für R_3 erhaltenen Resultate auch für R_4 gelten mit der einen Modifikation, daß in der Gleichung (10) die linke Seite durch $f(\pi)$ ersetzt wird.

Die ganze Entwicklung dieses Paragraphen ergibt, daß Verschiedenheiten bei den Reihen R_ν nur da auftreten, wo es sich um die Eigenschaft I und ihre Ausdehnung handelt; die bei der Reihe R_1 in den

Gleichungen (3), (4), (5) ausgedrückten Eigenschaften kommen unter genau denselben Voraussetzungen auch bei den übrigen Reihen vor. Führt man jetzt die neuen Bezeichnungen

$$z = \frac{xZ}{\pi}, \quad f\left(\frac{\pi z}{Z}\right) = \varphi(z), \quad \xi = \frac{gZ}{\pi}, \quad \eta = \frac{hZ}{\pi}$$

ein, so entsprechen den Intervallen von $x = 0$ bis $x = \pi$ und von $x = g$ bis $x = h$ die Strecken von $z = 0$ bis $z = Z$ und von $z = \xi$ bis $z = \eta$, in deren erster $\varphi(z)$ der Dirichletschen Bedingung genügt, und die Reihen $R_\nu^{g,h}$ werden, wenn man nach wachsenden Werten von ν ordnet:

$$\frac{2}{Z} \sum_{\nu}^{1,\infty} \sin \frac{\nu\pi z}{Z} \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \sin \frac{\nu\pi\alpha}{Z}\, d\alpha,$$

$$\frac{1}{Z} \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha)\, d\alpha + \frac{2}{Z} \sum_{\nu}^{1,\infty} \cos \frac{\nu\pi z}{Z} \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \cos \frac{\nu\pi\alpha}{Z}\, d\alpha,$$

$$\frac{2}{Z} \sum_{\nu}^{0,\infty} \sin \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{Z} \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \sin \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi\alpha}{Z}\, d\alpha,$$

$$\frac{2}{Z} \sum_{\nu}^{0,\infty} \cos \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{Z} \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \cos \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi\alpha}{Z}\, d\alpha;$$

bezeichnet man daher eine dieser Reihen durch $R^{\xi,\eta}$, so zeigen die erwähnten gemeinsamen Resultate bei der stets geltenden Voraussetzung

$$0 \leqq \xi < \eta \leqq Z$$

folgendes. Wenn eine der Annahmen

$$Z > z > \xi, \qquad \eta > z > 0$$

gemacht wird, so folgt die entsprechende der Gleichungen

$$R^{\xi,z} = \frac{1}{2}\varphi(z - 0), \qquad R^{z,\eta} = \frac{1}{2}\varphi(z + 0);$$

Wenn dagegen eine der Beziehungen

$$0 \leqq z < \xi, \qquad Z \geqq z > \eta$$

gilt, so ist

$$R^{\xi,\eta} = 0.$$

Gleichmäßig konvergent ist die Reihe $R^{0,Z}$ von $z = 0$ bis $z = Z$, wenn $\varphi(z)$ in diesem Intervall stetig ist, und bei der ersten Reihe $\varphi(0)$ und $\varphi(Z)$, bei der dritten $\varphi(0)$, bei der vierten $\varphi(Z)$ verschwindet.

II. Die Darstellung willkürlicher Funktionen beim Problem der radial abkühlenden Kugel.

§ 6.

Modifikation des § 2.

Beim Problem der Wärmebewegung in einer Kugel, deren Temperatur in jeder mit der Oberfläche konzentrischen Kugelschicht konstant ist, wird*) folgende analytische Aufgabe gestellt. Es soll eine im Intervall von $x = 0$ bis $x = \pi$ willkürlich gegebene Funktion $f(x)$ in eine Reihe

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{\nu}^{0, \infty} a_\nu \sin \varrho_\nu x$$

entwickelt werden, wenn $\varrho_0, \varrho_1, \cdots$ die positiven Wurzeln der Gleichung

$$(2) \qquad H \sin \varrho\pi + \varrho \cos \varrho\pi = 0$$

sind, in welcher H eine positive Konstante bedeutet. Dabei erscheint die Funktion $f(x)$ in der speziellen Form

$$f(x) = x F(x),$$

und $F(x)$ ist, wenn der Radius durch passende Wahl der Längeneinheit $= \pi$ gemacht wird, die Anfangstemperatur der untersuchten Kugel als Funktion des Abstandes vom Mittelpunkte, also eine im Intervall von $x = 0$ bis $x = \pi$ endliche stetige Funktion von x, sodaß es für die Aufgabe der Wärmelehre genügt, stetige Funktionen $f(x)$ zu betrachten, für welche

$$f(0) = 0.$$

Daß nun eine konvergente Entwicklung (1) unter angemessenen Voraussetzungen hinsichtlich der Funktion $f(x)$ möglich ist, läßt sich durch eine ähnliche Schlußreihe wie die im Abschnitt I für die Fouriersche Reihe benutzte ableiten.

Zu diesem Zweck gehen wir davon aus, daß der Gleichung (2) zufolge, wenn man V für $\sin \varrho x$ setzt, die Relationen

$$\frac{dV}{dx} + HV \Big|^{\pi} = 0, \qquad V|^{0} = 0$$

gelten, während V die Gleichung

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \varrho^2 V = 0$$

erfüllt, und bestimmen u als Integral der Gleichung

$$u'' + \varrho^2 u + f(x) = 0$$

*) Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen II, § 52 ff.

bei willkürlichen Werten von ϱ durch die Anfangsbedingungen

$$(3)\qquad u|^0 = 0, \qquad u' + Hu|^\pi = 0.$$

Man hat dann, indem man unter $p(x)$ dieselbe Größe wie in § 1, unter A und B Konstante versteht, den Ausdruck

$$u = p(x) + A \sin \varrho x + B \cos \varrho x;$$

da nun

$$p(0) = p'(0) = 0,$$

so ergeben die Gleichungen (3)

$$B = 0, \quad p'(\pi) + Hp(\pi) + A(\varrho \cos \varrho\pi + H \sin \varrho\pi) = 0,$$

und wenn man

$$\varpi(\varrho) = \varrho \cos \varrho\pi + H \sin \varrho\pi$$

setzt, so erhält man:

$$u = \frac{p(x)(\varrho \cos \varrho\pi + H \sin \varrho\pi) - \sin \varrho x\,(p'(\pi) + Hp(\pi))}{\varpi(\varrho)}.$$

Der Zähler dieses Bruches ist, wie der explizite Ausdruck $p(x)$ zeigt, eine ganze Funktion von ϱ, die mit ϱ verschwindet, und durch $G(\varrho)$ bezeichnet werde. Der Nenner hat die Nullstellen 0 und $\pm \varrho_\nu$, deren erste, da sie einfach ist und $G(0)$ verschwindet, keine Singularität verursacht. Die übrigen sind ebenfalls einfach*), und man findet sofort

$$G(\pm \varrho_\nu) = \pm \sin \varrho_\nu x\,(p'(\pi) + Hp(\pi))|^{\varrho = \varrho_\nu};$$

da ferner allgemein

$$p'(\pi) + Hp(\pi) = \frac{1}{\varrho}\int_0^\pi f(\alpha) \sin \varrho\alpha\,(H \cos \varrho\pi - \varrho \sin \varrho\pi)\,d\alpha$$

$$-\frac{1}{\varrho}\int_0^\pi f(\alpha) \cos \varrho\alpha\,(\varrho \cos \varrho\pi + H \sin \varrho\pi)\,d\alpha,$$

und für $\varrho = \varrho_\nu$

$$p'(\pi) + Hp(\pi) = \frac{H \cos \varrho_\nu\pi - \varrho_\nu \sin \varrho_\nu\pi}{\varrho_\nu}\int_0^\pi f(\alpha) \sin \varrho_\nu\alpha\,d\alpha,$$

so ist

$$G(\pm \varrho_\nu) = 0,$$

sobald

$$(4)\qquad \int_0^\pi f(\alpha) \sin \varrho_\nu\alpha\,d\alpha = 0.$$

Gilt also diese Gleichung für alle ganzen Zahlen ν, so ist u eine

*) Riemann-Weber II, § 53.

ganze Funktion von ϱ für alle dem Intervall von 0 bis π angehörigen Werte von x, und man kann in der Form

$$u = u_0 + u_1\varrho^2 + u_2\varrho^4 + \cdots$$

entwickeln, da allgemein

$$G(\varrho) = -G(-\varrho), \qquad \varpi(\varrho) = -\varpi(-\varrho),$$

also u eine gerade Funktion von ϱ ist.

Die Koeffizienten haben, wenn $f(x)$ eine stetige Funktion ist, dieselben Stetigkeitseigenschaften wie die ebenso bezeichneten Größen in § 2, und man erhält wie dort die Rekursionsformeln

$$u_0'' + f(x) = 0, \qquad u_{\nu+1}'' + u_\nu = 0.$$

Die Anfangsbedingungen (3) ergeben ferner

$$u_\nu|^0 = 0, \qquad u_\nu' + Hu_\nu|^\pi = 0,$$

sodaß jedenfalls die Gleichungen (6) des § 2 gelten, d. h.

$$u_{m+1}u_n' - u_{m+1}'u_n\Big|_0^\pi = 0.$$

Aus diesen aber folgt mit genau denselben Schlüssen wie in § 2, daß u nur dann eine ganze Funktion von ϱ sein kann, wenn $f(x)$ in dem ganzen Intervall von $x = 0$ bis $x = \pi$ verschwindet. Kombiniert man dieses Resultat mit der oben gefundenen Bedeutung der Gleichungen (4), so erhält man folgenden Satz.

Ist $f(x)$ eine in dem Intervall von $x = 0$ bis $x = \pi$ stetige Funktion und bestehen alle Gleichungen

$$\int_0^\pi f(\alpha) \sin \varrho_\nu \alpha \, d\alpha = 0,$$

in denen ϱ_ν irgend eine positive Wurzel der mit einer positiven Konstanten H gebildeten Gleichung

$$\varrho \cos \varrho\pi + H \sin \varrho\pi = 0$$

ist, so hat $f(x)$ in dem bezeichneten Intervall überall den Wert Null.

Die Funktion u, die beim Beweis dieses Resultat benutzt wurde, ist im wesentlichen mit der von Cauchy eingeführten meromorphen Hülfsfunktion identisch.

§ 7.

Die Möglichkeit der Entwicklung.

Auf die gesuchte Entwicklung

$$(1) \qquad f(x) = \sum_\nu^{0,\infty} a_\nu \sin \varrho_\nu x$$

kann man, wenn die Reihe von $x = 0$ bis $x = \pi$ gleichmäßig konvergiert und die Entwicklung überhaupt möglich ist, die bekannte Fouriersche Argumentation anwenden, welche die Koeffizienten kennen lehrt. Es gilt nämlich, wenn μ und ν verschiedene ganze Zahlen sind, die Gleichung*)

$$\int_0^\pi \sin \varrho_\nu \alpha \sin \varrho_\mu \alpha \, d\alpha = 0;$$

aus dieser folgt, da bei den eingeführten Annahmen in der Gleichung (1), auch nachdem man mit $\sin \varrho_\nu x$ multipliziert hat, gliedweise integriert werden darf,

$$a_\nu \int_0^\pi \sin^2 \varrho_\nu \alpha \, d\alpha = \int_0^\pi f(\alpha) \sin \varrho_\nu \alpha \, d\alpha.$$

Bildet man nun umgekehrt mit den hierdurch definierten Größen a_ν die Reihe

$$\varphi(x) = \sum_\nu^{0,\infty} a_\nu \sin \varrho_\nu x,$$

und gelingt es, die Funktion $f(x)$ so zu beschränken, daß diese Reihe von $x = 0$ bis $x = \pi$ gleichmäßig konvergiert, so ist $\varphi(x)$ jedenfalls eine in dem bezeichneten Intervall stetige Funktion von x; man findet wie oben

$$a_\nu \int_0^\pi \sin^2 \varrho_\nu \alpha \, d\alpha = \int_0^\pi \varphi(\alpha) \sin \varrho_\nu \alpha \, d\alpha,$$

also

$$\int_0^\pi (f(\alpha) - \varphi(\alpha)) \sin \varrho_\nu \alpha \, d\alpha = 0,$$

und nach § 6 ergibt sich die gewünschte Gleichung

$$f(x) = \varphi(x)$$

für die ganze Strecke von 0 bis π. Damit ist die Richtung der weiteren Untersuchung gegeben; sie weicht von der analogen im Abschnitt I hauptsächlich deshalb ab, weil die Größen ϱ_ν weniger einfache Werte haben als die dort an der entsprechenden Stelle erscheinenden Konstanten.

Wir beginnen mit der schon von Fourier gemachten Bemerkung**), daß man

$$\varrho_\nu = \nu + \frac{1}{2} + \varepsilon_\nu \tag{2}$$

setzen kann, wobei

$$\lim_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 0.$$

---

*) Riemann-Weber II, § 54.

**) Riemann-Weber II, § 53.

Trägt man diese Werte in die Gleichung

$$\varpi(\varrho_\nu) = 0$$

ein, so findet man

$$\operatorname{tg} \varepsilon_\nu \pi = \frac{H}{\nu + \frac{1}{2} + \varepsilon_\nu}$$

und erhält den Ausdruck

(3) $$\varepsilon_\nu = \frac{e_\nu}{\nu},$$

in welchem alle Größen e_ν zwischen endlichen von ν unabhängigen Grenzen liegen.

Man findet ferner leicht*)

$$\int_0^\pi \sin^2 \varrho_\nu \alpha \, d\alpha = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{2H}{\pi(\varrho_\nu^2 + H^2)}\right),$$

und die Gleichungen (2), (3) ergeben

$$1 : \int_0^\pi \sin^2 \varrho_\nu \alpha \, d\alpha = \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{m_\nu}{\nu^2}\right),$$

wobei durch m_ν Größen von derselben Beschaffenheit wie e_ν bezeichnet werden; hieraus folgt

(4) $$a_\nu = \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{m_\nu}{\nu^2}\right)\int_0^\pi f(\alpha) \sin \varrho_\nu \alpha \, d\alpha.$$

Nimmt man nun an, $f(x)$ habe in dem betrachteten Intervall stetige erste und zweite Ableitungen, und es sei gemäß den Anforderungen des Wärmeleitungsproblems

$$f(0) = 0,$$

so erhält man durch partielle Integration die Formel

$$\int_0^\pi f(\alpha) \sin \varrho_\nu \alpha \, d\alpha = -\frac{f(\alpha) \cos \varrho_\nu \alpha}{\varrho_\nu} + \frac{f'(\alpha) \sin \varrho_\nu \alpha}{\varrho_\nu^2}\Bigg|_0^\pi - \frac{1}{\varrho_\nu^2}\int_0^\pi f''(\alpha) \sin \varrho_\nu \alpha \, d\alpha$$

oder, da die Gleichung

$$\cos \varrho_\nu \pi = -\frac{H \sin \varrho_\nu \pi}{\varrho_\nu},$$

gilt,

$$\int_0^\pi f(\alpha) \sin \varrho_\nu \alpha \, d\alpha = \frac{[Hf(\pi) + f'(\pi)] \sin \varrho_\nu \pi}{\varrho_\nu^2} - \frac{1}{\varrho_\nu^2}\int_0^\pi f''(\alpha) \sin \varrho \alpha \, d\alpha.$$

*) Riemann-Weber II, § 54.

Das Integral auf der rechten Seite liegt dem absoluten Werte nach unter einer leicht angebbaren Konstanten; mit Berücksichtigung der Formeln (2), (4) kann man also setzen

$$a_\nu = \frac{q_\nu}{\nu^2},$$

wobei q_ν zwischen endlichen von ν unabhängigen Grenzen verbleibt. Daraus ist aber unmittelbar ersichtlich, daß die Reihe

$$\sum a_\nu \sin \varrho_\nu x$$

unter den eingeführten Voraussetzungen nicht nur in dem gewünschten Umfange gleichmäßig, sondern auch absolut konvergiert; denn ihre Glieder sind absolut kleiner als die entsprechenden der mit einer gewissen positiven Konstanten multiplizierten Reihe

$$\sum \frac{1}{\nu^2}.$$

Erinnert man sich jetzt der an die Fouriersche Argumentation geknüpften Bemerkungen, so sieht man, daß folgender Satz bewiesen ist: *Eine Funktion $f(x)$, die in dem Intervall von $x = 0$ bis $x = \pi$ mit ihrer ersten und zweiten Ableitung stetig ist und für $x = 0$ verschwindet, kann stets in eine für das bezeichnete Intervall gleichmäßig konvergierende Reihe*

$$f(x) = \sum_\nu^{0,\infty} a_\nu \sin \varrho_\nu x$$

entwickelt werden, wenn die Größen ϱ_ν durch die Gleichung

$$\varrho_\nu \cos \varrho_\nu \pi + H \sin \varrho_\nu \pi = 0$$

definiert sind, und H eine positive Konstante bedeutet.

Allgemeinere Bedingungen, unter denen die hier untersuchte Entwicklung willkürlicher Funktionen möglich ist, ergeben sich aus § 16.

III. Die Sturm-Liouvillesche Darstellung willkürlicher Funktionen.

§ 8.

Zur Geschichte des Problems.

Nach den allgemeinen Sturm-Liouvilleschen Normalfunktionen V_ν hat man eine willkürliche Funktion z. B. beim Problem der Abkühlung eines heterogenen geradlinigen Stabes zu entwickeln. Erstreckt dieser sich längs der Abszissenachse von $x = 0$ bis $x = X$ und ist g die spezifische Wärme,

k die innere Leitfähigkeit, l das Strahlungsvermögen, t die Zeit, so genügt die Temperatur u der partiellen Differentialgleichung

$$(1)\qquad g\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)-lu,$$

und den Grenzbedingungen

$$(2)\qquad \begin{aligned} k\frac{\partial u}{\partial x}-hu\Big|^{x=0}&=0,\\ k\frac{\partial u}{\partial x}+Hu\Big|^{x=X}&=0,\end{aligned}$$

in denen h und H die Werte der äußeren Leitfähigkeit in den Endquerschnitten, also positive Konstante bedeuten. Von hier aus kommt man zu den von t unabhängigen Funktionen V und der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(3)\qquad \frac{d}{dx}\left(k\frac{dV}{dx}\right)+(gr-l)V=0$$

durch die Substitution

$$u=Ve^{-rt},$$

wobei r eine Konstante ist, und die Grenzbedingungen (2) die Gleichung

$$\varpi(r)=0$$

ergeben, deren Wurzeln $r_1, r_2, \cdots$ den einzelnen Normalfunktionen $V_1, V_2, \cdots$ entsprechen. Die willkürliche Funktion $f(x)$, welche in die Reihe

$$(4)\qquad f(x)=\sum A_\nu V_\nu$$

entwickelt werden muß, ist die Temperatur zur Zeit $t=0$.

Dasselbe analytische Problem tritt bei verschiedenen Fragen der mathematischen Physik auf; als ein besonders eleganter Fall sei Kirchhoffs Theorie der Diffusion von Gasen durch eine poröse Wand erwähnt*), bei welcher k und g Konstante, h und H beide positiv sind und l identisch verschwindet, sodaß die Normalfunktionen trigonometrische werden.

Daß eine solche Darstellung (4) möglich ist, beweist Stekloff**) in einer schönen Abhandlung unter der Voraussetzung, daß die Funktion $f(x)$ stetige erste und zweite Ableitungen besitzt und den Gleichungen

$$(5)\qquad k(0)f'(0)-hf(0)=0,\qquad k(X)f'(X)+Hf(X)=0$$

genügt. Diese den Gleichungen (2) analogen Beschränkungen sind der Natur des Problems angemessen z. B. bei den Schwingungen einer heterogenen Saite, welche ebenfalls auf die Gleichung (3) führen; man hat hier, wenn die Saite in den Punkten $x=0$ und $x=X$ befestigt ist,

$$h=H=\infty$$

---

*) Kirchhoff, Abhandlungen III, S. 82. Wiedemanns Annalen Bd. 21, 1884.

**) Problème de refroidissement d'une barre hétérogène, Annales de la faculté des sciences de Toulouse (2) III.

zu setzen und, da $f(x)$ die Anfangsgestalt der Saite bestimmt, von vornherein nur solche Funktionen zu betrachten, die für $x=0$ und $x=X$ verschwinden. Anders liegt die Sache bei dem Problem der Wärmeleitung. Hier bilden die Gleichungen (5) eine wesentliche und vom physikalischen Standpunkt wohl durchaus willkürlich erscheinende Beschränkung, durch welche z. B. der Fall einer konstanten Anfangstemperatur ausgeschlossen wird.

Allerdings gibt Stekloff auch für eine den Bedingungen (5) nicht unterworfene Funktion eine Darstellung, die z. B., wenn k konstant, etwa gleich Eins ist, die Form

$$f(x) = A + Bx + \sum_\nu A_\nu V_\nu \tag{6}$$

hat. Eine solche Entwicklung ist aber für das Wärmeleitungsproblem nicht zu gebrauchen; denn bei diesem leitet man aus der Reihe (4) ein Integral der partiellen Differentialgleichung (1) in der Form

$$u = \sum e^{-r_\nu t} V_\nu$$

her, welches den Anfangsbedingungen genügt. Nun könnte man versuchen, aus der Reihe (6) in analoger Weise ein Integral

$$u = A\varphi(t) + Bx\psi(t) + \sum_\nu A_\nu e^{-r_\nu t} V_\nu$$

zu bilden, welches, wenn

$$\varphi(0) = \psi(0) = 1 \tag{7}$$

ist, für $t=0$ in die Anfangstemperatur $f(x)$ übergeht. Aber die Gleichung (1) würde, da die einzelnen Glieder

$$e^{-r_\nu t} V_\nu$$

partikuläre Integrale sind, ergeben

$$g(A\varphi'(t) + Bx\psi'(t)) = -l(A\varphi(t) + Bx\psi(t)),$$

also wenn man $t=0$ setzte und die Gleichungen (7) benutzte,

$$g(A\varphi'(0) + Bx\psi'(0)) = -l(A+Bx).$$

Die Größen A und B verschwinden aber nach der von Stekloff gegebenen Bestimmung*) nicht beide, wenn die Gleichungen (5) nicht gelten; die erhaltene Gleichung würde also eine ganz besondere analytische Beziehung zwischen den Funktionen g und l fordern, und kann daher im allgemeinen nicht als richtig angesehen werden. Ob auf eine andere Weise die Entwicklung (6) mit besserem Erfolg für die Wärmeleitungsaufgabe zu verwerten ist, lasse ich dahingestellt.

Mit Rücksicht auf diese Verhältnisse und darauf, daß Liouville selbst die Beschränkung (5) ausdrücklich für unzulässig erklärt**), darf

*) a. a. O. S. 313, Gleichungen (51).

**) Journal de math. (1) II, S. 419.

wohl behauptet werden, daß diejenige Darstellung willkürlicher Funktionen durch die Normalfunktionen, mit welcher sich Sturm und Liouville beschäftigt haben, noch nicht als möglich und konvergent nachgewiesen ist. Dieses Ziel hoffe ich auf den folgenden Blättern zu erreichen, indem ich die in den ersten Abschnitten auf spezielle Fragen angewandten Methoden mit Entwicklungen kombiniere, die Liouville in der bewundernswerten dritten Abhandlung*) über unsern Gegenstand gegeben hat.

§ 9.

Die Cauchysche Hülfsfunktion.

Das Intervall von $x = 0$ bis $x = X$, dem wir stets seine Grenzen zurechnen, heiße J; in ihm seien k, g, l stetige mit stetigen ersten und zweiten Ableitungen versehene Funktionen von x, die ersten beiden positiv und die dritte nicht negativ; r sei eine Konstante und w_1, w_2 zwei voneinander unabhängige Lösungen der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dy}{dx}\right) + (gr - l)y = 0 \tag{1}$$

die auf eine von r unabhängige Weise, etwa durch die Anfangswerte

$$w_1(0) = w_2'(0) = 0, \quad w_1'(0) = w_2(0) = 1 \tag{2}$$

bestimmt seien. Sie sind in dem Intervall J mit ihren ersten Ableitungen endlich und stetig, da dies in der Gleichung (1) von den Koeffizienten der Größen y und y' gilt, wenn man den Faktor von y'' auf den Wert 1 bringt. Anders wäre es, wenn k an einzelnen Stellen des Intervalls J verschwände, und hierauf beruht es, daß die Entwicklung nach Besselschen Funktionen besondere Methoden erfordert.

Die Integrale w_1, w_2 können ferner**) in beständig konvergente Potenzreihen des Arguments r entwickelt werden, deren Koeffizienten in dem Intervall J dieselben Stetigkeitseigenschaften wie die Integrale selbst besitzen, und die zitierte Argumentation von Picard zeigt, daß die Reihen w_1, w_2 bei festem r hinsichtlich der Variablen x im Intervall J gleichmäßig konvergieren. Ebenso sind auch w_1' und w_2' ganze Funktionen von r, die aus w_1 und w_2 entstehen, indem man die nach Potenzen von r geordneten Ausdrücke gliedweise differenziert. Schreibt man nämlich die Gleichung (1) in der Form

$$y'' + Py' + Qy = 0,$$

---

*) Journal de math. (1) II, S. 418.

**) Picard, Traité d'analyse III, S. 92.

so folgt, indem man die Gleichungen (2) benutzt,

$$w_1' - 1 = -Pw_1 \Big|_0^x + \int_0^x (P' - Q) w_1 \, dx.$$

Hieraus sieht man zunächst, daß w_1' eine ganze Funktion von r ist, und da das Integral einer im Gebiet J gleichmäßig konvergenten Reihe, wenn man von 0 bis x integriert und x demselben Gebiet angehört, ebenfalls gleichmäßig konvergiert, kann man w_1' gliedweise integrieren, um w_1 zu erhalten, womit das Behauptete erwiesen ist. Analoge Schlüsse gelten offenbar für w_2.

Die der Gleichung (1) zugehörigen Normalfunktionen V_ν seien nun durch die Gleichungen

(3) $$k\frac{dV}{dx} - hV\Big|^0 = k\frac{dV}{dx} + HV\Big|^X = 0$$

definiert, in denen h, H Konstante bedeuten; wir schließen auch den Fall nicht aus, daß h und H oder eine dieser Größen den Wert ∞ annimmt d. h. daß eine der Gleichungen (3) oder beide in die Form

(4) $$V|^0 = 0, \quad V|^X = 0$$

übergehen. Dann bilden wir die Cauchysche Hülfsfunktion, d. h. dasjenige Integral der Gleichung

(5) $$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dS}{dx}\right) + (gr - l)S + f(x) = 0,$$

welches für V gesetzt den für die Normalfunktionen charakteristischen Grenzbedingungen (3) oder (4) genügt.

Zu diesem Zweck gehen wir davon aus, daß, wenn $f(x)$ eine beliebige auf der Strecke J stetige Funktion ist, die Gleichung (5) zunächst das Integral

$$p(x) = w_1 \int_0^x \frac{w_2 f(x)\, dx}{\Delta} - w_2 \int_0^x \frac{w_1 f(x)\, dx}{\Delta},$$

hat, wobei

$$\Delta = w_1 w_2' - w_2 w_1'$$

gesetzt ist; die Gleichungen (2) ergeben nach bekannten Schlüssen

$$\Delta = \frac{\text{const.}}{k} = \frac{k(0)}{k},$$

und es ist offenbar

$$p(0) = p'(0) = 0.$$

Das allgemeine Integral der Gleichung (5) kann aber in der Form

$$S = p(x) + C_1 w_1 + C_2 w_2$$

geschrieben werden, wobei C_1 und C_2 von x unabhängige Größen sind;

bei endlichen Werten von h und H ergeben sich also aus den Grenzbedingungen die Gleichungen

$$(6)\qquad \begin{aligned} C_1(kw_1' - hw_1) + C_2(kw_2' - hw_2)|^0 &= 0, \\ C_1(kw_1' + Hw_1) + C_2(kw_2' + Hw_2)|^X &= -p'k - Hp|^X. \end{aligned}$$

Ist einer der Werte h, H oder beide unendlich, so treten eine der folgenden oder beide an Stelle der hingeschriebenen:

$$(7)\qquad \begin{aligned} C_1 w_1 + C_2 w_2|^0 &= C_2 = 0, \\ C_1 w_1 + C_2 w_2|^X &= -p(X). \end{aligned}$$

In jedem Falle ist die Determinante der Koeffizienten von C_1 und C_2 in den beiden Gleichungen ebenso wie w_1, w_2, w_1', w_2' eine ganze Funktion von r, die wir $\varpi(r)$ nennen; da nun auch p als Funktion von r dieselbe Beschaffenheit hat, so kann man

$$(8)\qquad S = \frac{W}{\varpi(r)}$$

setzen, und W ist eine ganze Funktion von r, die nach x ebenso wie w_1 und w_2 gliedweise differenziert werden darf, und die ebenso wie S den für die Normalfunktionen charakteristischen Grenzbedingungen genügt.

Die hier auftretende Größe $\varpi(r)$ ist für die Theorie der Normalfunktionen von fundamentaler Bedeutung: man erhält nämlich die Gleichung

$$(9)\qquad \varpi(r) = 0,$$

wenn man zum Ausdruck bringt, daß die Größe $C_1 w_1 + C_2 w_2$ den Grenzbedingungen (3) oder (4) genügen soll; damit fordert man Gleichungen, die aus den Systemen (6), (7) hervorgehen, indem man in der zweiten Gleichung auf der rechten Seite Null schreibt. Die Gleichung (9) definiert also diejenigen Werte r_ν, welche für r gesetzt die Gleichung (1) in die Differentialgleichung der Normalfunktion V_ν überführen. Von diesen verschwindet keine identisch, da man für C_1 und C_2 stets Werte erhalten kann, die den bezeichneten Gleichungen genügen und nicht beide den Wert Null haben, w_1 und w_2 aber linear unabhängige Integrale sind. Hieraus folgt weiter*), daß die Gleichung (9) nur einfache Wurzeln besitzt. Die Größe S hat daher als Funktion von r an Singularitäten nur einfache Pole, und diese an keinen andern Stellen als $r = r_\nu$.

Nun folgt aus der Differentialgleichung (5), wenn man den Ausdruck (8) einsetzt, unmittelbar

$$(10)\qquad \frac{d}{dx}\left(k\frac{dW}{dx}\right) + (gr - l)\,W + f(x)\,\varpi(r) = 0;$$

*) Jordan, Cours d'analyse III, Nr. 307.

für den speziellen Wert $r = r_\nu$ genügt daher W, da $\varpi(r_\nu)$ verschwindet, derselben Differentialgleichung wie die Normalfunktion V_ν. Außerdem gelten für W und V_ν dieselben Anfangsbedingungen; aus der auf den Wert $x = 0$ bezüglichen folgt somit

$$W(r_\nu) = C_\nu V_\nu,$$

wobei C_ν eine Konstante ist, die möglicherweise auch den Wert Null haben kann.

Allgemein kann man ihren Wert finden, indem man die Gleichung (10) mit V_n multipliziert und über die Strecke J integriert; man erhält so

$$\int_0^X V_n \frac{d}{dx}\left(k\frac{dW}{dx}\right) dx + \int_0^X W V_n (rg - l)\, dx + \varpi(r)\int_0^X f(x)\, V_n\, dx = 0.$$

Durch zwei partielle Integrationen findet man aber

$$\int_0^X V_n \frac{d}{dx}\left(k\frac{dW}{dx}\right) dx = k V_n \frac{dW}{dx}\Big|_0^X - \int_0^X k\frac{dV_n}{dx}\frac{dW}{dx}\, dx$$

$$= k\left(V_n\frac{dW}{dx} - W\frac{dV_n}{dx}\right)\Big|_0^X + \int_0^X W\frac{d}{dx}\left(k\frac{dV_n}{dx}\right) dx,$$

und der vor dem Integralzeichen stehende Ausdruck verschwindet stets wegen der den Funktionen W und V_n gemeinsam auferlegten Grenzbedingungen; somit ergibt sich

$$\int_0^X W\left[\frac{d}{dx}\left(k\frac{dV_n}{dx}\right) + (rg - l)\, V_n\right] dx + \varpi(r)\int_0^X f(x)\, V_n\, dx = 0,$$

oder, da V_n der Gleichung (1) genügt, wenn man in ihr r_n für r schreibt,

$$(r - r_n)\int_0^X g W V_n\, dx + \varpi(r)\int_0^X f(x)\, V_n\, dx = 0.$$

Differenziert man nach r und setzt dann $r = r_n$, womit W in $C_n V_n$ übergeht, so erhält man schließlich die Gleichung

$$\frac{C_n}{\varpi'(r_n)}\int_0^X g\, V_n^2\, dx + \int_0^X f(x)\, V_n\, dx = 0,$$

in welcher der Nenner des ersten Gliedes stets von Null verschieden ist.

Aus diesem Resultat ist ersichtlich, daß C_ν verschwindet, sobald

(11) $$\int_0^X f(x)\, V_\nu\, dx = 0;$$

dann verschwindet also auch die Größe

$$W(r_\nu) = C_\nu V_\nu,$$

und da r_ν eine einfache Nullstelle im Nenner des Bruches

$$S = \frac{W}{\varpi(r)}$$

ist, so sieht man: *wenn die Gleichung* (11) *für alle positiven ganzen Zahlen ν gilt, so ist S eine ganze Funktion von r;* ein Satz, der seinem wesentlichen Inhalt nach auch bei Stekloff vorkommt.

§ 10.

Der Fall, daß die Cauchysche Hülfsfunktion ganz ist.

Der ursprüngliche Ausdruck

$$S = p(x) + C_1 w_1 + C_2 w_2 = \frac{W}{\varpi(r)}$$

zeigt, daß wenn man den Zähler nach Potenzen von r entwickelt, als Koeffizienten stetige mit stetigen ersten und zweiten Ableitungen versehene Funktionen von x erscheinen. Dasselbe gilt, da der Nenner $\varpi(r)$ von x unabhängig ist, von den Koeffizienten, wenn S für jeden dem Intervall J angehörigen Wert von x in eine beständig konvergente Potenzreihe des Arguments r entwickelt werden kann; es sei etwa

$$S = s_0 + s_1 r + s_2 r^2 + \cdots.$$

Dann kann man ebenso, wie in § 9 auf Grund eines Satzes von Picard betreffs der Reihen w_1 und w_2 bemerkt wurde, auch hier gliedweise nach x differenzieren und die Reihe konvergiert bei festem r hinsichtlich der Variablen x im Intervall J gleichmäßig. Die Differentialgleichung (5) des § 9 kann daher in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{d}{dx}\left[k\left(\frac{ds_0}{dx} + r\frac{ds_1}{dx} + r^2\frac{ds_2}{dx} + \cdots\right)\right]$$
$$+ (gr - l)(s_0 + s_1 r + \cdots) + f(x) = 0;$$

sie ergibt, indem man die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von r gleich Null setzt, die Formeln

(1) $$\frac{d}{dx}\left(k\frac{ds_0}{dx}\right) - ls_0 + f(x) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{ds_1}{dx}\right) - ls_1 + gs_0 = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{ds_2}{dx}\right) - ls_2 + gs_1 = 0,$$

allgemein

(2) $$\frac{d}{dx}\left(k\frac{ds_{\nu+1}}{dx}\right) - ls_{\nu+1} + gs_\nu = 0.$$

Da ferner die Größe S den r nicht enthaltenden Grenzbedingungen

$$k\frac{dS}{dx} - hS\Big|^0 = 0, \quad k\frac{dS}{dx} + HS\Big|^X = 0$$

oder

$$S|^0 = 0, \quad S|^X = 0$$

genügt, so gilt dasselbe für jede Größe s_ν; daraus folgt, wenn m und n beliebige ganze Zahlen sind

$$s_{m+1}\frac{ds_n}{dx} - s_n\frac{ds_{m+1}}{dx}\Big|^0 = s_{m+1}\frac{ds_n}{dx} - s_n\frac{ds_{m+1}}{dx}\Big|^X = 0. \tag{3}$$

Multipliziert man die Gleichung (2), indem man $\nu = n - 1$ oder $\nu = m$ setzt, mit s_{m+1} im ersten, und mit s_n im zweiten Falle und integriert über das Intervall J, so ergibt sich

$$\begin{aligned}&\int_0^X s_{m+1}\left[\frac{d}{dx}\left(k\frac{ds_n}{dx}\right) - ls_n + gs_{n-1}\right]dx = 0,\\ &\int_0^X s_n\left[\frac{d}{dx}\left(k\frac{ds_{m+1}}{dx}\right) - ls_{m+1} + gs_m\right]dx = 0.\end{aligned} \tag{4}$$

Man erhält nun, indem man zweimal partiell integriert,

$$\begin{aligned}\int_0^X s_{m+1}\frac{d}{dx}\left(k\frac{ds_n}{dx}\right)dx &= ks_{m+1}\frac{ds_n}{dx}\Big|_0^X - \int_0^X k\frac{ds_n}{dx}\frac{ds_{m+1}}{dx}\,dx\\ &= k\left(s_{m+1}\frac{ds_n}{dx} - s_n\frac{ds_{m+1}}{dx}\right)\Big|_0^X + \int_0^X s_n\frac{d}{dx}\left(k\frac{ds_{m+1}}{dx}\right)dx,\end{aligned}$$

oder den Beziehungen (3) zufolge

$$\int_0^X s_{m+1}\frac{d}{dx}\left(k\frac{ds_n}{dx}\right)dx = \int_0^X s_n\frac{d}{dx}\left(k\frac{ds_{m+1}}{dx}\right)dx;$$

demgemäß ergeben die Gleichungen (4) sofort

$$\int_0^X gv_{m+1}v_{n-1}\,dx = \int_0^X gv_mv_n\,dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite hängt also nur von der Summe der Indices m, n ab und kann durch W_{m+n} bezeichnet werden.

Speziell hat man

$$W_{2\nu+2} = \int_0^X gs_{\nu+1}^2\,dx, \quad W_{2\nu-2} = \int_0^X gs_{\nu-1}^2\,dx, \quad W_{2\nu} = \int_0^X gs_{\nu-1}s_{\nu+1}\,dx,$$

und keine dieser Größen kann negativ sein, da g im Integrationsgebiet positiv ist. Aus eben diesem Grunde kann die Größe

$$\int_0^x g(\alpha s_{\nu-1} + \beta s_{\nu+1})^2 = W_{2\nu-2}\alpha^2 + 2W_{2\nu}\alpha\beta + W_{2\nu+2}\beta^2$$

nicht negativ sein, wie immer die reellen Größen α und β gewählt sein mögen; es gilt daher die Ungleichung

$$W_{2\nu}^2 - W_{2\nu-2}W_{2\nu+2} \leqq 0.$$

Hieraus folgt, daß die Größen W mit geradem Index entweder alle verschwinden oder alle positiv sind; denn keine von ihnen ist negativ und $W_{2\nu}$ verschwindet sowohl mit $W_{2\nu-2}$ wie mit $W_{2\nu+2}$ zugleich. Ist also W_0 von Null verschieden, so ergibt die letzte Ungleichung

$$\frac{W_2}{W_0} \leqq \frac{W_4}{W_2} \leqq \frac{W_6}{W_4} \leqq \cdots. \tag{5}$$

Diese Beziehungen führen aber, wie man leicht sieht, zu einem Widerspruch, wenn man annimmt, die Reihe S oder $s_0 + s_1 r + s_2 r^2 + \cdots$ sei beständig konvergent, wenn x ein beliebiger Wert des Intervalls J ist. Dann würde nämlich dasselbe von dem Produkt

$$S s_0 = s_0(s_0 + s_1 r + s_2 r^2 + \cdots)$$

und, da S bei festem r im Intervall J gleichmäßig konvergiert, von der Reihe

$$\int_0^x s_0(s_0 + s_1 r + s_2 r^2 + \cdots)\,dx = W_0 + W_1 r + W_2 r^2 + \cdots$$

gelten, endlich auch von derjenigen, die übrig bleibt, wenn man in der letzten Gleichung rechts die ungeraden Potenzen von r streicht. Die so erhaltene Reihe kann aber nicht beständig konvergieren, da die Quotienten eines jeden ihrer Glieder durch das vorhergehende die Größen

$$\frac{W_2}{W_0} r, \quad \frac{W_4}{W_2} r, \cdots$$

sind, welche den Beziehungen (5) zufolge größer als Eins sind, sobald r einen hinreichend großen reellen Wert annimmt.

Die Größe S ist daher nur dann eine ganze Funktion von r, wenn

$$W_0 = \int_0^x g s_0^2\,dx = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt aber für das ganze Gebiet J, in welchem s_0 stetig und g positiv ist,

$$s_0 = 0$$

und hieraus vermittelst der Gleichung (1)

$$f(x) = 0.$$

Erinnert man sich nun des in § 9 erhaltenen Resultats, so sieht man, daß folgender Satz bewiesen ist:

Wenn $f(x)$ eine im Intervall von $x = 0$ bis $x = X$ stetige Funktion und so beschaffen ist, daß alle Gleichungen

$$\int_0^X f(x)\, V_\nu\, dx = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots)$$

bestehen, in denen V_ν die in § 9 definierten Normalfunktionen sind, so verschwindet $f(x)$ in dem ganzen bezeichneten Intervall.

Diesen Satz haben Sturm und Liouville für Funktionen mit einer endlichen Anzahl von Nullstellen bewiesen; wir brauchen ihn aber in der vorliegenden allgemeinen Form, da er auf Funktionen angewandt wird, von denen wir nur wissen, daß sie stetig sind.

§ 11.

Die transformierten Normalfunktionen nach Liouville.

Das erhaltene Resultat führt ähnlich wie das analoge in den Abschnitten I und II zu dem gewünschten Endziel, wenn gezeigt werden kann, daß unter gewissen Bedingungen die zur Darstellung willkürlicher Funktionen angesetzte Reihe gleichmäßig konvergiert. Das gelingt in der Tat vermittelst einer Reihe von Umformungen, die sich im wesentlichen schon bei Liouville vorfinden.

Wir transformieren zunächst die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(k \frac{dV}{dx}\right) + (gr - l)\, V = 0 \tag{1}$$

durch die Substitutionen

$$z = \int_0^x \sqrt{\frac{g}{k}}\, dx, \quad U = V \sqrt[4]{gk},$$

und setzen

$$r = \varrho^2, \quad \theta = \sqrt[4]{gk}, \quad Z = \int_0^X \sqrt{\frac{g}{k}}\, dx,$$

$$\lambda = \frac{1}{\theta \sqrt{gk}} \left\{ \theta l \sqrt{\frac{k}{g}} - \frac{d\theta}{dz} \frac{d\sqrt{gk}}{dz} - \frac{d^2\theta}{dz^2} \sqrt{gk} \right\};$$

die hierbei auftretenden Nenner verschwinden niemals, da wir g und k in dem Intervall J als positiv voraussetzen; λ bleibt daher endlich und

hat, wenn g, k, l endliche und stetige Ableitungen bis zur vierten Ordnung einschließlich besitzen, endliche Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung auf der Strecke von $z = 0$ bis $z = Z$, die wir wiederum durch J bezeichnen wollen. Die Differentialgleichung (1) wird jetzt offenbar

(2) $$\frac{d^2U}{dz^2} + (\varrho^2 - \lambda)\, U = 0,$$

und die Grenzbedingungen, welche die Normalfunktionen charakterisieren, nehmen die Gestalt

(3) $$\frac{dU}{dz} - h'U\Big|^0 = 0, \quad \frac{dU}{dz} + H'U\Big|^Z = 0$$

an, wobei die Konstanten h', H' zugleich mit h und H endlich, aber nicht notwendig positiv sind. Der Fall, daß von den Werten h und H mindestens einer unendlich ist, werde zunächst ausgeschlossen und muß besonders behandelt werden (§§ 15—17).

Die Gleichung (2) ist nun mit jeder der folgenden gleichbedeutend:

$$d\left(\sin \varrho z \frac{dU}{dz} - \varrho U \cos \varrho z\right) = \lambda U \sin \varrho z\, dz,$$

$$d\left(\cos \varrho z \frac{dU}{dz} + \varrho U \sin \varrho z\right) = \lambda U \cos \varrho z\, dz.$$

Aus ihnen folgt, indem man durch A, B Konstante, durch z' eine Integrationsvariable bezeichnet, die für z gesetzt U und λ in U' und λ' überführe,

(4) $$\begin{aligned} \sin \varrho z \frac{dU}{dz} - \varrho U \cos \varrho z &= A + \int_0^z \lambda' U' \sin \varrho z'\, dz', \\ \cos \varrho z \frac{dU}{dz} + \varrho U \sin \varrho z &= B + \int_0^z \lambda' U' \cos \varrho z'\, dz'. \end{aligned}$$

Setzt man speziell $z = 0$, so ergibt sich

$$A = -\varrho U\Big|^0, \quad B = \frac{dU}{dz}\Big|^0,$$

also der ersten Gleichung (3) zufolge

$$B = -\frac{h'A}{\varrho}.$$

Macht man daher die Annahme

(5) $$U|^0 = 1,$$

die erlaubt ist, da die Bedingungen (3) die Normalfunktionen nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmen, $U|^0$ aber bei endlichen h und h' nur verschwinden könnte, wenn U identisch gleich Null wäre, was nach § 9 ausgeschlossen ist, so folgt

$$A = -\varrho, \quad B = h'.$$

Mit diesen Werten ergeben die Gleichungen (4)

$$\sin\varrho z\frac{dU}{dz}-\varrho\cos\varrho z\,U=-\varrho+\int\limits_0^z\lambda' U'\sin\varrho z'\,dz',$$

$$\cos\varrho z\frac{dU}{dz}+\varrho\sin\varrho z\,U=h'\;+\int\limits_0^z\lambda' U'\cos\varrho z'\,dz',$$

und indem man $\frac{dU}{dz}$ eliminiert, erhält man

$$U=\cos\varrho z+\frac{h'\sin\varrho z}{\varrho}+\frac{1}{\varrho}\int\limits_0^z\lambda' U'\sin\varrho(z-z')\,dz', \tag{6}$$

wobei ersichtlich die zweite der Gleichungen (3) nicht benutzt ist. Eine Ausnahme würde diese Formel nur dann erleiden, wenn $\varrho=0$ einer der Werte wäre, zu denen Normalfunktionen gehören, was möglich ist und z. B. beim Problem der Diffusion von Gasen vorkommt.

Das erhaltene Resultat gibt über das Wertgebiet, das die Größe U durchlaufen kann, Aufschluß. Denn ist Q das Maximum ihres absoluten Betrages auf der Strecke J, so ist die rechte Seite der Gleichung (6) dem absoluten Betrage nach nicht größer als

$$\sqrt{1+\left(\frac{h'}{\varrho}\right)^2}+\frac{Q}{\varrho}\int\limits_0^z|\lambda'|\,dz',$$

und da die stetige Funktion U an mindestens einer Stelle das Maximum ihres absoluten Betrages erreicht, folgt hieraus

$$Q\leqq\sqrt{1+\left(\frac{h'}{\varrho}\right)^2}+\frac{Q}{\varrho}\int\limits_0^z|\lambda'|\,dz'. \tag{7}$$

Sobald nun ϱ eine gewisse positive Grenze überschritten hat, wird der Faktor von Q auf der rechten Seite kleiner als Eins, die Differenz

$$1-\frac{1}{\varrho}\int\limits_0^z|\lambda'|\,dz'$$

also positiv, und man kann aus der Ungleichung (7) oder der gleichwertigen

$$Q\left(1-\frac{1}{\varrho}\int\limits_0^z|\lambda'|\,dz'\right)\leqq\sqrt{1+\left(\frac{h'}{\varrho}\right)^2}$$

schließen, daß Q, sobald ϱ eine gewisse Grenze g überschritten hat, z. B. kleiner als 2 ist, U also zwischen $+2$ und -2 liegt. Unterhalb irgend

einer festen Grenze gibt es aber nur eine endliche Anzahl von Wurzeln der Gleichung

$$\varpi(r) = \varpi(\varrho^2) = 0,$$

für deren jede $|U|$ ein endliches Maximum besitzt; daraus ist ersichtlich daß es endliche von ϱ unabhängige Grenzen gibt, zwischen denen alle Größen U verbleiben, die durch die erste Gleichung (3) und die Voraussetzung (5) bestimmt sind, speziell also auch die durch die drei Gleichungen (3), (5) charakterisierten Normalfunktionen. Dies gilt, wovon wir im Abschnitt IV Gebrauch machen, auch für $H = \infty$, d. h. für den Fall, daß die zweite charakteristische Grenzbedingung der Normalfunktionen in der Form

$$U|^Z = 0$$

angesetzt wird; denn H ist bisher noch nicht in den benutzten Formeln vorgekommen.

Um die Normalfunktionen in den jetzt eingeführten Variablen genauer untersuchen zu können, werde der Ausdruck (6) für U in die zweite Gleichung (3) eingeführt; dann erhält man mit den Bezeichnungen

$$P = h' + H' + \int_0^Z \lambda' U' \left(\cos \varrho z' - \frac{H' \sin \varrho z'}{\varrho}\right) dz',$$

$$P' = \frac{h' H'}{\varrho} + \int_0^Z \lambda' U' \left(\sin \varrho z' + \frac{H' \cos \varrho z'}{\varrho}\right) dz'$$

die Gleichung

$$(8)\qquad \begin{gathered} (\varrho - P') \sin \varrho Z - P \cos \varrho Z = 0, \\ \operatorname{tg} \varrho Z = \frac{P}{\varrho - P'}, \end{gathered}$$

die auf der bei willkürlichen Werten von ϱ geltenden Identität

$$(9)\qquad \frac{dU}{dz} + H'U = (\varrho - P') \sin \varrho Z - P \cos \varrho Z$$

beruht. Aus dieser ersieht man zunächst wiederum, daß die Gleichung (8) keine Wurzeln besitzt, denen nur identisch verschwindende Normalfunktionen entsprechen; denn durch die Gleichungen

$$U\Big|^0 = 1, \quad \frac{dU}{dz} - h'U\Big|^0 = 0$$

wird jedenfalls bei willkürlichen Werten von ϱ ein nicht identisch verschwindendes Integral definiert, welches als stetige Funktion von z über das ganze Intervall J fortgesetzt werden kann. Ein solches ist, wie die Identität (9) zeigt, eine Normalfunktion, sobald für ϱ eine beliebige Wurzel der Gleichung (8) gesetzt wird.

Die zweite Form der Gleichung (8) zeigt ferner, daß jede ihrer positiven Wurzeln, die oberhalb einer gewissen Grenze liegt, die Form

$$\frac{n\pi}{Z} + \varepsilon_n$$

haben muß, wobei n eine ganze Zahl ist und ε_n mit $\frac{1}{n}$ zugleich unendlich abnimmt. Die zugehörige Normalfunktion fällt der Gleichung (6) zufolge annähernd mit $\cos \varrho z$ oder auch mit $\cos \frac{n\pi z}{Z}$ zusammen, verschwindet also im Intervall J genau n-mal. Nun entsprechen aber nach der Theorie von Sturm*) die Normalfunktionen den nach zunehmender Größe geordneten Wurzeln der Gleichung $\varpi(r) = 0$ in der Weise, daß die erste Normalfunktion im Intervall J gar nicht verschwindet, jede folgende aber einmal mehr als die vorhergehende; der Wurzel

$$\varrho = \frac{n\pi}{Z} + \varepsilon_n$$

entspricht also die $(n+1)^{\text{te}}$ Normalfunktion U_{n+1}, woraus zugleich folgt, daß jeder nicht negativen Zahl n eine einzige Wurzel dieser Form zugeordnet werden kann. Dies ergibt auch eine im wesentlichen von Liouville**) durchgeführte direkte Diskussion der Gleichung (8), bei der die expliziten Ausdrücke von P und P' benutzt werden.

Setzt man endlich den obigen Wert für ϱ in die Gleichung (8) ein, so ergibt sich

$$\operatorname{tang}(n\pi + \varepsilon_n Z) = \operatorname{tg} \varepsilon_n Z = \frac{P}{\frac{n\pi}{Z} + P' + \varepsilon_n}$$

oder

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_n Z}{\pi n \operatorname{tg} \varepsilon_n Z}\left(P - (P' + \varepsilon_n)\operatorname{tg} \varepsilon_n Z\right).$$

Da nun die mit n multiplizierte rechte Seite zwischen endlichen von n unabhängigen Grenzen verbleibt, und das Verhältnis $\varrho : n$ einer festen endlichen Grenze zustrebt, kann man setzen

$$\varepsilon_n = \frac{B}{\varrho}, \quad \varrho = \frac{n\pi}{Z} + \frac{B}{\varrho}$$

oder genauer

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{n\pi}{Z} + \frac{B}{\varrho_{n+1}},$$

wobei B zwischen endlichen, von n und ϱ unabhängigen Grenzen liegt.

*) Journal de math. (1) I, S. 141.

**) Journal de math. (1) II, S. 424.

Hieraus folgt, indem man durch B^0 und B^1 Größen von derselben Beschaffenheit wie B bezeichnet,

(10) $$\cos \varrho z = \cos \frac{n\pi z}{Z} + \frac{B^0}{\varrho} \sin \frac{n\pi z}{Z} + \frac{B^1}{\varrho^2},$$

und es ist

$$B^0 = \varrho \sin \frac{Bz}{\varrho}.$$

§ 12.

Erster Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz.

Nach diesen Vorbereitungen beginnen wir die Untersuchung der mit einer willkürlichen Funktion $f(x)$ gebildeten Reihe

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{V_\nu \int_0^X g f(x) V_\nu dx}{\int_0^X g V_\nu^2 dx},$$

von der wir unter angemessenen Voraussetzungen zeigen wollen, daß sie die Funktion $f(x)$ darstellt, und gehen davon aus, daß die Beziehungen zwischen x, z, V, U nach § 11 ergeben

$$\int_0^X g f(x) V_\nu dx = \int_0^Z U_\nu(\alpha) \varphi(\alpha) d\alpha, \quad \int_0^X g V_\nu^2 dx = \int_0^Z U_\nu^2(\alpha) d\alpha,$$

wobei das Funktionszeichen φ durch die Gleichungen

$$\varphi(z) = f(x)\sqrt{gk}, \quad z = \int_0^x \sqrt{\frac{g}{k}}\, dx$$

definiert sei. Hat $f(x)$ stetige erste und zweite Ableitungen, so gilt dasselbe von $\varphi(z)$ bei den in § 11 betreffs der Funktionen g, k, l gemachten Voraussetzungen.

Die obige Reihe geht, mit $\sqrt{gk}$ multipliziert, in die folgende über:

(1) $$R = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{U_\nu \int_0^Z U_\nu(\alpha) \varphi(\alpha) d\alpha}{\int_0^Z U_\nu^2(\alpha) d\alpha},$$

die, wie wir zeigen wollen, den Wert $\varphi(z)$ hat.

Um dieses Ziel zunächst einmal in der einfachsten Weise zu erreichen, ohne daß die größte Allgemeinheit für die Funktion $f(x)$ an-

gestrebt würde, gehen wir davon aus, daß der Nenner des allgemeinen Gliedes der betrachteten Reihe für alle positiven ϱ der Gleichung (6) des § 11 zufolge in der Form

$$(2)\qquad \int_0^Z U^2(\alpha)\,d\alpha = \int_0^Z \cos^2\varrho\alpha\,d\alpha + \frac{2}{\varrho}\int_0^Z N\cos\varrho\alpha\,d\alpha + \frac{1}{\varrho^2}\int_0^Z N^2\,d\alpha$$

dargestellt werden kann, wobei gesetzt ist

$$N = h'\sin\varrho\alpha + \int_0^\alpha \lambda' U' \sin\varrho(\alpha - z')\,dz'.$$

Da ferner U bei hinreichend großen Werten von ϱ zwischen $+2$ und -2 liegt, so schließt man aus der Gleichung (2) und der Gleichung (10) des § 11

$$\lim_{\varrho=\infty}\int_0^Z U^2(\alpha)\,d\alpha = \lim_{\varrho=\infty}\int_0^Z \cos^2\varrho\alpha\,d\alpha = \frac{Z}{2},$$

$$(3)\qquad \int_0^Z U^2(\alpha)\,d\alpha = \frac{Z}{2} + \frac{K}{\varrho},$$

wobei auch K zwischen endlichen von ϱ unabhängigen Werten verbleibt.

Jetzt transformieren wir den Zähler des allgemeinen Gliedes der Reihe (1) durch zwei partielle Integrationen, indem wir annehmen, $f(x)$ und demnach auch $\varphi(z)$ besitze im Intervall J eine stetige erste und zweite Ableitung, und finden, sobald ϱ eine gewisse Grenze, nämlich das Maximum von $|\sqrt{\lambda}|$ überschritten hat,

$$\int_0^Z \varphi(\alpha)\,U(\alpha)\,d\alpha = \int_0^Z \frac{\varphi(\alpha)}{\varrho^2-\lambda(\alpha)}\cdot(\varrho^2-\lambda(\alpha))\,U(\alpha)\,d\alpha$$

$$= -\int_0^Z \frac{\varphi(\alpha)\,U''(\alpha)}{\varrho^2-\lambda(\alpha)}\,d\alpha = -\frac{\varphi(\alpha)\,U'(\alpha)}{\varrho^2-\lambda(\alpha)}\Big|_0^Z + \int_0^Z U'(\alpha)\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varrho^2-\lambda(\alpha)}\right)d\alpha$$

$$= -\frac{\varphi(\alpha)\,U'(\alpha)}{\varrho^2-\lambda(\alpha)} + U(\alpha)\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varrho^2-\lambda(\alpha)}\right)\Big|_0^Z - \int_0^Z U(\alpha)\frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varrho^2-\lambda(\alpha)}\right)d\alpha,$$

oder auf Grund der Grenzbedingungen, wenn h und H endlich sind,

$$= \frac{H'\varphi(Z)\,U(Z)}{\varrho^2-\lambda(Z)} + \frac{h'\varphi(0)}{\varrho^2-\lambda(0)} + U(\alpha)\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varrho^2-\lambda(\alpha)}\right)\Big|_0^Z - \int_0^Z U(\alpha)\frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varrho^2-\lambda(\alpha)}\right)d\alpha.$$

Da nun nach § 11 die Funktion λ endliche und stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitzt, übersieht man sofort, daß die Größen

$$\varrho^2 \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varrho^2 - \lambda(\alpha)}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi(\alpha)}{1 - \frac{\lambda(\alpha)}{\varrho^2}}\right),$$

$$\varrho^2 \frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varrho^2 - \lambda(\alpha)}\right) = \frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{\varphi(\alpha)}{1 - \frac{\lambda(\alpha)}{\varrho^2}}\right)$$

bei wachsenden Werten von ϱ endlich bleiben. Um ihr Verhalten in einer Formel ausdrücken zu können, bezeichnen wir nach Liouville allgemein durch Ψ eine von ϱ und α oder ϱ und z abhängige Größe, die bei wachsenden Werten von ϱ und beliebigen der Strecke J angehörigen Werten von α oder z zwischen festen, d. h. von ϱ, α und z unabhängigen Grenzen verbleibt. Alsdann kann der obige Ausdruck in der Form

$$\frac{\Psi}{\varrho^2}$$

geschrieben werden, und dasselbe gilt der Beziehung (3) zufolge und da U bei großen Werten von ϱ zwischen $+2$ und -2 liegt, von dem allgemeinen Gliede der Reihe (1). Die Werte von ϱ aber haben die asymptotische Form $\frac{n\pi}{Z}$, jedes Glied einer über sie erstreckten Reihe

$$\sum \frac{\Psi}{\varrho^2}$$

gibt also durch ein entsprechendes der konvergenten Reihe

$$\sum \frac{1}{\nu^2}$$

dividiert einen Quotienten, der zwischen endlichen, festen Grenzen liegt. Daraus ist unmittelbar ersichtlich, daß die Reihe R absolut konvergiert, und da die Grenzen der Größen Ψ von z unabhängig sind, konvergiert sie auch im Intervall J gleichmäßig.

Hat man dies einmal für stetige Funktionen $\varphi(z)$ und $f(x)$ unter irgend welchen Bedingungen festgestellt, so ist es leicht, die Reihe R zu summieren. Zunächst ist ihr Wert eine stetige Funktion von z und damit von x, etwa $F(z)$; sie kann ferner, mit U_n multipliziert, gliedweise integriert werden, und man findet so

$$\int_0^Z F(z)\, U_n(z)\, dz = \sum_\nu^{1,\infty} A_\nu \int_0^Z U_\nu(z)\, U_n(z)\, dz, \tag{4}$$

wobei gesetzt ist

$$A_\nu = \int_0^Z \varphi(\alpha)\, U_\nu(\alpha)\, d\alpha : \int_0^Z U_\nu^2(\alpha)\, d\alpha.$$

Nun ist die Grundeigenschaft der Normalfunktionen V, wenn n und ν verschiedene positive ganze Zahlen sind, in der Gleichung

$$\int_0^X g V_n V_\nu dx = 0$$

ausgedrückt; aus ihr folgt, indem man die Variablen z und U einführt,

$$\int_0^Z U_n(\alpha) U_\nu(\alpha) d\alpha = 0,$$

sodaß die Gleichung (4) ergibt

$$\int_0^Z F(z) U_n(z) dz = A_n \int_0^Z U_n^2(z) dz$$

oder

$$\int_0^Z (F(\alpha) - \varphi(\alpha)) U_n(\alpha) d\alpha = 0$$

oder endlich, indem man nach § 11 wieder x als Variable einführt,

$$\int_0^X \left(\frac{F(z)}{\sqrt[4]{gk}} - f(x)\right) V_n dx = 0.$$

Hieraus schließt man, da $f(x)$ ebenso wie $F(z)$ im Intervall J stetig ist, nach § 10

$$F(z) = \sqrt[4]{gk} f(x) = \varphi(z).$$

Hat also $f(x)$ im Intervall von $x = 0$ bis $x = X$ stetige erste und zweite Ableitungen, so gilt für dies Intervall die Dastellung:

$$f(x) = \sum_\nu^{1,\infty} \frac{V_\nu \int_0^X g f(x) V_\nu dx}{\int_0^X g V_\nu^2 dx},$$

und die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig von $x = 0$ bis $x = X$. Dabei sind die Normalfunktionen V_ν durch die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(k \frac{dV}{dx}\right) + (gr - l)V = 0$$

und die Grenzbedingungen

$$k \frac{dV}{dx} - hV \Big|^0 = 0, \qquad k \frac{dV}{dx} + HV \Big|^X = 0$$

definiert; h, H, r sind endliche Konstante, k, g, l stetige mit stetigen Ableitungen bis zur vierten Ordnung einschließlich versehene Funktionen von x, von denen die ersten beiden in dem bezeichneten Intervall positiv und l nicht negativ ist.

§ 13.

Gleichmäßige Konvergenz unter allgemeineren Bedingungen.

Um noch weitergehende Resultate abzuleiten, welche den klassischen, von Dirichlet für die Fouriersche Reihe erhaltenen analog sind, nehmen wir an, $f(x)$ genüge im Intervall J der Dirichletschen Bedingung (§ 4); gilt dasselbe von $\sqrt[4]{gk}$, so lehren die in § 12 gegebenen Transformationsgleichungen, daß auch $\varphi(z)$ als Funktion von z diese Eigenschaft besitzt; denn zwei der Dirichletschen Bedingung unterworfene Funktionen geben ein Produkt, welches ihr ebenfalls genügt*). Wir ersetzen ferner im Zähler des allgemeinen Gliedes der Reihe R die Integrationsgrenzen durch zwei beliebige dem Intervall J angehörige Werte von z, etwa ξ und η, wodurch R in eine Reihe übergehe, die durch $R^{\xi,\eta}$ oder ausführlicher durch $R(z)^{\xi,\eta}$ bezeichnet werde; nehmen wir dann für U den Ausdruck (6) des § 11, so ergibt sich

$$(1)\quad \varrho\int_\xi^\eta U(\alpha)\varphi(\alpha)d\alpha=\varrho\int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\cos\varrho\alpha\, d\alpha-\int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\cos\varrho\alpha\, d\alpha\int_0^\alpha \lambda' U' \sin\varrho z'\, dz'$$
$$+\int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\sin\varrho\alpha\, d\alpha\left(h'+\int_0^\alpha \lambda' U'\cos\varrho z'\, dz'\right).$$

Nun findet man durch partielle Integration

$$\int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\cos\varrho\alpha\, d\alpha\int_0^\alpha \lambda' U' \sin\varrho z'\, dz'$$
$$=\int_0^\eta \lambda' U' \sin\varrho z'\, dz'\int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\cos\varrho\alpha\, d\alpha-\int_\xi^\eta \lambda(\alpha)U(\alpha)\sin\varrho\alpha\, d\alpha\int_\xi^\alpha \varphi(z')\cos\varrho z'\, dz',$$

und da nach § 4 die Integrale

$$\int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\cos\varrho x\, d\alpha,\qquad \int_\xi^\alpha \varphi(z')\cos\varrho z'\, dz'$$

in der Form $\Psi:\varrho$ geschrieben werden können, hat das zweite Integral der Summe (1) eben diese Form, wobei die Grenzen der Größe Ψ als von ξ und η unabhängig betrachtet werden können. Dieselben Schlüsse kann man für das dritte zwischen ξ und η genommene Integral auf der rechten Seite der Gleichung (1) ziehen, indem man es in die Form

$$\left(h'+\int_0^\eta \lambda' U'\cos\varrho z'\, dz'\right)\int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\sin\varrho\alpha\, d\alpha-\int_\xi^\eta d\alpha\,\lambda(\alpha)U(\alpha)\cos\varrho\alpha\int_\xi^\alpha \varphi(z')\sin\varrho z'\, dz'$$

*) Poincaré Propagation de la chaleur Nr. 37.

bringt, und man erhält somit

$$\int_\xi^\eta U(\alpha)\,\varphi(\alpha)\,d\alpha = \int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\cos\varrho\alpha\,d\alpha + \frac{\Psi}{\varrho^2},$$

wobei die Grenzen der Größe Ψ wiederum auch von ξ und η unabhängig sein können.

Ferner folgt aus der Gleichung (3) des § 12

$$M = 1 : \int_0^z U^2(\alpha)\,d\alpha = \frac{2}{Z} + \frac{C}{\varrho},$$

wobei C zwischen endlichen von ϱ unabhängigen Grenzen liegt; man erhält daher für das allgemeine Glied der Reihe $R^{\xi,\eta}$ den Ausdruck

$$T = UM\int_\xi^\eta U(\alpha)\,\varphi(\alpha)\,d\alpha = \frac{2U}{Z}\int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\cos\varrho\alpha\,d\alpha + \frac{CU}{\varrho}\int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\cos\varrho\alpha\,d\alpha + \frac{\Psi}{\varrho^2},$$

und die Grenzen der hier erscheinenden Größe Ψ können wie von ξ und η so auch von z unabhängig genommen werden, da U zwischen festen Grenzen liegt. Dieselbe Eigenschaft hat die Größe Ψ in der Gleichung

$$CU\int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\cos\varrho\alpha\,d\alpha = \frac{\Psi}{\varrho},$$

die nach § 4 angesetzt werden kann, und der hieraus folgenden

$$T = \frac{2U}{Z}\int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\cos\varrho\alpha\,d\alpha + \frac{\Psi}{\varrho^2}\cdot$$

Führen wir hier für U der Gleichung (6) des § 11 gemäß den Wert

$$\cos\varrho z + \frac{\Psi}{\varrho}$$

ein und berücksichtigen nochmals, daß

$$\int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\cos\varrho\alpha\,d\alpha = \frac{\Psi}{\varrho} \tag{2}$$

gesetzt werden kann, so erhalten wir den Ausdruck

$$T = \frac{2\cos\varrho z}{Z}\int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\cos\varrho\alpha\,d\alpha + \frac{\Psi}{\varrho^2},$$

in welchem wiederum Ψ die angegebenen Eigenschaften behält, da dies nach § 4 in der Gleichung (2) angenommen werden darf.

Nimmt man jetzt für $\cos \varrho z$ den Wert, den die Gleichung (10) des § 11 ergibt, so findet man, da die dort durch B bezeichneten Größen die charakteristischen Eigenschaften der Größen Ψ besitzen,

$$T = \frac{2}{Z}\left(\cos\frac{n\pi z}{Z} + \frac{\Psi}{\varrho}\right)\int\limits_{\xi}^{\eta}\varphi(\alpha)\left(\cos\frac{n\pi\alpha}{Z} + \frac{\Psi}{\varrho}\right)d\alpha.$$

Da ferner nach § 4 und der zwischen n und ϱ geltenden Beziehung

$$\int\limits_{\xi}^{\eta}\varphi(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{Z}\,d\alpha = \frac{\Psi}{\varrho}$$

gesetzt werden kann, erhält man schließlich

$$T = \frac{2}{Z}\cos\frac{n\pi z}{Z}\int\limits_{\xi}^{\eta}\varphi(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{Z}\,d\alpha + \frac{\Psi}{\varrho^2},$$

und die Grenzen der Größe Ψ sind hier, wie bisher immer, von ξ, η, z unabhängig. Summiert man diese Werte, indem man $\varrho = \varrho_1, \varrho_2, \cdots$ und gleichzeitig $n = 0, 1, \cdots$ setzt, so ergibt sich

$$R^{\xi,\eta} = \sum_{\nu}^{0,\infty}\frac{2}{Z}\cos\frac{\nu\pi z}{Z}\int\limits_{\xi}^{\eta}\varphi(\alpha)\cos\frac{\nu\pi\alpha}{Z}\,d\alpha + \sum\frac{\Psi}{\varrho^2}.$$

Nun ist die letzte Reihe rechts aus denselben Gründen im Gebiet J gleichmäßig und absolut konvergent, wie die gleichbezeichnete in § 12; dieselbe Eigenschaft hat daher die Reihe $R^{\xi,\eta}$ mit der rechts stehenden trigonometrischen Reihe zugleich, die abgesehen vom ersten Glied mit der zweiten der am Ende des § 5 aufgeführten Reihen übereinstimmt. Speziell ist die Reihe $R^{0,Z}$ gleichzeitig im Intervall J gleichmäßig konvergent mit der Reihe

$$\text{(3)}\qquad \frac{1}{Z}\int\limits_{0}^{Z}\varphi(\alpha)\,d\alpha + \frac{2}{Z}\sum_{\nu}^{1,\infty}\cos\frac{\nu\pi z}{Z}\int\limits_{0}^{Z}\cos\frac{\nu\pi\alpha}{Z}\,\varphi(\alpha)\,d\alpha.$$

d. h. mit der gewöhnlichen Kosinusreihe R_2 des § 3, in welcher die Variable z eingeführt ist; allgemein sieht man ferner, daß die Reihe $R^{\xi,\eta}$ konvergiert, sobald $\varphi(z)$ nur der Dirichletschen Bedingung genügt.

Diese Resultate würden auch gültig bleiben, wenn der in § 11 erwähnte Ausnahmefall einträte, daß für die erste Normalfunktion $\varrho_1 = 0$ zu setzen wäre, womit die durchgeführte Transformation des Ausdrucks T hinfällig würde; denn die Konvergenz der Reihe $R^{\xi,\eta}$ wird natürlich durch ein einzelnes hinzutretendes Glied nicht beeinflußt.

Die Reihe (3) konvergiert nach § 5 gleichmäßig von $z = 0$ bis $z = Z$, wenn $\varphi(z)$ im Intervall J stetig ist und der Dirichletschen Bedingung genügt; für eine solche Funktion ergibt daher die in § 12 an die Gleichung (4) geknüpfte Argumentation sofort

$$\varphi(z) = R^{0,Z}.$$

Geht man endlich wieder zu den Variablen x, $f(x)$ und V_ν zurück, so kann das erhaltene Resultat wie folgt ausgesprochen werden:

Bei endlichen Werten von h und H konvergiert im Intervall von $x = 0$ bis $x = X$ die nach den Normalfunktionen V_ν fortschreitende Reihe

$$\sum_\nu^{1,\infty} \frac{V_\nu \int_0^X g f(x) V_\nu \, dx}{\int_0^X g V_\nu^2 \, dx}$$

gleichmäßig gegen den Wert $f(x)$, wenn in dem bezeichneten Intervall $f(x)$ und $\sqrt{gk}$ stetige, der Dirichletschen Bedingung genügende Funktionen sind, und die übrigen für g, k, l und V_ν in § 12 aufgestellten Voraussetzungen festgehalten werden.

§ 14.
Unstetigkeiten der dargestellten Funktion.

Die Funktionen $\varphi(z)$ und $\varphi_0(z)$ seien im Intervall J beide stetig und der Dirichletschen Bedingung unterworfen, und mögen, wenn ξ zwischen 0 und Z liegt, in dem Teilintervall

$$\xi \leqq z \leqq Z \tag{1}$$

übereinstimmen, während sie bei der Voraussetzung

$$0 \leqq z < \xi$$

verschieden sein können. Gehört dann z der Strecke (1) an, so stellen beide Reihen

$$\sum UM \int_0^Z \varphi(\alpha)\, U(\alpha)\, d\alpha, \qquad \sum UM \int_0^Z \varphi_0(\alpha)\, U(\alpha)\, d\alpha$$

denselben Wert dar; da nun nach Voraussetzung offenbar

$$\int_\xi^Z \varphi(\alpha)\, U(\alpha)\, d\alpha = \int_\xi^Z \varphi_0(\alpha)\, U(\alpha)\, d\alpha,$$

so folgt

$$\sum UM \int_0^\xi U(\alpha)\,(\varphi(\alpha) - \varphi_0(\alpha))\, d\alpha = 0$$

und die links stehende Summe ist als Differenz zweier konvergenter Reihen ebenfalls konvergent. Da ferner nach § 13 auch jede Reihe $R^{\xi,\eta}$ konvergiert, so gilt dasselbe von

$$\sum UM\int_0^\xi U(\alpha)\,\varphi(\alpha)\,d\alpha,$$

und man kann die letzte Gleichung schreiben

$$\sum UM\int_0^\xi U(\alpha)\,\varphi(\alpha)\,d\alpha = \sum UM\int_0^\xi U(\alpha)\,\varphi_0(\alpha)\,d\alpha,$$

oder, indem man festsetzt, R gehe in R_0 über, wenn φ_0 an Stelle von φ tritt,

(2) $$R^{0,\xi} = R_0^{0,\xi}.$$

Solange daher z dem Intervall (1) angehört, und $\varphi(\alpha)$ eine beliebige von 0 bis ξ stetige und der Dirichletschen Bedingung unterworfene Funktion ist, deren Wert für $x = \xi$ gegeben ist, hat die Reihe

$$R^{0,\xi} = \sum UM\int_0^\xi U(\alpha)\,\varphi(\alpha)\,d\alpha$$

immer einen und denselben von der besonderen Bestimmung von $\varphi(z)$ unabhängigen Wert. *Wir zeigen, daß dieser Null sein muß, sobald* $z > \xi$, *und* $\frac{1}{2}\varphi(\xi)$ *für* $z = \xi$.

Dazu führt eine genauere Untersuchung des Produkts

$$UM\int_0^\xi \varphi_0(\alpha)\,U(\alpha)\,d\alpha,$$

in welchem wir für $\varrho > 0$ nach § 11 setzen können

$$U = \cos\varrho z + \frac{\Psi^1}{\varrho},$$

(3) $$\Psi^1 = h'\sin\varrho z + \int_0^z \lambda' U' \sin\varrho(z - z')\,dz'$$

oder, wenn nach § 11 die Werte

$$\varrho = \frac{n\pi}{Z} + \frac{B}{\varrho},\quad B^0 = \varrho\sin\frac{Bz}{\varrho},\qquad \cos\varrho z = \cos\frac{n\pi z}{Z} + \frac{B^1}{\varrho^2} + \frac{B^0}{\varrho}\sin\frac{n\pi z}{Z}$$

eingeführt werden,

$$U = \cos\frac{n\pi z}{Z} + \frac{\Psi^0}{\varrho},$$

wobei

$$\Psi^0 = \Psi^1 + \frac{B^1}{\varrho} + B^0\sin\frac{n\pi z}{Z}$$

ist. Benutzt man noch die in § 13 aufgestellte Formel

$$M = \frac{2}{Z} + \frac{C}{\varrho},$$

so ergibt sich

$$UM\int_0^\xi U(\alpha)\,\varphi_0(\alpha)\,d\alpha = \left[\frac{2}{Z}\cos\frac{n\pi z}{Z} + \frac{2\Psi^0}{Z\varrho} + \frac{C}{\varrho}\cos\frac{n\pi z}{Z} + \frac{C\Psi^0}{\varrho^2}\right]$$

$$\times\int_0^\xi \varphi_0(\alpha)\left(\cos\frac{n\pi\alpha}{Z} + \frac{\Psi^1(\alpha)}{\varrho} + \frac{B^1(\alpha)}{\varrho^2} + \frac{B^0(\alpha)}{\varrho}\sin\frac{n\pi\alpha}{Z}\right)d\alpha$$

$$= \frac{2}{Z}\cos\frac{n\pi z}{Z}\int_0^\xi \varphi_0(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{Z}\,d\alpha + P + Q$$

bei folgender Bedeutung der neuen Zeichen:

$$P = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{2\Psi^0}{Z} + C\cos\frac{n\pi z}{Z}\right)\int_0^\xi \varphi_0(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{Z}\,d\alpha$$

$$+ \frac{2}{Z\varrho}\cos\frac{n\pi z}{Z}\int_0^\xi \varphi_0(\alpha)\left(\Psi^1(\alpha) + B^0(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{Z}\right)d\alpha,$$

$$Q = \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{2\Psi^0}{Z} + C\cos\frac{n\pi z}{Z}\right)\int_0^\xi \varphi_0(\alpha)\,\Psi^0(\alpha)\,d\alpha$$

$$+ \frac{C\Psi^0}{\varrho^2}\int_0^\xi \varphi_0(\alpha)\,U(\alpha)\,d\alpha + \frac{2B^1}{\varrho^2 Z}\cos\frac{n\pi z}{Z}\int_0^\xi \varphi_0(\alpha)\,d\alpha.$$

Jetzt sei

$$0 < \eta < \xi$$

und

$$\varphi_0(z) = 0$$

für das Intervall von $z = 0$ bis $z = \eta$; wenn dagegen

$$\eta \leqq z \leqq \xi$$

angenommen wird, sei

(4) $$\varphi_0(z) = \frac{\varphi(\xi)(z-\eta)}{\xi - \eta},$$

sodaß $\varphi_0(z)$ in dem Intervall von $z = 0$ bis $z = \xi$ nicht nur stetig ist und der Dirichletschen Bedingung genügt, sondern auch monoton ist; $\varphi(\xi)$ ist der vorgeschriebene Wert der gegebenen Funktion $\varphi(z)$ an der Stelle $z = \xi$, den wir von Null verschieden voraussetzen dürfen, da andernfalls die ausgesprochene Behauptung evident wäre.

Dies festgesetzt, sind zunächst die in der Summe Q zusammengefaßten Glieder hinsichtlich ihres Wertes leicht zu kontrollieren; sie haben alle die Gestalt

$$\frac{\Psi}{\varrho^2},$$

wobei Ψ zwischen von η und ϱ unabhängigen Grenzen bleibt, da die durch die Gleichung (4) definierten Werte von $\varphi_0(z)$ zwischen 0 und $\varphi(\xi)$ liegen. Läßt man η an ξ heranrücken, so werden alle Integrale beliebig klein, da das Integrationsintervall zusammenschrumpft, während der Integrand endlich bleibt; man kann also

$$Q = \frac{\Psi}{\varrho^2}$$

setzen, und es läßt sich zeigen, daß die über alle Werte von ϱ erstreckte Summe

$$\sum Q = \sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{\Psi_\nu}{\varrho_{\nu+1}^2} \tag{5}$$

dem absoluten Werte nach beliebig klein gemacht werden kann. Denn zunächst kann man m so groß wählen, daß die Summe

$$\sum_{\nu}^{m,\infty} \frac{\Psi_\nu}{\varrho_{\nu+1}^2},$$

unabhängig von η der Null so nahe liegt, wie man will; ist dies erreicht, so kann man η so nahe bei ξ wählen, daß die endliche Summe

$$\sum_{\nu}^{0,m-1} \frac{\Psi_\nu}{\varrho_{\nu+1}^2},$$

ebenfalls so klein ist, wie man will, und auch wenn $\xi - \eta$ noch weiter abnimmt, stets unter einer vorgeschriebenen Grenze verbleibt. Der Wert der Summe (5) kann also in der Tat der Null beliebig angenähert werden.

Um ein ähnliches Resultat auch für ΣP zu erhalten, gehen wir von der Formel (3) aus, welche

$$\Psi^1(\alpha) = \psi(\alpha) \sin \varrho\alpha + \chi(\alpha) \cos \varrho\alpha$$

ergibt in der Bezeichnung

$$\psi(\alpha) = h' + \int_0^\alpha \lambda' U' \cos \varrho z' \, dz',$$

$$\chi(\alpha) = -\int_0^\alpha \lambda' U' \sin \varrho z' \, dz'.$$

Da nun offenbar $\psi'(\alpha)$ und $\psi(\alpha)$ zwischen endlichen von ϱ unabhängigen Grenzen liegen, so kann eine ebenfalls von ϱ unabhängige Konstante A so gewählt werden, daß die Summe $A + \psi(\alpha)$, wenn α die Werte von 0 bis Z durchläuft, stets größer als eine feste positive Zahl, etwa Eins ist. Dann zeigt die Gleichung

$$\frac{d[\varphi_0(\alpha)(A + \psi(\alpha))]}{d\alpha} = \frac{\varphi(\xi)[A + \psi(\alpha)]}{\xi - \eta} + \varphi_0(\alpha)\psi'(\alpha),$$

die jedenfalls auf der Strecke von $\alpha = \eta$ bis $\alpha = \xi$ gilt, daß die Funktion $\varphi_0(\alpha)[A + \psi(\alpha)]$ von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \xi$ monoton ist, sobald $\xi - \eta$ unter eine gewisse von ϱ unabhängige Grenze herabgesetzt ist. In dieser Betrachtung kann $\psi(\alpha)$ durch eine der Funktionen $\chi(\alpha)$ und $B^0(\alpha)$ ersetzt werden, die ebenfalls mit ihren ersten Ableitungen zwischen endlichen von ϱ unabhängigen Grenzen liegen, wenn α das Intervall J durchläuft.

Jetzt zeigt die Identität

$$\int_0^\xi \varphi_0(\alpha)\psi(\alpha)\sin\varrho\alpha\,d\alpha = \int_0^\xi \varphi_0(\alpha)[A + \psi(\alpha)]\sin\varrho\alpha\,d\alpha - \int_0^\xi A\varphi_0(\alpha)\sin\varrho\alpha\,d\alpha$$

und diejenigen, die aus ihr entstehen, wenn man $\psi(\alpha)$ durch $\chi(\alpha)$ oder $B^0(\alpha)$ und gleichzeitig $\sin\varrho\alpha$ durch $\cos\varrho\alpha$ und $\sin\frac{n\pi\alpha}{Z}$ ersetzt, daß die Teilsumme P zerlegt werden kann in Integrale

$$\int_0^\xi \theta(\alpha)\cos\varrho\alpha\,d\alpha, \quad \int_0^\xi \theta(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{Z}\,d\alpha \tag{6}$$

und ebensolche, in denen das Zeichen cos durch sin ersetzt ist; dabei ist $\theta(\alpha)$ eine monotone Funktion, deren Werte zwischen von η unabhängigen Grenzen liegen, und die Integrale sind mit Faktoren von der Form $\frac{\Psi}{\varrho}$ multipliziert, in denen die Grenzen der Größe Ψ sogar von $\varphi_0(z)$ überhaupt unabhängig sind. Für das erste Integral (6) aber gilt nach § 4 die Ungleichung

$$\left|\int_0^\xi \theta(\alpha)\cos\varrho\alpha\,d\alpha\right| < \frac{4g}{\varrho},$$

wenn g der größte absolute Betrag von $\theta(\alpha)$ im Integrationsintervall ist; ersetzt man auf der rechten Seite 4 durch eine beliebige größere Konstante, so erhält man nach demselben Satze eine obere Grenze für das zweite Integral (6). Denn zunächst ist nach § 4

$$\left|\int_0^\xi \theta(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{Z}\,d\alpha\right| < \frac{4gZ}{n\pi},$$

das Verhältnis $\varrho : \frac{n\pi}{Z}$ strebt aber bei wachsenden Werten von ϱ der Einheit zu. Beide Integrale (6) und diejenigen, die man erhält, wenn man in ihnen cos durch sin ersetzt, sind daher, sobald ϱ eine gewisse Grenze überschritten hat, absolut kleiner etwa als

$$\frac{5g}{\varrho},$$

wobei g von η unabhängig ist. Berücksichtigt man noch die Faktoren, mit denen diese Integrale in der Summe P multipliziert sind, so sieht man, daß alle Glieder derselben die Gestalt

$$\frac{\Psi}{\varrho^2}$$

haben, wobei die Grenzen der Größen Ψ von η unabhängig sind. Da ferner jedes Glied von P ein Integralzeichen enthält, unter dem der Faktor $\varphi_0(\alpha)$ vorkommt, so schließt man genau wie bei den Größen Q, daß auch die Summe aller P durch passende Wahl von η beliebig klein gemacht werden kann.

Als Resultat dieser Entwicklung erhalten wir für $R_0^{0,\xi}$ den Ausdruck

$$\sum U(z)M\int_0^\xi U(\alpha)\,\varphi_0(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{Z}\int_0^\xi \varphi_0(\alpha)\,d\alpha + \frac{2}{Z}\sum_\nu^{1,\infty}\cos\frac{\nu\pi z}{Z}\int_0^\xi \varphi_0(\alpha)\cos\frac{\nu\pi\alpha}{Z}\,d\alpha + \varepsilon,$$

in welchem das Glied

$$\varepsilon = \frac{1}{Z}\int_0^\xi \varphi_0(\alpha)\,d\alpha + \sum P + \sum Q$$

der Null beliebig genähert werden kann, indem man η an ξ heranrücken läßt. In derselben Form erscheint die Größe $R_0^{0,\xi}$, wenn für die erste Normalfunktion $\varrho = 0$ zu setzen ist; denn ein einzelnes Glied

$$U(z)\,M\int_0^\xi U(\alpha)\,\varphi_0(\alpha)\,d\alpha$$

wird offenbar mit $\xi - \eta$ beliebig klein. Nun ist $R_0^{\xi,\eta}$ von η, weil überhaupt von der besonderen Wahl der Funktion $\varphi_0(z)$ der Gleichung (2) zufolge unabhängig; dasselbe gilt von der Reihe

$$\frac{1}{Z}\int_0^\xi \varphi_0(\alpha)\,d\alpha + \frac{2}{Z}\sum_\nu^{1,\infty}\cos\frac{\nu\pi z}{Z}\int_0^\xi \varphi_0(\alpha)\cos\frac{\nu\pi\alpha}{Z}\,d\alpha,$$

die nach § 5, da ξ kleiner als Z ist, den Wert 0 oder $\frac{1}{2}\varphi(\xi)$ hat, je nachdem z größer als ξ oder $z = \xi$ ist; man findet also schließlich entsprechend diesen Fällen eine der Gleichungen

$$R_0^{0,\xi} = 0, \qquad R_0^{0,\xi} = \frac{1}{2}\,\varphi(\xi),$$

und die Gleichung (2) ergibt sofort, indem man z für ξ setzt, demgemäß

$$0 < z < Z$$

annimmt, und die unabhängige Variable sichtbar macht,

$$R(z)^{0,z} = \frac{1}{2}\,\varphi(z); \tag{7}$$

für $z > \xi$ erhält man

$$R(z)^{0,\xi} = 0. \tag{8}$$

Verbindet man die letzten Gleichungen mit der Identität

$$R^{0,z} = R^{0,\xi} + R^{\xi,z},$$

so findet man

$$R(z)^{\xi,z} = \frac{1}{2}\,\varphi(z), \tag{9}$$

und hier treten beiderseits nur die Werte auf, welche $\varphi(z)$ auf der Strecke von ξ bis z annimmt.

Der Wert von z darf in der letzten Gleichung die obere Grenze Z nicht erreichen, da dies schon in der Gleichung (7) ausgeschlossen wurde. Für $z = Z$ aber hat man nach § 13 die Gleichung

$$R(Z)^{0,Z} = \varphi(Z)$$

und die Gleichung (8), in welcher $z = Z$ gesetzt werden darf, ergibt

$$R(Z)^{\xi,Z} = \varphi(Z).$$

Diese Resultate erweitern sich sofort, wenn man die Rollen der beiden Endpunkte des Intervalls J vertauscht; das ist erlaubt, da die Differentialgleichung der Normalfunktionen ebenso wie die Grenzbedingungen ihre Form behalten, wenn man $Z - z$ an Stelle von z als unabhängige Variable einführt. Ist dies geschehen, so braucht man nur die oben erhaltenen Werte von $R^{0,\xi}$ und $R^{\xi,z}$ anzuwenden, um sofort unter der Voraussetzung

$$0 \leqq z < \zeta < Z$$

die Gleichung

$$R(z)^{\zeta,Z} = 0$$

und, wenn z von Null verschieden ist,

$$R(z)^{z,\zeta} = R(z)^{z,Z} = \frac{1}{2}\,\varphi(z), \tag{10}$$

für $z = 0$ aber die Gleichung

$$R(0)^{0,\zeta} = \varphi(0)$$

zu erhalten.

Jetzt ist es leicht, auch den Fall zu erledigen, in welchem $\varphi(z)$ im Innern der Strecke J eine endliche Anzahl von Unstetigkeitsstellen besitzt. In diesen sind, wie in § 4 erwähnt, bei der Annäherung von rechts wie

von links her bestimmte endliche Grenzwerte der Funktion vorhanden, wenn die Dirichletsche Bedingung nach wie vor erfüllt ist. Eine von ihnen sei ζ, während $\varphi(z)$ auf den Strecken

$$\xi \leqq z < \zeta, \qquad \zeta < z \leqq \eta$$

stetig bleibe. Dann hat man der Gleichung (9) zufolge

$$R(\zeta)^{\xi,\zeta} = \frac{1}{2}\,\varphi(\zeta),$$

wobei unter $\varphi(\zeta)$ der für $z = \zeta$ erhaltene Wert der von $z = \xi$ bis $z = \zeta$ stetigen Funktion verstanden wird, den wir, wenn $\varphi(z)$ für das ganze Intervall J betrachtet wird, als $\varphi(\zeta - 0)$ bezeichnen müssen. Man hat demgemäß die letzte Gleichung in der Form

$$R(\zeta)^{\xi,\zeta} = \frac{1}{2}\,\varphi(\zeta - 0) \tag{11}$$

zu schreiben und findet ebenso

$$R(\zeta)^{\zeta,\eta} = \frac{1}{2}\,\varphi(\zeta + 0). \tag{12}$$

Da man ferner aus der Formel (8) leicht ersieht, daß die Gleichungen

$$R(\zeta)^{0,\xi} = 0, \qquad R(\zeta)^{\eta,Z} = 0$$

schon dann gelten, wenn die Strecken von 0 bis ξ und von η bis Z in eine endliche Anzahl solcher zerfallen, innerhalb deren $\varphi(z)$ stetig ist, so folgt aus den Gleichungen (11) und (12) die Formel

$$R(\zeta)^{0,Z} = \frac{1}{2}\,[\varphi(\zeta - 0) + \varphi(\zeta + 0)],$$

und, wenn ζ keine Unstetigkeitsstelle ist, die schon bekannte Darstellung

$$R(\zeta)^{0,Z} = \varphi(\zeta).$$

Drückt man endlich diese Resultate in der Variablen x aus, wobei sich die benutzten Stetigkeitseigenschaften von $\varphi(z)$ auf $f(x)$ übertragen, so findet man:

Wenn die Funktion $f(x)$ im Intervall von $x = 0$ bis $x = X$ der Dirichletschen Bedingung unterworfen und nur an einer endlichen Anzahl zwischen 0 und X liegender Stellen unstetig ist, übrigens aber dieselben Voraussetzungen gelten wie am Ende des § 13, *so ist an jeder Unstetigkeitsstelle*

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{V_\nu \int\limits_0^X g\, f(x)\, V_\nu\, dx}{\int\limits_0^X g\, V_\nu^2\, dx} = \frac{1}{2}\,[f(x+0) + f(x-0)].$$

An jeder andern Stelle des bezeichneten Intervalls ist der Wert dieser Reihe wie früher $f(x)$.

IV. Die Darstellung willkürlicher Funktionen durch Normalfunktionen mit mindestens einer festen Nullstelle.

§ 15.

Die Gestalt der Normalfunktionen für $h = \infty$, $H = \infty$.

Die durchgeführte Argumentation liefert ohne wesentliche Modifikation des Grundgedankens aber vermittelst einer etwas anderen Rechnung die analogen Resultate auch für den Fall, daß eine der Konstanten h, H oder beide unendlich sind, d. h. daß mindestens eine der Grenzbedingungen der Normalfunktionen durch eine der Gleichungen

$$V|^0 = 0, \qquad V|^X = 0,$$

ersetzt wird. Diese Fälle, zu denen z. B. der im Abschnitt II betrachtete gehört, waren in den §§ 9 und 10 nicht ausgeschlossen; nur die von § 11 an durchgeführten Entwicklungen müssen modifiziert werden.

Es sei zunächst $h = \infty$; dann ergibt sich aus der in § 11 nach Liouville durchgeführten Transformation, die von der speziellen Gestalt der Grenzbedingungen unabhängig ist, für die Normalfunktionen U die Gleichung

$$U|^0 = 0,$$

und wenn man wie dort aus der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + (\varrho^2 - \lambda) U = 0$$

die ersten Integrale

$$\sin \varrho z \frac{dU}{dz} - \varrho U \cos \varrho z = A + \int_0^z \lambda' U' \sin \varrho z' dz',$$

$$\cos \varrho z \frac{dU}{dz} + \varrho U \sin \varrho z = B + \int_0^z \lambda' U' \cos \varrho z' dz'$$

ableitet, findet man

$$A = 0, \qquad B = \frac{dU}{dz}\Big|^0;$$

für positive Werte von ϱ können wir

$$\frac{dU}{dz}\Big|^0 = \varrho$$

setzen und erhalten dann allgemein

$$U = \sin \varrho z + \frac{1}{\varrho} \int_0^z \lambda' U' \sin \varrho (z - z') dz'. \tag{1}$$

Der Ausnahmefall $\varrho = 0$ kann, wie man leicht sieht, bei positiven Werten von H nicht eintreten, und würde nur ein einzelnes, für die Konvergenzfragen unerhebliches Glied in die zu untersuchenden Reihen einführen.

Die durch die Gleichung (1) bestimmte Normalfunktion liegt, sobald ϱ eine gewisse Grenze überschritten hat, in dem ganzen Intervall J zwischen $+2$ und -2; denn ist Q das Maximum ihres absoluten Betrages, so ist die rechte Seite der Gleichung (1) dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$1 + \frac{Q}{\varrho}\int_0^Z |\lambda'|\, dz';$$

daraus folgt allgemein

$$|U| < 1 + \frac{Q}{\varrho}\int_0^Z |\lambda'|\, dz'$$

und weiter, sobald

$$\varrho > \int_0^Z |\lambda'|\, dz'$$

geworden ist,

$$\left[1 - \frac{1}{\varrho}\int_0^Z |\lambda'|\, dz'\right] Q < 1,$$

woraus sich die ausgesprochene Behauptung ergibt.

Die Gleichung, welche die für die Normalfunktionen charakteristischen Werte von ϱ liefert, erhält man aus der zweiten Grenzbedingung

$$\frac{dU}{dz} + H'U\Big|^Z = 0,$$

indem man den Wert (1) einsetzt, in folgender Form:

$$\sin \varrho Z \left\{H' + \int_0^Z \lambda' U' \sin \varrho z'\, dz' + \frac{H'}{\varrho}\int_0^Z \lambda' U' \cos \varrho z'\, dz'\right\}$$

$$+ \cos \varrho Z \left\{\varrho + \int_0^Z \lambda' U' \cos \varrho z'\, dz' - \frac{H'}{\varrho}\int_0^Z \lambda' U' \sin \varrho z'\, dz'\right\} = 0.$$

Nun bleiben die Integrale

$$\int_0^Z \lambda' U' \cos \varrho z'\, dz', \qquad \int_0^Z \lambda' U' \sin \varrho z'\, dz'$$

bei wachsenden Werten von ϱ ebenso wie U zwischen festen endlichen Grenzen; die erhaltene Gleichung reduziert sich daher, durch ϱ dividiert, im wesentlichen auf die Form

$$\cos \varrho Z = 0,$$

aus welcher sich der asymptotische Wert

$$\varrho \sim \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{Z}$$

ergibt. Eine Untersuchung, die sehr ähnlich der in § 11 durchgeführten verläuft, führt zu dem genaueren Werte

$$\varrho = \varrho_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{Z} + \frac{B}{\varrho}, \tag{2}$$

wobei B zwischen endlichen von ϱ unabhängigen Grenzen verbleibt.

Daß der erhaltene Wert von ϱ gerade die $(n+1)^{\text{te}}$ Normalfunktion ergibt, folgt wieder daraus, daß diese stets genau n von $z = 0$ verschiedene Nullstellen besitzt; die dem Werte (2) entsprechende Normalfunktion reduziert sich aber bei großen Werten von n wesentlich auf

$$\sin(2n+1)\frac{\pi z}{2Z}$$

und verschwindet, abgesehen von $z = 0$, im Intervall J an den Stellen

$$z = \frac{2Z}{2n+1}, \frac{4Z}{2n+1}, \cdots, \frac{2nZ}{2n+1},$$

d. h. genau n-mal, ist also mit U_{n+1} identisch. Den Werten $\varrho_1, \varrho_2, \cdots$ entsprechen daher die Zahlen $n = 0, 1, \cdots$.

Ebenso leicht findet man die entsprechenden Resultate im Falle $H = \infty$, d. h. wenn die Größen ϱ durch die Gleichung

$$U|^Z = 0, \qquad \sin\varrho Z + \frac{1}{\varrho}\int_0^Z \lambda' U' \sin\varrho(Z - z')\,dz' = 0$$

definiert werden, die bei großen ϱ annähernd durch

$$\sin\varrho Z = 0$$

ersetzt werden kann und den asymptotischen Wert

$$\varrho \sim \frac{n\pi}{Z}, \qquad \varrho = \frac{n\pi}{Z} + \frac{B}{\varrho} \tag{3}$$

ergibt. Die entsprechende Normalfunktion ist wesentlich

$$\sin\frac{n\pi z}{Z},$$

verschwindet also zwischen den Grenzen des Intervalls J genau $(n-1)$ mal und ist mit U_n identisch, da jetzt die n^{te} Normalfunktion $n - 1$ Nullstellen zwischen 0 und Z besitzt; der durch die zweite Gleichung (3) gegebene Wert von ϱ ist also genauer durch ϱ_n zu bezeichnen.

Der letzte mögliche Fall, daß h endlich und H unendlich ist, braucht offenbar nicht besonders betrachtet zu werden, da er sich von dem ersten, in welchem für h und H das Umgekehrte gilt, nicht wesentlich unterscheidet.

§ 16.

Analoga der §§ 12 und 13.

Nach diesen Vorbereitungen ist es leicht, die oben für endliche Werte von h und H entwickelten Kriterien der gleichmäßigen Konvergenz der nach Normalfunktionen fortschreitenden Reihe auf den vorliegenden Fall mit einer geringen Modifikation zu übertragen.

Zu diesem Zweck gehen wir davon aus, daß der Formel (1) des § 15 zufolge, wenn die Bezeichnung

$$N = \int_0^\alpha \lambda' U' \sin(\alpha - z')\, dz'$$

eingeführt wird, die Gleichung

$$(1) \qquad \int_0^Z U^2(\alpha)\, d\alpha = \int_0^Z \sin^2 \varrho\alpha\, d\alpha + \frac{2}{\varrho} \int_0^Z N \sin \varrho\alpha\, d\alpha + \frac{1}{\varrho^2} \int_0^Z N^2\, d\alpha$$

gilt, aus der man schließt

$$(2) \qquad \lim_{\varrho=\infty} \int_0^Z U^2(\alpha)\, d\alpha = \frac{Z}{2}\cdot$$

Man findet ferner wie in § 12 unter den dort für $f(x)$ eingeführten Voraussetzungen die Gleichung

$$\int_0^Z U(\alpha)\varphi(\alpha)\, d\alpha = -\frac{\varphi(\alpha)\, U'(\alpha)}{\varrho^2 - \lambda(\alpha)} + U(\alpha) \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varrho^2 - \lambda(\alpha)}\right)\Bigg|_0^Z - \int_0^Z U(\alpha) \frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varrho^2 - \lambda(\alpha)}\right) d\alpha,$$

und in ihr fällt das Glied mit $U'(0)$ weg, wenn wir annehmen

$$f(0) = 0, \qquad \varphi(0) = 0.$$

Für $U'(Z)$ kann man $-H'U(Z)$ schreiben, wenn H endlich ist; ist $H = \infty$, so gelte die weitere Voraussetzung

$$f(X) = 0, \qquad \varphi(Z) = 0.$$

Auf diese Weise erreicht man in jedem Falle, daß alle Glieder des betrachteten Ausdrucks die Form

$$\frac{\psi}{\varrho^2}$$

haben, und dasselbe gilt der Gleichung (2) zufolge, und da $U(z)$ zwischen endlichen, von ϱ unabhängigen Grenzen liegt, von dem allgemeinen Gliede der Reihe R. Da nun ϱ nach § 15, sobald eine gewisse Grenze überschritten ist, wesentlich in arithmetischer Progression wächst, gleichviel ob H endlich oder unendlich ist, so ist die gleichmäßige Konvergenz der Reihe R wiederum erwiesen. Da ferner die Entwicklungen des § 10 auch für unendliche h und H gelten, so kann die Reihe R auch wie in § 12 summiert werden und hat den Wert $\varphi(z)$.

Aber auch die Entwicklungen des § 13 sind mit leichter Modifikation auf den vorliegenden Fall zu übertragen, wenn man die dort geltenden Voraussetzungen betreffs der Funktionen g, k, l und $f(x)$ festhält. Zunächst ergibt die Gleichung (1), da nach § 4

$$\int_0^Z \sin \varrho\alpha\, d\alpha = \frac{\Psi}{\varrho}$$

gesetzt werden kann, kombiniert mit der Gleichung

$$\int_0^Z \sin^2 \varrho\alpha\, d\alpha = \frac{\varrho Z - \cos\varrho Z \sin\varrho Z}{2\varrho},$$

die Folgerung

$$M = 1 : \int_0^Z U^2(\alpha)\, d\alpha = \frac{2}{Z} + \frac{C}{\varrho}, \tag{4}$$

und C liegt zwischen endlichen von ϱ unabhängigen Grenzen. Man findet ferner vermittelst des Ausdruckes (1) in § 15

$$U = \sin \varrho z + \frac{\Psi}{\varrho}, \tag{5}$$

$$\varrho\int_\xi^\eta U(\alpha)\,\varphi(\alpha)\,d\alpha = \varrho\int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\sin\varrho\alpha\, d\alpha + \int_\xi^\eta d\alpha\,\varphi(\alpha)\sin\varrho\alpha \int_0^\alpha \lambda' U' \cos\varrho z'\, dz'$$
$$- \int_\xi^\eta d\alpha\,\varphi(\alpha)\cos\varrho\alpha \int_0^\alpha \lambda' U' \sin\varrho z'\, dz',$$

wobei wieder ξ und η beliebige Werte von z im Intervall J sein können. Da hier das zweite und dritte der zwischen ξ und η genommenen Integrale ebenso behandelt werden können wie die analogen Glieder in der Gleichung (1) des § 13, und U zwischen endlichen Grenzen bleibt, so kann man aus der letzten Gleichung nach § 4 und der Gleichung (5) schließen

$$U\int_\xi^\eta U(\alpha)\,\varphi(\alpha)\,d\alpha = \frac{2\sin\varrho z}{Z}\int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\sin\varrho\alpha\, d\alpha + \frac{\Psi}{\varrho^2}, \tag{6}$$

und Ψ liegt zwischen endlichen, von ξ, η, z und ϱ unabhängigen Grenzen.

Nun ergeben die Gleichungen (2) und (3) des § 15, je nachdem H endlich oder unendlich ist,

$$\sin \varrho z = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{Z} + \frac{B^0}{\varrho}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{Z} + \frac{B^1}{\varrho^2}$$

oder

$$\sin \varrho z = \sin\frac{n\pi z}{Z} + \frac{B^0}{\varrho}\cos\frac{n\pi z}{Z} + \frac{B^1}{\varrho^2},$$

wobei B^1 und B^0 zwischen endlichen von ϱ unabhängigen Grenzen liegen, und

$$B^0 = \varrho \sin\frac{Bz}{\varrho}$$

ist; entsprechend beiden Fällen findet man somit

$$\int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\sin\varrho\alpha\, d\alpha = \int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha\pi}{Z}\,d\alpha + \frac{1}{\varrho}\int_\xi^\eta B\varphi(\alpha)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha\pi}{Z}\,d\alpha + \frac{\Psi}{\varrho^2},$$

$$\int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\sin\varrho\alpha\, d\alpha = \int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\sin\frac{n\alpha\pi}{Z}\,d\alpha + \frac{1}{\varrho}\int_\xi^\eta B\varphi(\alpha)\cos\frac{n\alpha\pi}{Z}\,d\alpha + \frac{\Psi}{\varrho^2}.$$

Die zweiten Integrale rechts haben aber nach § 4 die Gestalt $\Psi : \varrho$, da $\varphi(z)$ der Dirichletschen Bedingung unterworfen ist; somit folgt eine der Gleichungen

$$\int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\sin\varrho\alpha\, d\alpha = \int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha\pi}{Z}\,d\alpha + \frac{\Psi}{\varrho^2},$$

$$\int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\sin\varrho\alpha\, d\alpha = \int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\sin\frac{n\alpha\pi}{Z}\,d\alpha + \frac{\Psi}{\varrho^2},$$

und auch hier haben die Größen Ψ die oben angegebene Beschaffenheit. Substituiert man diese Werte in die Gleichung (6) und berücksichtigt die Gleichung (4), so ergibt sich

$$UM\int_\xi^\eta U(\alpha)\varphi(\alpha)\,d\alpha \tag{7}$$

$$= \frac{2}{Z}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{z\pi}{Z}\int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha\pi}{Z}\,d\alpha + \frac{\Psi}{\varrho^2}$$

oder

$$UM\int_{\xi}^{\eta} U(\alpha)\varphi(\alpha)\,d\alpha = \frac{2}{Z}\sin\frac{nz\pi}{Z}\int_{\xi}^{\eta}\varphi(\alpha)\sin\frac{n\alpha\pi}{Z}\,d\alpha + \frac{\Psi}{\varrho^2}.$$

Hieraus schließt man wie in § 13, daß die Reihe $R^{\xi,\eta}$, deren allgemeines Glied durch einen der letzten beiden Ausdrücke dargestellt wird, gleichmäßig konvergiert, sobald dies von der einen oder andern der Reihen

$$\frac{2}{Z}\sum_{\nu}^{1,\infty}\sin\frac{\nu\pi z}{Z}\int_{\xi}^{\eta}\varphi(\alpha)\sin\frac{\nu\pi\alpha}{Z}\,d\alpha,$$

(8)

$$\frac{2}{Z}\sum_{\nu}^{0,\infty}\sin\frac{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi z}{Z}\int_{\xi}^{\eta}\varphi(\alpha)\sin\frac{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi\alpha}{Z}\,d\alpha$$

gilt; denn die Reihe

$$\sum\frac{\Psi}{\varrho^2}$$

konvergiert, da die Grenzen der Größe Ψ die oben angegebene Beschaffenheit haben, gleichmäßig, wenn man z das Intervall J durchlaufen läßt; dasselbe gilt auch, wovon wir später Gebrauch machen, hinsichtlich der Größen ξ, η.

Speziell ist die Reihe R oder $R^{0,Z}$ gleichmäßig konvergent, sobald dies von einer der für $\xi = 0$, $\eta = Z$ gebildeten Reihen (8) gilt, welche sich durch eine einfache Substitution auf die Reihen R_1 und R_3 des § 3 reduzieren. Erstere ist nach § 5 gleichmäßig konvergent, wenn $\varphi(z)$ der Dirichletschen Bedingung genügt und die Gleichungen

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi(Z) = 0$$

bestehen; dasselbe gilt von R_3 schon, wenn nur die erste dieser Gleichungen vorausgesetzt wird.

Zusammenfassend kann man also sagen: *Die Resultate der* §§ 12 *und* 13 *bleiben für $h = \infty$, d. h. wenn die Normalfunktionen der Gleichung*

$$V|^0 = 0$$

genügen, gültig unter der Voraussetzung

$$f(0) = 0.$$

Ist auch noch $H = \infty$, sodaß die zweite Grenzbedingung der Normalfunktionen in der Gleichung

$$V|^X = 0$$

besteht, so gelten jene Resultate bei der Voraussetzung

$$f(0) = f(X) = 0.$$

§ 17.

Die dargestellte Funktion frei von Grenzbedingungen.

Um das erhaltene Resultat von den der Funktion $f(x)$ auferlegten Grenzbedingungen unabhängig zu machen, beschränken wir uns zunächst auf endliche Werte von H und nehmen an, $\varphi(z)$ sei im Intervall J eine beliebige stetige, nur der Dirichletschen Bedingung unterworfene Funktion. Es sei ferner

$$0 < \eta < \xi < Z$$

und gelte die Gleichung

$$\varphi_0(z) = \varphi(z)$$

für die Strecke

$$\xi \leqq z \leqq Z;$$

dagegen sei

$$\varphi_0(z) = \frac{(z-\eta)\varphi(\xi)}{\xi - \eta},$$

sobald

$$\eta \leqq z \leqq \xi,$$

und

$$\varphi_0(z) = 0$$

im Intervall

$$0 \leqq z \leqq \eta.$$

Die so definierte Funktion $\varphi_0(z)$ ist im Intervall J stetig, verschwindet an dessen unterer Grenze und genügt der Dirichletschen Bedingung. Setzt man also allgemein

$$R^{\xi,\eta} = \sum UM \int_{\xi}^{\eta} U(\alpha)\,\varphi(\alpha)\,d\alpha,$$

$$R_0^{\xi,\eta} = \sum UM \int_{\xi}^{\eta} U(\alpha)\,\varphi_0(\alpha)\,d\alpha,$$

so hat man nach § 16 für $z \geqq \xi$

$$R_0^{0,z} = \varphi_0(z) = \varphi(z) \tag{1}$$

und es gelten die Identitäten

$$R_0^{0,z} = R_0^{0,\xi} + R_0^{\xi,z} = R_0^{0,\xi} + R^{\xi,z}. \tag{2}$$

Da nun die linke Seite der Gleichung (2) der Gleichung (1) zufolge von η unabhängig ist und dasselbe von $R^{\xi,z}$ offenbar gilt, so ist auch $R_0^{0,\xi}$ von η unabhängig; wir zeigen, *daß der Wert dieser Größe Null oder* $\frac{1}{2}\varphi(\xi)$ *ist, je nachdem* z *größer als* ξ *oder* $z = \xi$ *ist.*

Zu diesem Zweck gehen wir von den Ausdrücken (4) und (5) des § 16 und (1) des § 15 aus und schreiben

$$U = \sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi z}{Z} + \frac{\Psi^0}{\varrho},$$

$$\Psi^0 = \Psi^1 + B^0 \cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi z}{Z} + \frac{B^1}{\varrho},$$

$$\Psi^1 = \psi(z)\sin\varrho z + \chi(z)\cos\varrho z,$$

$$\psi(z) = \int_0^z \lambda' U' \cos\varrho z'\, dz', \qquad \chi(z) = -\int_0^z \lambda' U' \sin\varrho z'\, dz';$$

dann ergibt sich die Gleichung:

$$M U(z)\int_0^\xi U(\alpha)\varphi_0(\alpha)\,d\alpha = \left[\frac{2}{Z}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi z}{Z} + \frac{2\Psi^0}{Z\varrho} + \frac{C}{\varrho}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi z}{Z}\right.$$

$$\left. + \frac{C\Psi^0}{\varrho^2}\right]\int_0^\xi \varphi_0(\alpha)\left\{\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\alpha}{Z} + \frac{\Psi^1(\alpha)}{\varrho} + \frac{B^1(\alpha)}{\varrho^2}\right.$$

$$\left. + \frac{B^0(\alpha)}{\varrho}\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\alpha}{Z}\right\}d\alpha$$

$$= \frac{2}{Z}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi z}{Z}\int_0^\xi \varphi_0(\alpha)\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\alpha}{Z}\,d\alpha + P + Q,$$

und die Ausdrücke P, Q entstehen aus den gleichbezeichneten des § 14, indem man den Bruch $\frac{n\pi}{Z}$ überall durch $\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{Z}$ ersetzt und die Zeichen cos und sin vertauscht. Diese Umgestaltung berührt aber die in § 14 durchgeführten Schlüsse in keiner Weise; denn B^0 hat nach § 16 dieselbe Gestalt wie in § 11, und die Funktionen ψ, χ behalten ihre in § 14 allein benutzte Eigenschaft, mit ihren Ableitungen zwischen endlichen Grenzen zu liegen. Man findet daher genau wie dort, daß die Summen

$$\sum P, \quad \sum Q,$$

welche über alle Werte von ϱ zu erstrecken sind, beliebig der Null genähert werden können, indem man η an ξ heranrücken läßt. Da nun nach § 5 die Reihe

$$\sum_{\nu}^{0,\infty} \sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{Z}\int\limits_0^{\xi} \varphi_0(\alpha)\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\alpha}{Z}\,d\alpha$$

den Wert 0 oder

$$\frac{1}{2}\,\varphi_0(\xi) = \frac{1}{2}\,\varphi(\xi)$$

hat, je nachdem z größer als ξ oder gleich ξ ist, so kann die Größe $R_0^{0,\xi}$ im ersten Falle der Null, im zweiten dem Werte $\frac{1}{2}\,\varphi(\xi)$ beliebig angenähert werden. Sie ist aber, wie oben bemerkt, von η unabhängig; also folgt, wenn $z > \xi$

$$R_0^{0,\xi} = 0,$$

und die Gleichung (1) ergibt, indem man die Variable dem Zeichen R anfügt,

$$\varphi(z) = R(z)^{\xi, Z}. \tag{3}$$

Ebenso erhält man für $z = \xi$

$$R_0^{0,\xi} = R^{0,\xi} = \frac{1}{2}\,\varphi(\xi), \qquad R^{\xi, Z} = \frac{1}{2}\,\varphi(\xi). \tag{4}$$

Mit der Gleichung (3) kombinieren wir die in § 16 betonte Tatsache, daß in der Gleichung

$$R^{\xi,\eta} = \sum UM\int\limits_{\xi}^{\eta}\varphi(\alpha)\,U(\alpha)\,d\alpha$$

$$= \frac{2}{Z}\sum_{\nu}^{0,\infty}\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{Z}\int\limits_{\xi}^{\eta}\varphi(\alpha)\,\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\alpha}{Z}\,d\alpha + \sum\frac{\Psi}{\varrho^2}$$

die Reihe

$$\sum\frac{\Psi}{\varrho^2} \tag{5}$$

hinsichtlich der Größen ξ und η gleichmäßig konvergiert. Da nun jedes ihrer Glieder eine stetige Funktion von ξ und η ist, so gilt dasselbe von der ganzen Summe (5), und ebenso auch von $R^{\xi,\eta}$ unter der Voraussetzung

$$z > \eta > \xi,$$

da dann nach § 5 die trigonometrische Reihe in dem obigen Ausdruck $R^{\xi,\eta}$ verschwindet, und zwar auch für $\xi = 0$. Die Gleichung (3) aber ergibt

$$\varphi(z) = R^{\xi, Z} = R^{\eta, Z}$$

und damit

$$R^{\eta, Z} - R^{\xi, Z} = R^{\xi,\eta} = 0;$$

läßt man also ξ gegen die Grenze Null konvergieren, so nähert sich $R^{\xi,\eta}$ der Grenze $R^{0,\eta}$, und man findet übereinstimmend mit der Formel (8) des § 14

(6) $$R^{0,\eta} = 0,$$

mithin, sobald z von Null verschieden ist,

(7) $$R^{0,Z} = \varphi(z),$$

womit eine willkürliche Funktion auch im Falle $h = \infty$ durch die Normalfunktionen dargestellt ist, ohne daß $\varphi(0)$ und $f(0)$ zu verschwinden brauchten.

Diese Entwicklung kann, wenn zunächst $\varphi(Z) = 0$, ohne wesentliche Änderung auf den Fall $H = \infty$ übertragen werden, indem man $n + \frac{1}{2}$ und $\nu + \frac{1}{2}$ durch n und ν ersetzt. Sodann kann für den Fall, daß $\varphi(Z)$ von Null verschieden ist, eine der durchgeführten analoge Betrachtung für die in der oberen Grenze Z endigenden Intervalle angestellt werden; man findet auch hier, wenn

$$Z \geqq \zeta > z > 0$$

ist, die der Gleichung (6) analoge

$$R^{\zeta,Z} = 0.$$

Somit ergibt sich, gleichviel ob H endlich oder unendlich ist, immer die Darstellung (7), solange z keinen der Werte 0 und Z annimmt.

Übersetzt man die erhaltenen Resultate in die Sprache der Variablen x und $f(x)$, so findet man, *daß die nach Normalfunktionen fortschreitende Reihe, auch wenn die Größen h und H nicht beide endlich sind, die der Dirichletschen Bedingung unterworfene und stetige Funktion $f(x)$ auf der Strecke von $x = 0$ bis $x = X$ darstellt, auch wenn über $f(0)$ und $f(X)$ nichts vorausgesetzt wird; nur muß x, wenn $h = \infty$ ist, von 0, wenn $H = \infty$ ist, von X verschieden bleiben.*

Endlich kann auch der Fall, daß $f(x)$ Unstetigkeiten aufweist, ebenso wie in § 14 behandelt werden. Denn zunächst ergibt die Gleichung (4), wenn

$$0 < \xi < z < Z,$$

die Beziehungen

(8) $$R(z)^{0,z} = R(z)^{\xi,z} = \frac{1}{2}\varphi(z),$$

welche dieselbe Form haben wie die unter denselben Voraussetzungen geltenden Gleichungen (7) und (9) des § 14. Ebenso kann auch die Gleichung (10) des § 14:

(9) $$R(z)^{z,\zeta} = \frac{1}{2}\varphi(z),$$

die unter der Voraussetzung

$$0 < z < \zeta < Z$$

gilt, auf den vorliegenden Fall übertragen werden. Das ist unmittelbar ersichtlich, wenn die Konstanten h und H beide unendlich sind, da dann die Enden des Intervalls J dieselben Eigenschaften haben und vertauscht werden können, womit die Gleichungen (8) und (9) ineinander übergehen. Andere Erwägungen führen zu der Gleichung (9), wenn H endlich ist. Dann muß man davon ausgehen, daß mit einer Modifikation, die wir angeben wollen, die Entwicklung des § 14 auch für den Fall $H = \infty$ gültig bleibt. Bei dieser Annahme bleibt nämlich die in der Gleichung (6) des § 11 gegebene Darstellung der Funktion U, wie dort schon bemerkt wurde, richtig, und da die Normalfunktionen am oberen Ende des Intervalls J verschwinden, erhält man für große Werte von ϱ die annähernde Bestimmung

$$\cos \varrho Z = 0,$$

sodaß durchgehends in den Werten von ϱ die Zahl n durch $n + \frac{1}{2}$ zu ersetzen ist. Vertauscht man jetzt die Enden des Intervalls J, indem man $Z - z$ an Stelle von z als Argument einführt, so kommt man auf den Fall, daß H endlich, h unendlich ist, zurück, und die Gleichung (9) erscheint als eine andre Form der Gleichung (9) des § 14.

Auf Grund dieser Formeln findet man durch genau dieselbe Schlußreihe wie in § 14, daß, wenn die Funktion $f(x)$ im Innern des Intervalls J eine endliche Anzahl von Unstetigkeiten besitzt, an jeder von diesen der Wert der nach den Normalfunktionen fortschreitenden Reihe durch den Ausdruck

$$\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$$

dargestellt wird.

Hiermit ist auch für den Fall unendlicher Werte von h und H die Dirichletsche Theorie der Fourierschen Reihe im wesentlichen auf die Sturm-Liouvilleschen Reihen übertragen.

Bemerkungen zur Variationsrechnung.

Von

Hans Hahn in Wien.

Im 55. Bande der Mathematischen Annalen veröffentlicht Herr Kneser eine Abhandlung, in der er auf die schon wiederholt behandelte Frage zurückkommt, ob auch im Falle des einfachsten isoperimetrischen Problems eine dem sogenannten Jakobischen Kriterium analoge notwendige Bedingung für das Eintreten eines Extremums besteht. Bis auf einen Ausnahmefall wird diese Frage daselbst in bejahendem Sinne beantwortet, während dieser Ausnahmefall wie in allen früheren mir bekannt gewordenen Beweisen unerledigt bleibt*). Da nun aber bekanntlich die isoperimetrischen Probleme sich in einfacher Weise auf das sogenannte Lagrangesche Problem zurückführen lassen, welches von G. v. Escherich in einer Reihe eingehender Untersuchungen**) behandelt wurde, so ist es naheliegend, sich die Frage vorzulegen, ob nicht etwa auf Grund der Resultate dieser Untersuchungen die oben erwähnte Frage sich vollständig erledigen läßt. Zu diesem Zwecke war es nötig, zu prüfen, inwiefern die Voraussetzungen, auf denen v. Escherich ausdrücklich seine Untersuchungen aufbaut***), im isoperimetrischen Probleme erfüllt sind. Abgesehen von den unentbehrlichen Annahmen über gewisse Stetigkeitseigenschaften der auftretenden Funktionen sind dies die folgenden Voraussetzungen: 1) Jede reguläre Kurve, die das gewünschte Extremum liefert, bildet zusammen mit den Multiplikatoren eine stetige Lösung des Lagrangeschen Differentialgleichungssystemes; 2) Die Bedingungsgleichungen können durch

*) Als ich den vorliegenden Aufsatz der Redaktion übersandte, war Bolzas Abhandlung (Math. Ann. Bd. 57) „Zur zweiten Variation bei isoperimetrischen Problemen" noch nicht erschienen.

**) Die zweite Variation einfacher Integrale. Mitt. I, II, III. Wiener Ber. 1898, Bd. 107; Mitt. IV, Wien. Ber. 1899, Bd. 108. Mitt. V, Wien. Ber. 1901, Bd. 110. Eine analoge Methode habe ich auf ein etwas allgemeineres Problem angewendet: Zur Theorie der zweiten Variation einfacher Integrale. Monatshefte für Math. und Phys. Bd. 14.

***) Vgl. l. c. Mitt. I § 2, Mitt. V § 15.

ihnen äquivalente lineare Gleichungen ersetzt werden. Für das isoperimetrische Problem ist die Frage nach der Berechtigung dieser Voraussetzungen leicht zu entscheiden. Doch zeigt es sich, daß auch ohne die Beschränkung auf die isoperimetrischen Probleme sich allgemein gültige Resultate gewinnen lassen; der Herleitung derselben sind die ersten drei Paragraphen der folgenden Arbeit gewidmet.

Die bekannten Untersuchungen A. Mayers gestatten es, was die erste dieser beiden Voraussetzungen betrifft, durch ganz einfache Überlegungen ans Ziel zu gelangen. Weniger einfach ist die Sache betreffs der zweiten Voraussetzung. Sie wurde seinerzeit, wie die Lagrangesche Multiplikatorenmethode, aus der Theorie der bedingten Maxima und Minima der Funktionen mehrerer Veränderlicher ohne weitere Prüfung in die Variationsrechnung übernommen, ohne daß meines Wissens bisher der Frage, ob und unter welchen Umständen dies berechtigt ist, näher getreten worden wäre. In engem Zusammenhange hiermit steht die Frage, unter welchen Voraussetzungen sich ein beliebig kleiner Extremalenbogen in zulässiger Weise variieren läßt, welche ich im zweiten Paragraphen zu beantworten suche. Ein letzter Paragraph bringt noch eine kurze Zusammenfassung und Anwendungen auf das isoperimetrische Problem. Die Jakobische Bedingung wird daselbst in möglichst allgemeiner Form ausgesprochen, sodaß speziell der von Kneser allein in Betracht gezogene Fall analytischer Funktionen vollkommen erledigt wird.

§ 1.

Vorbemerkungen. Stetigkeit der Multiplikatoren.

Das Lagrangesche Problem der Variationsrechnung verlangt, zwei gegebene Punkte einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit durch ein den Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \varphi_k(y_1, \cdots, y_n;\ y_1', \cdots, y_n') = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, m)$$

genügendes reguläres Kurvenstück*) von der Art zu verbinden, daß es dem zwischen den beiden gegebenen Punkten erstreckten Kurvenintegrale:

$$(2) \qquad J = \int_{y^0}^{y^1} f(y_1, \cdots, y_n;\ y_1', \cdots, y_n')\, dt$$

einen größeren oder kleineren Wert erteilt als jede benachbarte, stetige, dieselben Punkte verbindende und demselben Differentialgleichungssysteme

*) D. h. die Koordinaten $(y_1, \cdots, y_n)$ dieses Kurvenstückes sollen sich als stetige mit stetigen nirgends gleichzeitig verschwindenden ersten Ableitungen versehene Funktionen eines Parameters t darstellen lassen.

genügende Kurve, für welche das vorgelegte Integral überhaupt einen Sinn hat, oder, wie wir kurz sagen wollen, als jede benachbarte zulässige Kurve.

Um prüfen zu können, ob ein gegebenes reguläres Kurvenstück $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ unser Problem löst, müssen wir voraussetzen, daß sich eine Konstante δ so angeben läßt, daß für alle Werte $y_i + \Delta y_i$, $y_i' + \Delta y_i'$, in denen $|\Delta y_i|$ und $|\Delta y_i'|$ kleiner als δ sind, die Funktionen f und φ_k samt ihren drei ersten partiellen Ableitungen nach den y und y' endlich und stetig bleiben, und daß auf unserem Kurvenstücke nirgends sämtliche Determinanten aus der Matrix:

$$(3) \qquad \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'}\right| \qquad \begin{matrix}(i = 1, 2, \cdots, m)\\(k = 1, 2, \cdots, n)\end{matrix}$$

gleichzeitig verschwinden. Die Funktionen f und φ_i sind als homogen von der ersten Ordnung nach den y' vorausgesetzt.

Das Lagrangesche Problem ist als Spezialfall in einem allgemeineren von Mayer angegebenen Probleme enthalten, welches lautet: Es ist ausgehend von einem Punkte einer $(n+1)$ dimensionalen Mannigfaltigkeit ein den Differentialgleichungen:

$$(1^*) \qquad \varphi_k(y_0, y_1, \cdots, y_n;\ y_0', y_1', \cdots, y_n') = 0. \qquad (k = 0, 1, \cdots, m)$$

genügendes reguläres Kurvenstück so zu ziehen, daß für ein gegebenes Wertsystem der Koordinaten $y_1, \cdots, y_n$ die $(n+1)^{\text{te}}$ Koordinate y_0 einen größeren oder kleineren Wert erhält, als für jede andere benachbarte zulässige Kurve. Um das Lagrangesche Problem auf diese Form zu bringen, brauchen wir nur zu setzen:

$$(2^*) \qquad y_0 = \int_{t_0}^{t} f(y_1, \cdots, y_n;\ y_1', \cdots, y_n')\, dt$$

und den m Gleichungen (1) die folgende hinzuzufügen:

$$\varphi_0 = f(y_1, \cdots, y_n;\ y_1', \cdots, y_n') - y_0' = 0.$$

Wie ich an anderer Stelle gezeigt habe*), läßt sich jedes reguläre Kurvenstück, das das Mayersche Problem löst, und längs dessen nirgends alle Determinanten der Matrix:

$$(3^*) \qquad \left\|\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'}\right\| \qquad \begin{matrix}(i = 0, 1, \cdots, m)\\(k = 0, 1, \cdots, n)\end{matrix}$$

verschwinden, welche die erste Vertikalreihe $(k = 0)$ enthalten, durch

*) „Über die Lagrangesche Multiplikatorenmethode in der Variationsrechnung" Monatshefte für Math. u. Phys. Bd. XIV.

zweimal differenzierbare Funktionen eines Parameters t darstellen. Gibt es speziell in der Matrix (3*) eine Determinante von der Gestalt:

$$(3^{**})\qquad \frac{\partial(\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_m)}{\partial(y_0', y_{\alpha_1}', \cdots, y_{\alpha_m}')},$$

welche nirgends auf unserem Kurvenstücke verschwindet, so existieren stetige, einmal differenzierbare und nirgends gleichzeitig verschwindende Funktionen $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_m$ des Parameters t, welche zusammen mit den y den Differentialgleichungen genügen:

$$(4)\qquad \sum_{k=0}^{m}\left(\lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'}\right) = 0 \qquad (i = 0, 1, \cdots, n).$$

Wir wollen jede, den Gleichungen (1*) genügende Kurve, für die auch die Gleichungen (4) bestehen, nach Knesers Vorgange eine Extremale des betreffenden Problemes nennen.

Im Lagrangeschen Probleme reduziert sich die erste der Gleichungen (4) (für $i = 0$) auf:

$$\frac{d\lambda_0}{dt} = 0.$$

Mithin ist λ_0 eine Konstante, und zwar wegen der Stetigkeit der Funktionen λ überall dieselbe Konstante. Die übrigen Gleichungen (4) ergeben

$$(5)\qquad \lambda_0\left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) + \sum_{k=1}^{m}\left(\lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'}\right) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Ist nun die Konstante λ_0 nicht gleich Null, so kann man, da wegen der Homogeneität der Gleichungen (4) die λ nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt sind, immer $\lambda_0 = 1$ setzen, und man erhält so das bekannte Lagrangesche Differentialgleichungssystem:

$$(5^*)\qquad \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y_i'} + \sum_{k=1}^{m}\left(\lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Der Fall $\lambda_0 = 0$ kann nur dann eintreten, wenn überall auf unserer Extremale den Gleichungen:

$$(6)\qquad \sum_{k=1}^{m}\left(\lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

durch Größen λ genügt werden kann, die nicht sämtlich verschwinden. Das ist aber die Bedingung dafür, daß unsre Extremale auch Extremale sei für das durch die Gleichungen:

$$\varphi_k(y_1, \cdots, y_n;\ y_1', \cdots y_n') = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, m)$$

gegebene Mayersche Problem.

Wir wollen von jedem Intervalle, in dem den Gleichungen (6) durch Funktionen λ, die nicht sämtlich verschwinden, genügt werden kann, sagen, unsere Extremale zeige in demselben ein *anormales* Verhalten. Bezeichnen, wie im folgenden immer, t_0 und t_1 die dem Anfangs- und Endpunkte der Integration im Integrale (2) entsprechenden Werte des Parameters t, und verhält sich die Extremale nirgends in $(t_0 t_1)$ anormal, so wollen wir sagen, es liege der *Hauptfall* vor, während wir sonst von einem *anormalen Falle* sprechen. Diese Unterscheidung ist genau dieselbe, die G. v. Escherich, auf Grund gänzlich verschiedener Überlegungen, einführte. (l. c. Mitt. V, § 26.) Offenbar ist der Hauptfall der bei weitem allgemeinere, da das Auftreten des anormalen Falles daran geknüpft ist, daß m Größen λ einem Systeme von n linearen Differentialgleichungen genügen, von denen im allgemeinen nur eine eine Folge der übrigen ist, während $m < n - 1$ sein muß.

Wir können auf Grund dieser Definitionen den Satz aussprechen:

Jede Extremale des Lagrangeschen Problemes, die sich nicht in jedem Teilintervalle von $(t_0 t_1)$ anormal verhält, muß den Gleichungen (5) genügen.*

Dabei war aber vorausgesetzt, daß ein und dieselbe Determinante aus der Matrix (3):

$$\left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} \right\| \quad \begin{array}{l} (i = 1, 2, \cdots, m) \\ (k = 1, 2, \cdots, n) \end{array}$$

— in dieser Form erscheint ja beim Lagrangeschen Probleme die Bedingung (3**) — überall in $(t_0 t_1)$ von Null verschieden sei. Von dieser Voraussetzung wollen wir uns nun frei machen.

Zunächst ist ohne weiteres klar, daß in jedem genügend kleinen Intervalle von $(t_0 t_1)$ die Gleichungen (5), und falls sich in demselben die Extremale nicht anormal verhält, auch die Gleichungen (5*) erfüllt sein müssen, da ja nach Voraussetzung nirgends in $(t_0 t_1)$ sämtliche Determinanten der Matrix (3) verschwinden. Zu beweisen bleibt, daß die λ *in ganz* $(t_0 t_1)$ *stetig* sein müssen, und mithin das Funktionensystem $y_1, \cdots, y_n$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ überall in $(t_0 t_1)$ *dieselbe* Lösung der Gleichungen (5*) sein muß.

Dieser Beweis ist leicht zu führen, vermöge der Bemerkung, daß überall dort, wo unsre Extremale sich nicht anormal verhält, die Gleichungen (5) nur ein einziges (bis auf einen konstanten Faktor vollkommen bestimmtes) Lösungssystem λ haben. Denn in der Tat, nehmen wir an, es gäbe zwei linear unabhängige Lösungssysteme λ_k^1 $(k = 0, 1, \cdots, m)$ und λ_k^2 $(k = 0, 1, \cdots, m)$. Die beiden Konstanten $\lambda_0{}^1$ und $\lambda_0{}^2$ können wir, da keine von ihnen verschwindet, einander gleich annehmen. Die Größen $\lambda_k = \lambda_k^1 - \lambda_k^2$ $(k = 0, 1, \cdots, m)$, die nicht sämtlich identisch verschwinden, genügen ebenfalls den Gleichungen (5). Nun ist aber $\lambda_0 = 0$. Es könnte

also den Gleichungen (6) genügt werden durch Funktionen λ, die nicht sämtlich verschwinden, entgegen der Voraussetzung, daß an der betrachteten Stelle unsere Extremale sich nicht anormal verhält.

Auf Grund unsrer Voraussetzungen läßt sich nun das Intervall $(t_0 t_1)$ so in eine Anzahl von Teilintervallen teilen, daß in jedem dieser Teilintervalle eine bestimmte Determinante aus der Matrix (3) von Null verschieden bleibt, und diese Teilung läßt sich auch so vornehmen, daß je zwei benachbarte Teilintervalle ein Stück gemeinsam haben. Läßt sich nun ferner diese Teilung in der Art bewerkstelligen, daß sich unsre Extremale in keinem der zwei benachbarten Teilintervallen gemeinsamen Stücke überall anormal verhält, so ist unser Satz von der Stetigkeit der Funktionen bewiesen; denn er gilt für jedes einzelne Teilintervall. In den genannten gemeinsamen Teilintervallen müssen nun aber (wenigstens nach Multiplikation mit einer geeigneten Konstanten) die Funktionen λ der beiden, sich überdeckenden Intervalle übereinstimmen, d. h. die Funktionen λ können in ganz $(t_0 t_1)$ stetig angenommen werden. Es gilt also der Satz:

Läßt sich das Intervall $(t_0 t_1)$ in der eben angegebenen Art in Teilintervalle teilen, so müssen die y zusammen mit m stetigen Funktionen $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ außer den Gleichungen (1) *noch die Gleichungen befriedigen:*

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y_i'} + \sum_{k=1}^{m}\left(\lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Liegt der Hauptfall vor, so ist eine solche Teilung immer möglich.

§ 2.

Über die Existenz zulässiger Variationen.

Wir wollen in diesem Paragraphen hinreichende Bedingungen dafür aufstellen, daß ein beliebig kleiner Extremalenbogen in zulässiger Weise variiert werden kann; denn einfache Beispiele zeigen, daß dies nicht immer der Fall ist (vgl. § 4).

Wir betrachten ein Intervall (τ_0, τ_1), in dem etwa die Determinante

$$\frac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_m)}{\partial(y_1', \cdots, y_m')}$$

von Null verschieden sei. Um den Mayerschen Ansatz zu erhalten, fügen wir zu den Gleichungen (1) wieder die Gleichung hinzu:

$$\varphi_0 = f(y_1, \cdots, y_n;\, y_1', \cdots, y_n') - y_0' = 0,$$

wo y_0 die durch (2*) definierte Größe bedeutet. Mit $\Delta y_{m+1}, \cdots, \Delta y_n$ bezeichnen wir $(n-m)$ stetige, mit stetigen ersten Ableitungen versehene

Funktionen von t, die in τ_0 und τ_1 verschwinden mögen. Sind diese Funktionen ihrem Absolutwerte nach hinlänglich klein, so lassen sich weitere $(m+1)$ stetige, ebenfalls mit stetigen ersten Ableitungen versehene Funktionen $\Delta y_0, \Delta y_1, \cdots, \Delta y_m$ bestimmen*), die in τ_0 verschwinden, ihrem Absolutwerte nach unter einer vorgegebenen Konstanten bleiben und die Gleichungen befriedigen:

$$\varphi_k(y_0+\Delta y_0, \cdots, y_n+\Delta y_n;\ y_0'+\Delta y_0', \cdots, y_n'+\Delta y_n') = 0 \qquad (k=0,1,\cdots,m).$$

Nimmt man speziell $\Delta y_{m+1}, \cdots, \Delta y_n$ in der Form an:

$$\Delta y_i = \sum_{\lambda=0}^{m} \varepsilon_\lambda u_i^\lambda \qquad (i=m+1,\cdots,n),$$

wo nun jeder einzelnen Funktion u_i^λ die oben den $\Delta y_{m+1}, \cdots, \Delta y_n$ beigelegten Eigenschaften zukommen mögen und die ε_λ Konstante bedeuten, so erscheinen $\Delta y_0, \cdots, \Delta y_m$ in der Form*):

$$\Delta y_i = \sum_{\lambda=0}^{m} \varepsilon_\lambda v_i^\lambda + [\varepsilon]_2 \qquad (i=0,1,\cdots,m),$$

wo die v_i^λ stetige, differenzierbare, in τ_0 verschwindende Funktionen bedeuten, und unter $[\varepsilon]_2$ ein Ausdruck zu verstehen ist, in dem jedes Glied einen in den ε quadratischen Faktor enthält, eine Bedeutung, die dieses Symbol auch weiterhin behalten soll.

Setzt man noch:

$$\sum_{\lambda=0}^{m} \varepsilon_\lambda v_i^\lambda = \delta y_i \qquad (i=0,1,\cdots,m)$$

und der Gleichförmigkeit halber auch:

$$\Delta y_i = \sum_{\lambda=0}^{m} \varepsilon_\lambda u_i^\lambda = \delta y_i \qquad (i=m+1,\cdots,n),$$

so hat man:

$$\sum_{i=0}^{m} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}\,\delta y_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'}\,\delta y_i'\right) = 0 \qquad (k=0,1,\cdots,m). \tag{7}$$

Aus diesen Gleichungen läßt sich nun der Wert, den $\delta y_0, \cdots, \delta y_m$ an der Stelle τ_1 annehmen, in der folgenden Weise ausdrücken**):

---

*) Wegen näherer Ausführung vgl. Kneser, „Lehrbuch der Variationsrechnung" S. 229ff., wo diese Untersuchungen für analytische Funktionen durchgeführt sind. Unter den allgemeineren Voraussetzungen des Textes sind sie durchgeführt in meinem oben zitierten Aufsatze: „Über die Lagrangesche Multiplikatorenmethode". § 2.

**) Siehe Kneser, Lehrb. der Variationsrechn. S. 235—240.

$$(8)\qquad \delta y_i]_{\tau_1} = \sum_{r=0}^{m} \varepsilon_r \int_{\tau_0}^{\tau_1} dt \sum_{k=m+1}^{n} u_k^r \sum_{s=0}^{m}\left(\nu_s^i \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_k} - \frac{d}{dt}\nu_s^i \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_k'}\right) \qquad (i=0,1,\cdots,m),$$

wo ν_s^i $(i=0,1,\cdots,m)$ ein gewisses Fundamentallösungssystem des linearen Differentialgleichungssystemes:

$$(9)\qquad \sum_{s=0}^{m}\left(\nu_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_k} - \frac{d}{dt}\nu_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_k'}\right) = 0 \qquad (k=0,1,\cdots,m)$$

bedeutet. Setzt man noch:

$$(10)\qquad W_i(u^r) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} dt \sum_{k=m+1}^{n} u_k^r \sum_{s=0}^{m}\left(\nu_s^i \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_k} - \frac{d}{dt}\nu_s^i \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_k'}\right),$$

so wird:

$$(11)\qquad \delta y_i]_{\tau_1} = \sum_{r=0}^{m} \varepsilon_r W_i(u^r) \qquad (i=0,1,\cdots,m),$$

und für das Eintreten eines Extremums der Größe y_0 ist notwendig, daß die Determinante:

$$(12)\qquad |W_i(u^r)| \qquad (i,r=0,1,\cdots,m)$$

für alle zulässigen Funktionen u_k^r verschwinde*).

Wir wollen nun den Satz beweisen: Verhält sich unsre Extremale nicht überall in $(\tau_0\tau_1)$ anormal, so kann die Unterdeterminante von (12):

$$(12^*)\qquad |W_i(u^r)| \qquad (i,r=1,2,\cdots,m)$$

nicht für alle zulässigen Funktionen u_k^r verschwinden. Zu diesem Zwecke beweisen wir zunächst den Hülfssatz: Verhält sich unsre Extremale nicht überall in $(\tau_0\tau_1)$ anormal, so können in der Determinante $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung (12) nicht sämtliche Unterdeterminanten m^{ter} Ordnung für alle zulässigen Funktionen u_k^r verschwinden.

In der Tat, nehmen wir an, es verschwänden in (12) alle Unterdeterminanten m^{ter} Ordnung für alle zulässigen u_k^r. Wir setzen die Gleichungen an:

$$\sum_{i=0}^{m} C_i W_i(u^r) = 0 \qquad (r=0,1,\cdots,m).$$

Zwei Fälle sind zu unterscheiden; entweder verschwinden alle Ausdrücke $W_i(u^r)$ identisch, oder es lassen sich die u_k^r so wählen, daß mindestens einer dieser Ausdrücke nicht Null wird. Im letzteren Falle läßt sich

*) Siehe Kneser, Lehrb. der Variationsrechn. S. 240.

immer eine positive Zahl $\lambda < m$ so angeben, daß in der Determinante (12) alle Unterdeterminanten, deren Ordnung größer als λ ist, für sämtliche zulässigen Funktionen u_k^r verschwinden, während für die übrigen Unterdeterminanten dies nicht der Fall ist. Da die Funktionen u^r untereinander gänzlich gleichberechtigt sind, können wir immer annehmen, eine der aus $u^{m-\lambda+1}, \cdots, u^m$ gebildeten Unterdeterminanten sei von Null verschieden; nun können wir λ von den Konstanten C homogen-linear durch die gänzlich willkürlich bleibenden $m - \lambda + 1$ übrigen ausdrücken, und für alle so gefundenen Konstanten C muß die Gleichung bestehen:

$$\sum_{i=0}^{m} C_i W_i(u^0) = 0,$$

welche zulässige Funktionen wir auch für u^0 einführen. Es gibt also $m - \lambda + 1$ von einander unabhängige Systeme von Konstanten C_i, für die diese letztere Gleichung bestehen muß, also, da $\lambda < m$, mindestens zwei Systeme C_i und $\overline{C}_i$, sodaß nicht für alle Werte von i:

$$C_i = k\overline{C}_i \qquad (i = 0, 1, \cdots, m)$$

ist; für den ersten der oben unterschiedenen Fälle ist dies evident.

Setzen wir nun:

$$\lambda_s = \sum_{i=0}^{m} C_i v_s^i; \qquad \overline{\lambda}_s = \sum_{i=0}^{m} \overline{C}_i v_s^i \qquad (s = 0, 1, \cdots, m),$$

so ist:

$$\sum_{s=0}^{m} \left(\lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_i'}\right) = 0; \quad \sum_{s=0}^{m} \left(\overline{\lambda}_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \overline{\lambda}_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_i'}\right) = 0 \quad (i = 0, 1, \cdots, m).$$

Aus dem Umstande, daß für alle zulässigen u_k^0:

$$\sum_{i=0}^{m} C_i W_i(u^0) = \sum_{i=0}^{m} \overline{C}_i W_i(u^0) = 0$$

sein muß, folgert man nun leicht, daß auch noch die Gleichungen erfüllt sein müssen:

$$\sum_{s=0}^{m} \left(\lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_i'}\right) = 0; \quad \sum_{s=0}^{m} \left(\overline{\lambda}_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \overline{\lambda}_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_i'}\right) = 0 \quad (i = m+1, \cdots, n),$$

das heißt, es müßten die beiden linear unabhängigen Systeme λ_s und $\overline{\lambda}_s$ die $(m+1)$ Gleichungen (4) erfüllen, was, wie wir oben gesehen haben, unvereinbar ist mit der Annahme, daß unsre Extremale sich nicht überall in $(\tau_0 \tau_1)$ anormal verhält.

Von diesem Hülfssatze aus gelangen wir zu unsrem ursprünglichen Satze vermöge der Bemerkung, daß für jedes System der u_k^r, für das alle Determinanten m^{ter} Ordnung aus der Matrix:

$$(12^{**}) \qquad \| W_i(u^r) \| \qquad \begin{matrix}(r=0,1,\cdots,m)\\(i=1,2,\cdots,m)\end{matrix}$$

verschwinden, auch sämtliche Unterdeterminanten m^{ter} Ordnung in der Determinante (12) verschwinden müssen. Es ist ja:

$$\delta y_0]_{\tau_1} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial f}{\partial y_k'} \delta y_k' \right) dt$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y_k} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \right) \delta y_k + \left(\frac{\partial f}{\partial y_k'} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} \right) \delta y_k' \right] dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y_k'} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} \right) \delta y_k \Bigg]_{\tau_0}^{\tau_1}$$

$$+ \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y_k} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial y_k'} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} \right) \right] dt,$$

mithin, da in τ_0 alle δy_k, in τ_1 aber $\delta y_{m+1}, \cdots, \delta y_n$ verschwinden und wegen des Bestehens der Gleichungen (5*):

$$\delta y_0]_{\tau_1} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial y_k'} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} \right) \delta y_k \Bigg]_{\tau_1}.$$

Es muß also jedes System von Konstanten ε, das die Gleichungen:

$$\delta y_i]_{\tau_1} = \sum_{r=0}^{m} \varepsilon_r W_i(u^r) = 0 \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

löst, auch der Gleichung genügen:

$$\delta y_0]_{\tau_1} = \sum_{r=0}^{m} \varepsilon_r W_0(u^r) = 0;$$

Das ist aber nur so möglich, daß allemal, wenn sämtliche Determinanten m^{ter} Ordnung aus der Matrix (12**) verschwinden, dasselbe von allen Unterdeterminanten m^{ter} Ordnung von (12) gilt. Es gibt nun aber, wie unser Hülfssatz lehrt, immer Funktionen u_k^r, für die nicht alle diese Unterdeterminanten von (12) verschwinden, für die also auch mindestens

eine Determinante der Matrix (12**) von Null verschieden ist, und zwar können wir immer annehmen, es sei dies die Determinante (12*).

Setzen wir nun die Gleichungen an:

$$\Delta y_i]_{\tau_1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m),$$

und berücksichtigen wir die Relationen:

$$\Delta y_i]_{\tau_1} = \delta y_i]_{\tau_1} + [\varepsilon]_2 = \sum_{r=0}^{m} \varepsilon_r W_i(u^r) + [\varepsilon]_2 \quad (i = 1, 2, \cdots, m),$$

so ist:

$$\frac{\partial(\Delta y_1]_{\tau_1}, \Delta y_2]_{\tau_1}, \cdots, \Delta y_m]_{\tau_1})}{\partial(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m)} = |W_i(u^r)| \quad (i, r = 1, 2, \cdots, m)$$

und wir können die Funktionen u_k^r immer so annehmen, daß diese Funktionaldeterminante nicht Null ist. Dann lassen sich aber nach einem bekannten Satze $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$ so als Funktionen von ε_0 bestimmen, die zugleich mit ε_0 verschwinden, daß die Gleichungen:

$$\Delta y_i]_{\tau_1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

erfüllt sind. Das Funktionensystem $\Delta y_1, \cdots, \Delta y_n$ stellt aber dann ein System zulässiger Variationen des Bogens $(\tau_0 \tau_1)$ dar. Wir haben also den Satz:

Zwei beliebig nahe Punkte unsrer Extremale, zwischen denen sie sich nicht durchweg anormal verhält, können immer durch zulässige Kurven verbunden werden, die in beliebiger Nachbarschaft unsrer Extremale verbleiben, und gegen sie beliebig wenig geneigt sind. Im Hauptfalle gilt dieser Satz ohne Einschränkung für jeden Extremalenbogen.

Für den Beweis dieses Satzes war die Annahme, daß an der betrachteten Stelle unsre Extremale sich nicht anormal verhält, durchaus wesentlich.

§ 3.

Über die Ersetzbarkeit der Bedingungsgleichungen durch lineare.

Wir wenden uns nunmehr der Frage zu, ob und unter welchen Voraussetzungen es gestattet ist, bei Ableitung notwendiger Bedingungen aus der Betrachtung der zweiten Variation die Gleichungen:

$$(13) \quad \varphi_k(y_1 + \Delta y_1, \cdots, y_n + \Delta y_n;\ y_1' + \Delta y_1', \cdots, y_n' + \Delta y_n') = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, m)$$

denen die Variationen Δy zu genügen haben, durch die einfacheren Gleichungen:

$$(13^*) \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \Delta y_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} \Delta y_i' \right) = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, m)$$

zu ersetzen. Die Zulässigkeit dieser Vereinfachung wurde in älteren Unter-

suchungen in diesem Gebiete als evident betrachtet, und die weitere Argumentation war die folgende:

Wenn das Integral (2):

$$\int_{t_0}^{t_1} f(y_1, \cdots, y_n; y_1', \cdots, y_n')dt$$

zu einem Extremum werden soll gegenüber allen den Gleichungen (13) genügenden Kurven, so muß dasselbe gelten vom Integrale:

$$(14) \qquad \int_{t_0}^{t_1} \left\{ f(y_1, \cdots, y_n; y_1', \cdots, y_n') + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(y_1, \cdots, y_n; y_1', \cdots, y_n') \right\} dt.$$

Wegen des Bestehens der Gleichungen (5*) verschwindet die erste Variation dieses Integrales identisch; gelingt es also Variationen Δy herzustellen, welche den Gleichungen (13*) genügen und für die die zweite Variation dieses Integrales verschiedene Vorzeichen erhält, so ist ein Extremum ausgeschlossen.

Diese Schlußweise setzt aber stillschweigend voraus, daß immer, wenn es ein System von Variationen Δy gibt, das die Gleichungen (13*) befriedigt, und der zweiten Variation des Integrales (14) einen von Null verschiedenen Wert erteilt, sich auch ein System von Variationen $\bar{\Delta} y$ angeben läßt, das die Gleichungen (13) befriedigt und dem Zuwachse des vorgelegten Integrales (2) dasselbe Zeichen erteilt, wie das System der Δy. Ist das nun aber immer der Fall? Eine einfache Überlegung zeigt, daß dies ohne weiteres nicht behauptet werden kann. Es läßt sich ja bekanntlich immer ein genügend kleines Stück unsrer Extremale gemäß den Gleichungen (13*) so variieren, daß die zum entsprechenden System von Variationen gehörige zweite Variation von (14) nicht verschwindet*), während wir — wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben — nicht allgemein behaupten können, daß zwei beliebig nahe Punkte unsrer Extremale durch Kurven verbunden werden können, die den Gleichungen (13) genügen, und nicht ganz mit unsrer Extremale zusammenfallen; die Bedingung, die wir im vorigen Paragraphen für die Existenz solcher Kurven aufstellten, war zwar nur eine hinreichende, nicht eine notwendige; aber schon das einfachste isoperimetrische Problem zeigt, daß tatsächlich Fälle denkbar sind, in denen Extremalenbögen überhaupt nicht in zulässiger Weise variiert werden können. Für derartige Extremalenbögen aber ist die obige Schlußweise offenbar nicht zulässig, und sie könnte auf falsche Resultate führen. Wir legen uns daher die Frage vor:

---

*) G. v. Escherich, Die zweite Variation einfacher Integrale. Mitt. III, § 17; Mitt. V, § 16.

Es sei ein den Gleichungen (13*) genügendes System von Variationen Δy_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ gegeben, für das die zweite Variation $\delta^2 J$ des Integrales (14) einen von Null verschiedenen Wert hat. Unter welchen Bedingungen kann man behaupten, daß dann auch ein den Gleichungen (13) genügendes System von Variationen $\overline{\Delta} y_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ besteht*), für welches die Differenz:

$$\overline{\Delta} J = \int_{t_0}^{t_1} f(y_1 + \overline{\Delta} y_1, \cdots, y_n + \overline{\Delta} y_n;\ y_1' + \overline{\Delta} y_1', \cdots, y_n' + \overline{\Delta} y_n')\, dt$$
$$- \int_{t_1}^{t_1} f(y_1, \cdots, y_n;\ y_1', \cdots, y_n')\, dt$$

dasselbe Vorzeichen hat, wie $\delta^2 J$?

Sei also Δy_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ ein den Gleichungen (13*) genügendes System von Variationen, die nur in dem ganz in $(t_0 t_1)$ gelegenen Intervalle $(\tau_0 \tau_1)$ von Null verschieden seien. Wir nehmen zunächst an, daß etwa die Determinante:

$$\frac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_m)}{\partial(y_1', \cdots, y_m')}$$

in $(\tau_0 \tau_1)$ von Null verschieden sei, und daß sich unsre Extremale daselbst nicht überall anormal verhalte. Dann können wir ein System von Funktionen u_k^r $(r = 1, 2, \cdots, m;\ k = m + 1, \cdots, n)$ so annehmen, daß die Determinante (12*) nicht verschwindet. Ferner lassen sich in mannigfacher Weise Funktionen u_k^0 $(k = m + 1, \cdots, n)$ und Konstante ε_r $(r = 0, 1, \cdots, m)$ so finden, daß die Gleichungen bestehen:

$$\Delta y_k = \sum_{r=0}^{m} \varepsilon_r u_k^r \qquad (k = m + 1, \cdots, n).$$

Dann erscheinen nach Gleichung (11) die Größen $\Delta y_i]_{\tau_1}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ in der Form:

$$\Delta y_i]_{\tau_1} = \sum_{r=0}^{m} \varepsilon_r W_i(u^r) \qquad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

Da nun aber in τ_1 alle Δy verschwinden, so haben wir:

$$\sum_{r=0}^{m} \varepsilon_r W_i(u^r) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

---

*) Selbstverständlich müssen alle n Größen $\overline{\Delta} y$ in zwei Punkten des Integrationsintervalles gleichzeitig verschwinden, wie dies auch von den Δy gilt.

Lassen wir also ε_0 variieren, so ändern sich alle andern ε proportional dem ε_0 und dasselbe gilt daher von den Δy. Das Zeichen der zweiten Variation $\delta^2 J$ wird dadurch nicht alteriert, da sie sich proportional zu ε_0^2 ändert.

Um nun zu einem System von Variationen $\overline{\Delta} y$ zu gelangen, für das $\overline{\Delta} J$ das Zeichen von $\delta^2 J$ hat, setzen wir:

$$\overline{\Delta} y_k = \sum_{r=0}^{m} \bar{\varepsilon}_r u_k^r \qquad (k = m+1, \cdots, n),$$

wo die u_k^r dieselben Funktionen wie im Ausdrucke für die Δy bedeuten mögen, während unter den $\bar{\varepsilon}$ noch zu bestimmende Konstante zu verstehen sind. Dann wird, wie wir in § 2 gesehen haben:

$$\overline{\Delta} y_i]_{\tau_1} = \sum_{r=0}^{m} \bar{\varepsilon}_r W_i(u^r) + [\bar{\varepsilon}]_2 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m),$$

und hierin können wir, da nach Voraussetzung die Determinante (12*) nicht verschwindet, die $\bar{\varepsilon}_r$ so bestimmen, daß

$$\overline{\Delta} y_i]_{\tau_1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m),$$

wird; und zwar bleibt dabei $\bar{\varepsilon}_0$ willkürlich. Setzen wir also $\bar{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0$, so wird offenbar:

$$\bar{\varepsilon}_r = \varepsilon_r + [\varepsilon_0]_2 \qquad (r = 1, 2, \cdots, m)$$

und es gilt somit die Gleichung:

$$(15) \qquad \overline{\Delta} J = \frac{\varepsilon_0^{\,2}}{2} \delta^2 J + [\varepsilon_0]_3 .$$

Da nach Voraussetzung $\delta^2 J$ nicht verschwindet, so können wir immer ε_0 so klein wählen, daß $\overline{\Delta} J$ das Zeichen von $\delta^2 J$ hat. Das System der so gewonnenen $\overline{\Delta} y$ leistet also in der Tat alles, was wir verlangt hatten.

Wir müssen uns nun noch von der Voraussetzung frei machen, daß eine und dieselbe Determinante aus der Matrix (3) nirgends in $(\tau_0 \tau_1)$ verschwindet. Wir schalten zunächst zwischen τ_0 und τ_1 einen Punkt τ ein, sodaß in $(\tau \tau_1)$ eine der genannten Determinanten, etwa:

$$\frac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_m)}{\partial(y_1', \cdots, y_m')}$$

nicht verschwindet, und setzen weiter voraus, daß in $(\tau \tau_1)$ unsre Extremale sich nicht überall anormal verhalte. Ein gegebenes, den Gleichungen (13*) genügendes System von Variationen, die sämtlich sowohl in τ_0 als in τ_1 verschwinden, werde wie oben mit Δy bezeichnet. Wir können sie in $(\tau \tau_1)$ wieder in der Form annehmen:

$$\Delta y_k = \sum_{r=0}^{m} \varepsilon_r u_k^r \qquad (k = m+1, \cdots, n),$$

worin die u_k^r $(r = 1, 2, \cdots, m)$ so angenommen werden können, daß sie in τ sämtlich verschwinden, und daß für dieselben die Determinante (12*) von Null verschieden ausfällt. Da nun aber die Δy in τ nicht alle verschwinden, so können auch nicht alle u_k^0 in τ verschwinden, und dieser Umstand bedingt eine leichte Modifikation unsrer Formeln, die wir zunächst vornehmen wollen*).

Der Symmetrie halber fügen wir zu den Gleichungen (13*) noch die folgende hinzu:

$$\Delta y_0' - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y_k} \Delta y_k + \frac{\partial f}{\partial y_k'} \Delta y_k' \right) = 0$$

und schreiben das so entstandene System in der gemeinsamen Form:

$$\text{(13**)} \qquad \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \Delta y_k + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} \Delta y_k' \right) = 0 \qquad (i = 0, 1, \cdots, m).$$

Sei dann μ_i^λ $(i = 0, 1, \cdots, m)$ ein Fundamentallösungssystem des linear-homogenen in $(\tau\tau_1)$ regulären Differentialgleichungssystemes:

$$\text{(16)} \qquad \sum_{i=0}^{m} \left(\mu_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} - \frac{d}{dt} \mu_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} \right) = 0 \qquad (k = 0, 1, \cdots, m).$$

Aus (13**) folgt:

$$\sum_{k=m+1}^{n} \Delta y_k \sum_{i=0}^{m} \left(\mu_i^\lambda \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} - \frac{d}{dt} \mu_i^\lambda \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} \right) + \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{n} \Delta y_k \sum_{i=0}^{m} \mu_i^\lambda \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} = 0$$
$$(\lambda = 0, 1, \cdots, m)$$

und hieraus durch Integration von τ bis τ_1, wenn man berücksichtigt, daß $\Delta y_{m+1}, \cdots, \Delta y_n$ in τ_1 verschwinden:

$$-\sum_{k=0}^{m} \Delta y_k \sum_{i=0}^{m} \mu_i^\lambda \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} \Big]_{\tau_1} = \int_{\tau}^{\tau_1} dt \sum_{k=m+1}^{n} \Delta y_k \sum_{i=0}^{m} \left(\mu_i^\lambda \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} - \frac{d}{dt} \mu_i^\lambda \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} \right)$$
$$- \sum_{k=0}^{n} \Delta y_k \sum_{i=0}^{m} \mu_i^\lambda \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} \Big]_{\tau} \qquad (\lambda = 0, 1, \cdots, m).$$

---

*) Da in der Variationsrechnung auch vielfach sogenannte gebrochene Variationen verwendet werden, so füge ich bei, daß alle unsre Betrachtungen auch ohne weiteres auf den Fall anwendbar sind, daß die $\Delta y'$ nur abteilungsweise stetig sind.

Durch Auflösung dieser Gleichungen nach $\Delta y_0]_{\tau_1}, \cdots, \Delta y_m]_{\tau_1}$ folgt:

$$\Delta y_k]_{\tau_1} = \int\limits_{\tau}^{\tau_1} dt \sum_{r=m+1}^{n} \Delta y_r \sum_{i=0}^{m} \left(v_i^k \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_r} - \frac{d}{dt} v_i^k \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_r'} \right) + \sum_{r=0}^{n} C_r^k \Delta y_r]_\tau$$

$$(k = 0, 1, \cdots, m).$$

Hierin ist v_i^k $(k = 0, 1, \cdots, m)$ wieder ein Fundmentallösungssystem der Gleichungen (16) und die C_r^k bedeuten gewisse Konstante. Nun war:

$$\Delta y_r = \sum_{\lambda=0}^{m} \varepsilon_\lambda u_r^\lambda \qquad (r = m+1, \cdots, n)$$

und speziell für $t = \tau$:

$$\Delta y_r]_\tau = \varepsilon_0 u_r^0]_\tau^* \qquad (r = m+1, \cdots, n).$$

Wir erhalten also anstatt der Formel (11) die folgende:

$$(11^*) \qquad \Delta y_k]_{\tau_1} = \sum_{\lambda=0}^{m} \varepsilon_\lambda W_k(u^\lambda) + \varepsilon_0 \sum_{r=0}^{n} C_r^k u_r^0]_\tau \quad (k = 0, 1, \cdots, m).$$

Unter diesen Gleichungen lassen wir die erste $(k = 0)$ wieder weg. In den übrigen verschwinden nach Voraussetzung die linken Seiten; da nun die Determinante:

$$| W_k(u^\lambda) |_{(k, \lambda = 1, 2, \cdots, m)}$$

nicht verschwindet, so ergeben sich aus diesen Gleichungen $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ als proportional zu ε_0.

Zur Ermittelung eines Systemes $\overline{\Delta} y$ gehen wir nun hier folgendermaßen vor: Überall in $(\tau_0 \tau)$ nehmen wir die $\overline{\Delta} y$ in der Form an*):

$$\overline{\Delta} y_i = \Delta y_i + [\varepsilon_0]_2 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n);$$

in $(\tau \tau_1)$ setzen wir:

$$\overline{\Delta} y_i = \varepsilon_0 u_i^0 + \sum_{\lambda=1}^{m} \bar{\varepsilon}_\lambda u_i^\lambda + [\varepsilon_0]_2 \quad (i = m+1, \cdots, n)$$

und zwar möge in dieser letzteren Formel $[\varepsilon_0]_2$ eine Funktion von ε_0 und t bedeuten, der die nachstehenden Eigenschaften zukommen: sie muß überall in $(\tau \tau_1)$ durch ε_0^2 dividiert für $\varepsilon_0 = 0$ endlich bleiben; für $t = \tau_1$ muß sie als Funktion von ε_0 betrachtet identisch verschwinden, und endlich möge sie so gewählt sein, daß sich im Punkte τ die Werte von $\Delta y_{m+1}, \cdots, \Delta y_n$ stetig an die für das Intervall $(\tau_0 \tau)$ angenommenen Werte anschließen.

*) Man sieht leicht ein, daß unter unseren Voraussetzungen diese Forderung immer erfüllbar ist. Vgl. meine Abhandlung „Über die Lagrangesche Multiplikatorenmethode" § 2. (Monatsh. Bd. 14).

Dann ergibt sich in Anlehnung an (11*):

$$\overline{\Delta} y_i]_{\tau_1} = \varepsilon_0 W_i(u^0) + \sum_{\lambda=1}^{m} \bar{\varepsilon}_\lambda W_i(u^\lambda) + \varepsilon_0 \sum_{r=0}^{n} C_r^k u_r^0]_\tau + [\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}]_2$$

$$(i = 1, 2, \cdots, m).$$

Die in ε_0 und den $\bar{\varepsilon}$ linearen Glieder stimmen vollkommen mit den linearen Gliedern von (11*) überein; die Gleichungen:

$$\overline{\Delta} y_i]_{\tau_1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

sind also erfüllbar und liefern:

$$\bar{\varepsilon}_\lambda = \varepsilon_\lambda + [\varepsilon_0]_2 \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, m),$$

worin ε_0 gänzlich willkürlich ist.

Es gilt also auch hier die Entwicklung:

$$\overline{\Delta} J = \frac{\varepsilon_0^2}{2} \delta^2 J + [\varepsilon_0]_3$$

und es ist uns auch hier gelungen, ein alle unsre Forderungen erfüllendes System von Variationen $\overline{\Delta} y$ herzustellen. Wesentlich für unsre Betrachtungen war das Nichtverschwinden der Determinante (12*), und mithin die Voraussetzung eines nicht durchwegs anormalen Verhaltens der Extremale. Wir können jetzt den Satz aussprechen:

Zu jedem beliebigen System von Variationen Δy_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ des Extremalenbogens $(\tau_0 \tau_1)$, das den Gleichungen (13*) *genügt und die zweite Variation $\delta^2 J$ des Integrales* (14) *nicht zum Verschwinden bringt, läßt sich ein System von Variationen $\overline{\Delta} y_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ desselben Bogens angeben, das den Gleichungen* (13) *genügt und der Differenz:*

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} f(y_1 + \overline{\Delta} y_1, \cdots, y_n + \overline{\Delta} y_n;\ y_1' + \overline{\Delta} y_1', \cdots, y_n' + \overline{\Delta} y_n')\, dt$$

$$- \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(y_1, \cdots, y_n;\ y_1', \cdots, y_n')\, dt$$

das Zeichen von $\delta^2 J$ erteilt, vorausgesetzt, daß sich unsre Extremale in einem der beiden Punkte τ_0 und τ_1 nicht anormal verhält. Im Hauptfalle gilt dieser Satz somit immer.

§ 4.

Abschließende Bemerkungen. Das einfachste isoperimetrische Problem.

Die Entwicklungen der vorigen Paragraphen zeigen, daß die Annahmen, die v. Escherich seinen Untersuchungen zu Grunde legte, nämlich daß 1) die Koordinaten der betrachteten Kurve zusammen mit den m Multiplikatoren λ ein stetiges Lösungssystem des Lagrangeschen Differentialgleichungssystemes bilden*) und 2) die Gleichungen (13*) den Gleichungen (13) äquivalent seien**), im Hauptfalle immer erfüllt sind, sodaß, wenn der Hauptfall vorliegt, die Gültigkeit der in den zitierten Abhandlungen gefundenen Resultate eine ganz allgemeine ist. Will man auch die anormalen Fälle umfassen, ohne die beiden genannten Voraussetzungen explicite zu machen, so gelten die notwendigen Bedingungen jedenfalls in der folgenden Form:

Damit ein dem Lagrangeschen Differentialgleichungssysteme genügender Extremalenbogen ein Extremum des Integrales (2) liefere, ist notwendig, daß überall dort, wo er sich nicht anormal verhält***), die quadratische Form:

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'} \eta_i \eta_k, \tag{17}$$

worin:

$$F = f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i$$

ist, nur für $\eta_k = \varrho y_k'$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ verschwinde, wo unter ϱ eine willkürliche, aber stetige Funktion von t zu verstehen ist, für alle übrigen, den Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} \eta_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

genügenden η aber einerlei Zeichen habe (v. Escherich, Mitt. V, § 17).

Ist diese Bedingung erfüllt, so läßt sich zu jedem Punkte der Extremale, in dem sie sich nicht anormal verhält, ein konjugierter Punkt definieren (Mitt. V, § 20). Verhält sich die Extremale auch in diesem zweiten Punkte nicht anormal, so kann ein diese beiden Punkte ent-

---

*) Mitt. I, § 2.

**) Mitt. V, § 15.

***) Diese Einschränkung ist nötig, um die Äquivalenz der Gleichungen (13) und (13*) behaupten zu können.

haltender Extremalenbogen (vorausgesetzt, daß mindestens einer der beiden Punkte im Innern des Bogens liegt) ein Extremum nicht mehr liefern. (Jakobis Kriterium.) Denn dann lassen sich mit Hülfe von Variationen, die den Gleichungen (13*) genügen, verschieden bezeichnete zweite Variationen des Integrales (14) herstellen (Mitt. V, § 25), woraus, wie wir in § 3 gesehen haben, gefolgert werden kann, daß das gewünschte Extremum des Integrales (2) nicht stattfindet*).

Zur Erläuterung dieser allgemeinen Sätze wollen wir das einfachste isoperimetrische Problem etwas näher betrachten. Es sei also das Integral:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y;\, x', y')\, dt$$

zu einem Minimum zu machen, während gleichzeitig das Integral:

$$K = \int_{t_0}^{t_1} G(x, y;\, x', y')\, dt$$

einen vorgeschriebenen Wert erhalten soll. Die Gleichungen (5) reduzieren sich hier auf:

$$\lambda_0 \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'}\right) + \lambda_1 \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial x'}\right) = 0,$$

$$\lambda_0 \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \lambda_1 \left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial y'}\right) = 0,$$

worin λ_0 und λ_1 Konstante bedeuten. Die Stellen, wo unsre Extremale anormales Verhalten zeigt, sind somit diejenigen, in denen sie gleichzeitig Extremale des Integrales K im Sinne des absoluten Extremums ist. Verhält sich unsre Extremale nicht überall in $(t_0 t_1)$ anormal, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} + \lambda \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial x'}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y'} + \lambda \left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial y'}\right) = 0.$$

Das Jakobische Kriterium lautet demnach für das einfachste isoperimetrische Problem: Zu jedem Punkte, in dem unsre Extremale nicht gleichzeitig Extremale des Integrales K im Sinne des absoluten Extremums ist, läßt sich ein konjugierter Punkt definieren. Ist unsre Extremale in der Umgebung dieses konjugierten Punktes nicht auch Extremale von K im Sinne

*) Es ist bemerkenswert, daß sich hiernach für das Jakobische Kriterium durch das Fallenlassen der angeführten Voraussetzungen, eine Einschränkung gegenüber der Form, in der es v. Escherich l. c. ausspricht, nicht ergibt.

des absoluten Extremums, so kann ein Bogen unsrer Extremale, der die beiden genannten Punkte enthält (und zwar mindestens einen der beiden im Innern), ein Extremum nicht mehr liefern.

Liegt speziell der Hauptfall vor, so gibt es zu jedem Punkte einen konjugierten, und ein beliebiger Extremalenbogen, der zwei zu einander konjugierte Punkte enthält (und zwar einen der beiden im Innern), liefert kein Extremum mehr.

Sind die Funktionen $F(x, y; x', y')$ und $G(x, y; x', y')$ analytisch, wie dies Kneser in seinen Abhandlungen wie in seinem Lehrbuche voraussetzt, so liegt nur dann nicht der Hauptfall vor, wenn unsre Extremale überall mit der Extremale von K zusammenfällt; diesen Fall schließt Kneser von seiner Fragestellung ausdrücklich aus. Für den Fall analytischer Funktionen ist also die auch von Kneser nicht vollständig erledigte Frage nach der Gültigkeit von Jakobis Kriterium ausnahmslos in bejahendem Sinne erledigt.

Ich will nun noch mit einigen Worten auf die anormalen Fälle zu sprechen kommen, und dabei der Einfachheit halber das Integral K in der Form annehmen:

$$K = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

Ist der für K vorgeschriebene Wert gleich dem Abstande der beiden Punkte $(x_0 y_0)$ und $(x_1 y_1)$, so müßte unsre Extremale überall in $(t_0 t_1)$ mit der Extremale von K (nämlich der geraden Verbindungslinie von $(x_0 y_0)$ und $(x_1 y_1)$) zusammenfallen, sie verhielte sich also überall in $(t_0 t_1)$ anormal. Da diese Kurve überhaupt nicht in zulässiger Weise variiert werden kann, so ist unser isoperimetrisches Problem sinnlos.

Ein Beispiel für einen Fall, in dem eine Extremale sich nur teilweise anormal verhält, erhalten wir in folgender Weise. Es sei das Integral:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\varphi(x) + y'^2 \psi(x)}\, dx$$

zu einem Minimum zu machen, sodaß das Integral:

$$K = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

einen vorgegebenen Wert erhält. Sei x_2 ein Punkt von $(x_0 x_1)$ und sei in $(x_2 x_1)$:

$$\varphi(x) = \psi(x) = 1.$$

Ist der vorgeschriebene Wert von K größer als die Länge der Verbindungslinie von $(x_0 y_0)$ und $(x_1 y_1)$, so kann die gesuchte Kurve sich

nicht durchwegs anormal verhalten, und muß somit den Gleichungen genügen:

$$\frac{y'\psi(x)}{\sqrt{\varphi(x)+y'^2\psi(x)}}+\lambda\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\text{const.}$$

In (x_2x_1) wird unsre Extremale daher eine Gerade und verhält sich somit daselbst anormal, während sie, wie erwähnt, sich nicht überall in (x_0x_1) anormal verhalten kann. In (x_2x_1) ist unsre Extremale überhaupt nicht in zulässiger Weise variierbar.

Es ist somit an einem einfachen Beispiele gezeigt, daß bereits beim einfachsten isoperimetrischen Probleme Fälle möglich sind, wo Extremalenbögen nicht in zulässiger Weise variiert werden können, während das betreffende Problem sehr wohl einen Sinn hat, und es ist klar, daß die die quadratische Form (17) betreffende notwendige Bedingung auf solche Extremalenbögen nicht ohne weiteres anwendbar ist*). Die Einschränkung, die wir uns bei Statuierung dieser notwendigen Bedingung zu Beginn dieses Paragraphen auferlegen mußten, scheint daher eine in der Natur der Sache begründete zu sein.

Alle Entwicklungen dieses Aufsatzes wurden der Einfachheit halber unter der in unsrer Voraussetzung über die Matrix (3) enthaltenen Annahme gemacht, daß unter den Bedingungsgleichungen keine endlichen Gleichungen vorkommen. Es hat aber keine Schwierigkeiten, diese Annahme fallen zu lassen. Unter Heranziehung der Resultate meiner oben zitierten Abhandlung: „Zur Theorie der zweiten Variation einfacher Integrale" ließen sich genau, wie wir hier das einfachste isoperimetrische Problem behandelt haben, die von Scheeffer in Math. Ann. Bd. 25 als „isoperimetrische Probleme auf Flächen" bezeichneten Aufgaben behandeln. Es zeigt sich, daß, wie schon v. Escherich bemerkte, die Scheefferschen Resultate gewisser Einschränkungen bedürfen.

Wien, im Februar 1903.

*) Es sei hier darauf hingewiesen, daß für solche Extremalenbögen auch der Schluß, daß die E-Funktion notwendig einerlei Zeichen haben muß, hinfällig wird — wenigstens in der Form, wie ihn Frl. v. Gernet in ihrer Dissertation: „Untersuchung zur Variationsrechnung" Göttingen 1902 macht (S. 69).

Über das Prinzip der Aktion und über die Klasse mechanischer Prinzipien, der es angehört.

Von

Dr. Moritz Réthy aus Budapest*).

Ich habe der ung. wissensch. Akademie in den Jahren 1895—96 drei Arbeiten vorgelegt, die ich auch in den Berichten aus Ungarn und in den Math. Annalen publizierte; ich habe in diesen Arbeiten die Gültigkeit des Prinzips der Aktion und seine volle Äquivalenz mit dem Hamiltonschen im Bereich der ganzen Mechanik bewiesen. Herr Hölder publizierte im Jahre 1896 in den Göttinger gelehrten Anzeigen eine Arbeit über das Prinzip der Aktion, jedoch in anderer Fassung. Es scheint aber, daß bei dieser Formulierung das gegenseitige Verhältnis der genannten Prinzipien, und auch die eindeutige Umkehrbarkeit des von Hölder bewiesenen Satzes nicht deutlich genug hervortritt. Diese Fragen werden in § 1, I dieser Arbeit behandelt.

Seitdem ist außer den Arbeiten des Herrn Königsberger, die das Prinzip auf Kräfte höherer Ordnung ausdehnen, meines Wissens nur eine Arbeit über diesen Gegenstand erschienen: die ebenfalls in den Göttinger gelehrten Anzeigen im Jahre 1900 publizierte Note des Herrn A. Voss, die meinem Interesse aus zwei Ursachen begegnete. Die eine Ursache ist rein persönlicher Natur: Herr Voss scheint nämlich von meinen Arbeiten keine Kenntnis genommen zu haben. Die zweite Ursache ist objektiver Natur: die Wendung nämlich, die bei seiner Fassung der Grenzbedingung der Variation in Erscheinung tritt, ist neu; hingegen ist die Umkehrbarkeit des von ihm ausgesprochenen Satzes noch zu besprechen. Diese Note gab den Impuls zur vorliegenden Untersuchung, die auch auf Kräfte

---

*) Diese Arbeit ist die Zusammenfassung einer Abhandlung und einer kurzen Note, die ich der math. naturwiss. Klasse der ungarischen Akademie der Wissenschaften am 21. April 1902, resp. am 16. Februar 1903 vorgelegt habe. Erschienen in „Math. és Term. Értesitö“ 1902, 1903.

höherer Ordnung ausgedehnt wird. Das hauptsächlichste Resultat läßt sich für den Fall von Kräften in gewöhnlichem Sinn, in rein analytischer Fassung, wie folgt aussprechen:

1. Es mögen f, f_1, a_{ki} Funktionen der $q_i, \frac{dq_i}{dt}, t, (k=1,\cdots,\nu)$, $(i=1,\cdots,n)$, und $\delta' x$ die Operation $\delta x - \frac{dx}{dt}\delta t$ bezeichnen; und es sei Q_i eine beliebige Größe; t_0 und t_1 zwei fest gegebene Zeitpunkte.

Die Forderung, daß die simultanen Variationsgleichungen Bestand haben,

$$\text{(a)} \qquad \delta\int_{t_0}^{t_1} f_1\,dt = 0;$$

$$\text{(b)} \qquad \int_{t_0}^{t_1}\left[\delta'(f-f_1) + \sum_1^n{}^i Q_i\,\delta' q_i\right]dt = 0,$$

$$\text{(c)} \qquad \left[f_1\,\delta t + \sum_1^n{}^i \frac{\partial f}{\partial q_i'}\,\delta' q_i\right]_{t_0}^{t_1} = 0,$$

$$\text{(d)} \qquad \sum_1^n{}^i a_{ki}\,\delta' q_i = 0, \qquad (k=1,\cdots,\nu)$$

ist äquivalent damit, daß das System der q_i das System gewöhnlicher Differentialgleichungen befriedigt

$$\text{(e)} \qquad Q_i + \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_i'} + \sum_1^\nu{}^k \lambda_k a_{ki} = 0, \qquad (i=1,\cdots,n).$$

2. Werden sämtliche Forderungen aufrecht erhalten, die Variationsbedingungen (b) und (c) ausgenommen, an deren Stelle die Forderung tritt, daß

$$\text{(b')} \qquad \delta'(f-f_1) + \sum_1^n{}^i Q_i\,\delta q_i = \frac{d}{dt}\sum_1^n{}^i a_i\,\delta' q_i,$$

$$\text{(c')} \qquad \left[f_1\,\delta t + \sum_1^n{}^i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i'} - a_i\right)\delta' q_i\right]_{t_0}^{t_1} = 0$$

sei, wo die a_i beliebige analytische Funktionen von t bedeuten, sollen ferner die Grenzzeiten t_0 und t_1 beliebig verschiebbar sein: so geschieht sämtlichen Forderungen nur durch das simultane Gleichungssystem (e) Genüge; es wäre denn, daß

$$\sum\left(\frac{\partial(f-f_1)}{\partial q_i'} - a_i\right)\delta' q_i$$

entweder an und für sich oder infolge des Gleichungssystems (d) verschwindet, in welchem Fall es außer dem System (e) auch noch andere Lösungen geben kann.

In § 1 wird nach einem Rückblick auf die erste Fassung des Prinzips bei Lagrange, ein abgekürzter Beweis des Satzes des Herrn Voss gegeben und dieser Satz besprochen. In § 2 wird nach Ableitung der vorangestellten Sätze eine Klasse von mechanischen Prinzipien entwickelt, welche das Prinzip der Aktion enthält. § 3 ist der Jacobischen Transformation des Prinzips der Aktion gewidmet. In § 4 ist die Verallgemeinerung auf kinetische Potentiale höherer Ordnung angedeutet.

§ 1.

Die Variation von $\int T dt$.

I. Es sei die lebendige Kraft T des Systems eine homogene quadratische Funktion der Geschwindigkeiten q_i', deren Koeffizienten Funktionen bloß der q_i sind; und es bedeute δ eine Variation für $\delta t \gtrless 0$, während mit δ_t eine Variation bei der Festsetzung $\delta t = 0$ bezeichnet sei. Man hat dann

$$\delta(2T dt) \equiv (\delta T + \delta_t T)\, dt. \tag{1}$$

Es bestehen nämlich

$$\delta(T dt) \equiv \delta T dt + T \delta dt, \tag{2}$$

$$\delta(T dt) \equiv \delta_t T dt - T \delta dt. \tag{3}$$

Die Identität (2) ist unmittelbar evident; die Identität (3) ist eine Folge davon, daß T eine quadratische homogene Funktion der q_i' ist, also

$$T dt = \sum a_{ij} q_i' q_j' dt = \frac{\Sigma a_{ij}\, dq_i\, dq_j}{dt},$$

wo die a_{ij} von den q_i nicht aber von t abhängen. Durch Addition von (2) und (3) folgt (1).

Man schreibe die Identität (1) in der Form

$$\delta(2T dt) - \left(\delta T - \sum_1^n {}^i\, Q_i \delta q_i\right) dt \equiv \left(\delta_t T + \sum_1^n {}^i\, Q_i \delta q_i\right) dt, \tag{4}$$

und mittels Integration von t_0 bis t_1 in der Form

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} 2T dt - \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T - \sum_1^n {}^i\, Q_i \delta q_i\right) dt \equiv \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta_t T + \sum_1^n {}^i\, Q_i \delta q_i\right) dt. \tag{5}$$

Bedeuten die Q_i die auf die Koordinaten q_i wirkenden Kräfte, so ist die rechte Seite dieser Gleichung das von Hamilton im Jahre 1835 entdeckte Integral, welches die Bewegungsgleichungen des materiellen Systems liefert, sobald man fordert, daß es für alle kontinuierlichen virtuellen Verschiebungen δq_i verschwinde, deren Werte zur Zeit t_0 und zur Zeit t_1 verschwinden.

Das erste Integral zur Linken in der Identität (5) ist die erste Variation der Aktion des materiellen Systems. Fordert man, wie Lagrange in „Miscellanea Taurinensia" 1760—1761, daß diese Variation verschwinde für alle soeben festgesetzten δq_i, vorausgesetzt nur, daß man aus ihr vorerst δt mittels der Gleichung

$$\text{(U)} \qquad \delta T = \sum_1^n {}^i\, Q_i \delta q_i$$

eliminiert, — was man doch am einfachsten mit Anwendung der Identität (4) erreicht, — so ist diese Forderung, wie aus (5) ersichtlich, identisch mit der Hamiltonschen Forderung*), Die beiden Aussprüche unterscheiden sich eben nur formal.

II. Es sei Φ eine Funktion der q_i, q_i', t, und δ' das Operationszeichen für $\delta \cdot - \frac{d}{dt} \cdot \delta t$, sodaß z. B.

$$\text{(6)} \qquad \delta' q \equiv \delta q - \frac{dq}{dt}\, \delta t.$$

Aus dieser Identität folgt

$$\frac{d\delta' q}{dt} \equiv \frac{d\delta q}{dt} - \frac{dq'}{dt}\, \delta t - \frac{dq}{dt}\, \frac{d\delta t}{dt},$$

d. i.

$$\text{(7)} \qquad \frac{d\delta' q}{dt} \equiv \delta q' - \frac{dq'}{dt}\, \delta t \equiv \delta' q'.$$

Man hat ferner

$$\delta\Phi\, dt \equiv \left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\, \delta t + \sum_1^n {}^i \left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_i}\, \delta q + \frac{\partial\Phi}{\partial q_i'}\, \delta q_i'\right)\right] \delta t,$$

$$d\Phi\, \delta t \equiv \left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\, dt + \sum_1^n {}^i \left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_i}\, \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial q_i'}\, \frac{dq_i'}{dt}\right) dt\right] \delta t;$$

daher hat man aus diesen Formeln mittels Subtraktion und bei Heranziehung von (7),

---

*) Vergl. A. Mayer, Geschichte der kleinsten Aktion, 1877, pag. 29. Réthy, Princip der kleinsten Action. Berichte aus Ungarn, 1895, Bd. XIII, pagg. 1 u. 2 Fußnote.

$$(8) \qquad \delta\Phi\, dt - d\Phi\, \delta t \equiv \sum_1^n{}^i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}\delta' q_i + \frac{\partial \Phi}{\partial q_i'}\delta' q_i'\right) dt$$

d. i.

$$(9) \qquad \delta\Phi\, dt - d\Phi\, \delta t \equiv \sum_1^n{}^i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}\delta' q_i + \frac{\partial \Phi}{\partial q_i'}\frac{d}{dt}\delta' q_i\right) dt.$$

Ich schreibe diese Identität (9) noch in folgenden vier Formen:

$$(10) \qquad \delta\Phi - \frac{d\Phi}{dt}\delta t \equiv \sum_1^n{}^i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}\delta' q_i + \frac{\partial \Phi}{\partial q_i'}\frac{d}{dt}\delta' q_i\right),$$

$$(10^*) \qquad \delta'\Phi \equiv \sum_1^n{}^i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}\delta' q_i + \frac{\partial \Phi}{\partial q_i'}\frac{d}{dt}\delta' q_i\right),$$

$$(11) \qquad \delta(\Phi\, dt) - d(\Phi\, \delta t) \equiv \sum_1^n{}^i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}\delta' q_i + \frac{\partial \Phi}{\partial q_i'}\frac{d}{dt}\delta' q_i\right) dt,$$

$$(11^*) \qquad \delta(\Phi\, dt) - d\left(\Phi\,\delta t + \sum_1^n{}^i \frac{\partial \Phi}{\partial q_i'}\delta' q_i\right) \equiv \sum_1^n{}^i \left(\frac{d\Phi}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial q_i'}\right)\delta' q_i\, dt.$$

III. Indem man die nur formal verschiedenen Identitäten (11) und (11*) addiert, und an Stelle von Φ die lebendige Kraft T des materiellen Systems setzt, erhält man die Identität:

$$(12) \quad \delta(2T\,dt) - d\left(2T\,\delta t + \sum_1^n{}^i \frac{\partial T}{\partial q_i'}\delta' q_i\right) \equiv \left(\delta' T + \sum_1^n{}^i \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)\delta' q_i\right) dt,$$

wo zur Rechten $\delta' T$ eine abgekürzte Bezeichnung ist im Sinne von (10*).

Aus dieser Identität (12) folgt nun aber der **Voss'sche** Satz:

Betrachtet man die Gleichungen

$$(\mathrm{V}) \qquad \delta' T = \sum_1^n{}^i Q_i\, \delta' q_i,$$

$$(\mathrm{V}_1) \qquad 0 = \left[2T\,\delta t + \sum_1^n{}^i \frac{\partial T}{\partial q_i'}\delta' q_i\right]_{t_0}^{t_1}$$

als Variationsvorschrift für die virtuellen Verrückungen $\delta' q_i$ und für die δt zu den Zeiten t_0 und t_1, so verschwindet $\delta\int_{t_0}^{t_1} 2T\,dt$ jedenfalls, sobald die Bewegung des materiellen Systems die natürliche ist.

Infolge der Vorschrift (V) ist nämlich die Größe zur Rechten von (12)

$$= \sum_{1}^{n} i \left[Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right] \delta' q_i dt,$$

eine Größe, die im Sinne des D'Alembertschen Prinzips für alle t verschwindet, sobald die Bewegung die natürliche ist. Daher verschwindet für diese Bewegungen die Größe zur Linken von (12) für alle Zeitpunkte des Intervalls t_0 bis t_1; und man hat aus ihr die Gleichung

$$(13) \qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = \left[2T\delta t + \sum_{1}^{n} i \frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta' q_i\right]_{t_0}^{t_1},$$

eine Gleichung, deren rechte Seite laut der Variationsvorschrift (V_1) verschwindet. Der Satz ist also bewiesen.

Betrachtet man den speziellen Fall, wo U das Potential der Kräfte Q_i ist und wohl von t nicht aber von den q_i' abhängt, so nimmt (V) die Form an

$$\delta' T = \delta' U,$$

eine Gleichung, die im Sinne der aus (10) und (10*) entspringenden Identität

$$\delta'(T-U) \equiv \delta(T-U) - \left[\frac{d}{dt}(T-U)\right]\delta t,$$

die Form annimmt

$$(14^*) \qquad \delta(T-U) - \left[\frac{d}{dt}(T-U)\right]\delta t = 0.$$

Die Variationsvorschrift (V) ist also in diesem Spezialfall, wenn man die Energie des Systems mit F bezeichnet, identisch mit

$$(14) \qquad \delta F = \frac{dF}{dt}\delta t,$$

d. i.

$$(14^*) \qquad \delta' F = 0.$$

Herr Voss scheint nicht bemerkt zu haben, daß in meiner oben genannten Arbeit gerade diese Gleichung als Variationsvorschrift dient. Es verdient aber auch hervorgehoben zu werden, daß der Vossische Satz nicht umkehrbar, daher keinesfalls als Verallgemeinerung des oben genannten Lagrangeschen umkehrbaren Satzes zu bezeichnen ist. Sind nämlich die allgemeinen Vossischen Bedingungsgleichungen der Bewegung

$$(15) \qquad \sum_{1}^{n} i\, a_{ki} dq_i + a_{k0} dt = 0, \qquad (k = 1, 2, \cdots, \nu),$$

so hat man zu setzen

(16) $$\sum_1^n a_{ki}\delta q_i + a_{k0}\delta t = 0,$$

also

(16*) $$\sum_1^n a_{ki}\delta' q_i = 0.$$

Die Forderung, daß $\delta\int_{t_0}^{t_1} 2T\,dt$ bei Einhaltung der Variationsvorschriften (V) und (V_1) verschwinde, ist äquivalent mit der einzigen Forderung

(17) $$\int_{t_0}^{t_1}\sum_1^n\left(Q_i + \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)\delta' q_i\,dt = 0.$$

Da nun in dieser Gleichung (17) die $\delta' q_i$ keiner anderen Bedingung unterliegen, als den durch das Gleichungssystem (16*) und der Gleichung (14*) auferlegten, so könnten die Bewegungsgleichungen des materiellen Systems z. B. wohl von der Form sein

(18) $$Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} = \sum_1^\nu \lambda_{ki} a_{ki} + \lambda_0\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\lambda_0\frac{\partial F}{\partial q_i'}\right),$$

wo $F \equiv T - U$ die Energie des materiellen Systems bedeutet, λ_0 aber keiner anderen Bedingung unterliegt, als zur Zeit t_0 und zur Zeit t_1 zu verschwinden. (S. pag. 179).

Soll der Satz des Herrn Voss umkehrbar sein, so muß eine neue Vorschrift hinzukommen; eine solche ist z. B. die Forderung, daß bei beliebiger Verschiebung der Zeitpunkte t_0 und t_1 innerhalb der Zeitdauer der Bewegung die Variation der Aktion bleibend verschwinde, wenn nur die oben genannten Variationsvorschriften eingehalten werden. Dies soll später bewiesen werden; sicher ist aber, daß das Prinzip der Aktion in der Vossischen Form nicht äquivalent ist dem Hamiltonschen Prinzip, welches die natürliche Bewegung, ohne jedwede Verrückung der Zeitpunkte t_0 und t_1, eindeutig ausscheidet.

IV. Man kann aber an Stelle der Vossischen Variationsvorschrift (V, V_1) eine andere setzen, die eine wahre Verallgemeinerung der Lagrangeschen Vorschrift (U) ist, — eine solche nämlich, bei deren Einhaltung das Verschwinden der Aktion selbst ohne Verrückung der Zeitpunkte t_0 und t_1 die natürliche Bewegung aus der Mannigfaltigkeit aller anderen eindeutig ausscheidet.

Eine solche Vorschrift bildet z. B. diese Gleichung:

$$(19)\qquad d\left(2T\delta t+\sum_1^n {}^i \frac{\partial T}{\partial q_i'}\delta' q_i\right)-\left(\delta' T-\sum_1^n {}^i Q_i\delta' q_i\right)dt=0;$$

oder auch diese:

$$(20)\qquad d(T\delta t)-\sum_1^n {}^i Q_i\delta' q_i dt=0;\qquad \left[\sum_1^n {}^i \frac{\partial T}{\partial q_i'}\delta' q_i\right]_{t_0}^{t_1}=0,$$

oder eine Gleichung, die aus (19) und (20) auf die Weise entsteht, daß man zur linken Seite $\delta' T dt$ multipliziert mit einer Konstanten hinzufügt.

Das Prinzip wird dann, falls (19) als Vorschrift dient, vom D'Alembertschen, falls (20) als Vorschrift dient, vom Hamiltonschen bloß in Betreff der Umständlichkeit des Ausdrucks verschieden. Diese Vorschriften stimmen nämlich mit der Lagrangeschen (U) darin überein, daß sie ebensowenig eine Abhängigkeit zwischen den $\delta' q_i$ festsetzen, als die Vorschrift (U) eine solche zwischen den δq_i bedingt; wohl aber ordnen sie dem System der Zeitfunktionen $\delta' q_i$ eine ganz bestimmte Zeitfunktion δt zu. Man überzeugt sich leicht, daß die Vorschrift (U) eigentlich die folgende Festsetzung ausspricht:

$$\delta t=\delta t_0+\left[\frac{1}{2T}\sum_1^n {}^i \frac{\partial T}{\partial q_i'}\delta q_i\right]_{t_0}^{t}$$

$$+\int_{t_0}^{t}\sum_1^n {}^i \left[\frac{1}{2T}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}-Q_i\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)\right]\delta q_i dt.$$

Die Vorschrift (19) lautet dem analog

$$[2T\delta t]_{t_0}^{t}-\int_{t_0}^{t}\sum_1^n {}^i \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'}-Q_i\right)\delta' q_i dt=0$$

und die erste der Gleichungen (20), wie folgt:

$$[T\delta t]_{t_0}^{t}-\int_{t_0}^{t}\sum_1^n {}^i Q_i\delta' q_i dt=0.$$

§ 2.

Die Mannigfaltigkeit der mit dem Hamiltonschen äquivalenten Integralprinzipien; Formen des Aktionsprinzips.

V. Man substituiere in der Identität (11*) an Stelle von Φ das Hamiltonsche $f = T + U$, wo U eine Funktion der q_i, q_i', t sei; und integriere nach t. Man hat dann

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} f\,dt - \left[f\,\delta t + \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'}\,\delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1} \equiv \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n L_i\,\delta' q_i\,dt, \tag{21}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$L_i \equiv \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_i'}. \tag{21*}$$

Man zerlege f beliebig in additive Teile

$$f \equiv f_1 + f_2;$$

es besteht für f_1 und f_2 je eine Identität von der Form (21).

Ich setze fest, daß die Grenzwerte von δt der Vorschrift unterliegen

$$0 \equiv \left[f_1\,\delta t + \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'}\,\delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1}. \tag{22}$$

Dann geht die Identität (21) in die folgende Gleichung über:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} f\,dt - [f_2\,\delta t]_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n L_i\,\delta' q_i\,dt. \tag{23}$$

Wirken auf das materielle System, dessen lebendige Kraft T ist, außer den zum Potential U gehörigen keine anderen Kräfte, so ist $\sum_1^n L_i\,\delta' q_i = 0$. Bei der Festsetzung (22) ist daher die natürliche Bewegung des Systems derart, daß für alle virtuellen Verrückungen $\delta' q_i$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} f\,dt - [f_2\,\delta t]_{t_0}^{t_1} = 0 \tag{24}$$

wird, eine Gleichung, die sich auch in der Form schreiben läßt:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} f_1\,dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta' f_2\,dt = 0. \tag{24*}$$

Man hat nämlich

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} f_2\,dt - [f_2\,\delta t]_{t_0}^{t_1} \equiv \int_{t_0}^{t_1} [\delta(f_2\,dt) - d(f_2\,\delta t)] \equiv \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta f_2 - \frac{df_2}{dt}\,\delta t\right) dt,$$

d. i.

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} f_2\,dt - [f_2\,\delta t]_{t_0}^{t_1} \equiv \int_{t_0}^{t_1} \delta' f_2\,dt. \tag{25}$$

Die Gleichung (24*) spricht demnach den Satz aus:

Zerlegt man f in zwei additive Teile f_1 und f_2, und trifft bezüglich der Grenzwerte von δt die Festsetzung (22), *so ist die Summe gebildet aus der Variation von $\int f_1\,dt$ und aus dem Zeitintegral von $\delta' f_2$ gleich Null für sämtliche virtuellen Verrückungssysteme $\delta' q_i$, sobald nur die Bewegung des Systems die vom Potential U bewirkte natürliche ist.*

Dieser allgemeine Satz läßt sich aber auch, wie folgt, umkehren:

Zerlegt man f in zwei additive Teile f_1 und f_2, trifft bezüglich der Grenzwerte von δt die Festsetzung (22), *und fordert, daß die Summe gebildet aus der Variation von $\int f_1\,dt$ und aus dem Zeitintegral von $\delta' f_2$ für sämtliche virtuellen Verrückungssysteme $\delta' q_i$ verschwinde, so ist die Bewegung des materiellen Systems jedenfalls die durch das Potential U bewirkte natürliche Bewegung, und nur diese.*

Da nämlich die Gleichung (23), bei Rücksichtnahme auf die Identität (25), die Form annimmt

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} f_1\,dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta' f_2\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n L_i\,\delta' q_i\,dt; \tag{23*}$$

da ferner die Gleichung (23), also auch diese Gleichung (23*), eine Folge der Identität (21) ist, sobald nur im Sinne der Prämissen die Variationsvorschrift (22) eingehalten wird; da endlich im Sinne der Prämissen die linke Seite der Gleichung (23*) für alle virtuellen $\delta' q_i$ Systeme $= 0$ sein soll: so muß für diese auch die Rechte von (23*) verschwinden. Man hat also

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n L_i\,\delta' q_i\,dt = 0, \tag{23**}$$

wenn nur die $\delta' q_i$ ein System virtueller Verrückungen bilden. Daraus folgt, daß der Integrand $\sum_1^n L_i\,\delta' q_i$ verschwindet. Die Gesamtheit der Forderungen ergibt daher die Forderung des D'Alembertschen Prinzips.

VI. Der Schlußsatz folgt aber aus (23**) nicht mehr, wenn nicht nur die Summe zur Linken von (24*), sondern auch $\int\limits_{t_0}^{t_1}\delta' f_2\, dt$ für sich verschwinden soll. Mit Rücksichtnahme auf die Identität (10*) wird nämlich so gefordert, daß $\delta\int\limits_{t_0}^{t_1} f_1\, dt$ nur dann verschwinde, wenn die Verrückungen $\delta' q_i$ virtuell sind, die Vorschrift (22) eingehalten wird, und die $\delta' q_i$ *außerdem* noch der Gleichung

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\sum_1^n\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i}\delta' q_i+\frac{\partial f_2}{\partial q_i'}\frac{d}{dt}\delta' q_i\right)dt=0 \tag{26}$$

entsprechend gewählt werden. Diese Gleichung (26) bildet aber für die $\delta' q_i$ eine neue Beschränkung.

Ich unterscheide zwei Fälle:

A) Ich fordere, daß die $\delta' q_i$ gemäß der Gleichung

$$\sum_1^{n}{}^{i}\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i}\delta' q_i+\frac{\partial f_2}{\partial q_i'}\frac{d}{dt}\delta' q_i\right)=\frac{d}{dt}\sum_1^{n}{}^{i}\, a_i\delta' q_i \tag{27}$$

bestimmt sind, wo die a_i gegebene Funktionen bedeuten; dabei soll an Stelle von (22) die Grenzbedingung treten:

$$\left[f_1\delta t+\sum_1^{n}{}^{i}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i'}-a_i\right)\delta' q_i\right]_{t_0}^{t_1}=0. \tag{27*}$$

Unter diesen Fall subsummiert sich der bisher ausschließlich in Betracht gezogene Spezialfall, wo sämtliche $a_i\equiv 0$ sind.

B) Ich fordere ganz allgemein, daß $\delta\int\limits_{t_0}^{t_1} f_1\, dt$ für fixe t_0, t_1 und für alle virtuellen $\delta' q_i$ und δt verschwinde, die den Gleichungen (26) und (22) gemäß gewählt sind.

Ad A). Solange keine fernere Bedingung hinzutritt, entspricht sämtlichen Forderungen eine jede Bewegung, die den Gleichungen

$$L_i=\sum^{n}{}^{k}\lambda_{ki}a_{ki}+\lambda_0\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i}-\frac{da_i}{dt}\right)-\frac{d}{dt}\lambda_0\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i'}-a_i\right),$$
$$(i=1,\cdots,n)$$

gemäß verläuft, wenn nur die Zeitfunktion λ_0 zu den Grenzzeiten t_0 und t_1 verschwindet.

Man hat nämlich bei Rücksichtnahme auf (16*) die Gleichung

$$\sum_1^n L_i\delta' q_i = \lambda_0 \sum_1^n \left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i} - \frac{d a_i}{dt}\right)\delta' q_i + \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i'} - a_i\right)\frac{d}{dt}\delta' q_i\right]$$
$$- \frac{d}{dt}\lambda_0 \sum_1^n \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i'} - a_i\right)\delta' q_i.$$

Da das erste Glied zur Rechten dieser Gleichung laut (27) verschwindet, so hat man aus ihr mittels Integration nach der Zeit

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n L_i\delta' q_i dt = \left[\lambda_0 \sum_1^n \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i'} - a_i\right)\delta' q_i\right]_{t_0}^{t_1} = 0,$$

da doch λ_0 zu den Grenzzeiten verschwindet. q. e. d.

Lehrsatz. *Tritt hingegen als fernere Bedingung hinzu, daß den Forderungen bei beliebig verschiebbaren Grenzzeiten t_0 und t_1 Genüge geschehen soll, so entspricht den Forderungen im Allgemeinen einzig und allein die natürliche Bewegung des materiellen Systems; eine Ausnahme bildet nur der Fall, wenn*

$$F_2 \equiv \sum_1^n \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i'} - a_i\right)\delta' q_i$$

entweder an und für sich oder in Folge der Bedingungsgleichungen (15), (16) *verschwindet.*

Wenn wir nämlich diesen Ausnahmefall ausschließen, so läßt sich F_2 mittels der genannten Bedingungsgleichungen jedenfalls auf die Form bringen

$$(28) \qquad \sum_1^n \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i'} - a_i\right)\delta' q_i = \sum_1^{n-r} N_i \delta'_i \mathfrak{q}_i,$$

wo die $\delta'\mathfrak{q}_i$ freie virtuelle Verrückungen bedeuten, und wo die N_i weder an und für sich noch mittels der Bedingungsgleichungen (15) verschwinden. Die Gleichung (27) reduziert sich dann auf

$$(27^{**}) \qquad \sum_1^{n-r} \left(M_i\delta'\mathfrak{q}_i + N_i \frac{d}{dt}\delta'\mathfrak{q}_i\right) = 0.$$

Es sei N_j einer der nicht verschwindenden Koeffizienten; dann setze man $\delta'\mathfrak{q}_j$ als von 0 verschieden voraus, während alle übrigen $\delta'\mathfrak{q}$ verschwinden. Dann folgt aus der Gleichung (27**)

$$M_j\delta'\mathfrak{q}_j + N_j\frac{d}{dt}\delta'\mathfrak{q}_j = 0.$$

Daher ist

(29) $$\delta' \mathfrak{q}_j = [\delta' \mathfrak{q}_j]_{t_0} e^{G_j},$$

wo

(29*) $$G_j \equiv -\int_{t_0}^{t_0} \frac{M_j}{N_j}\, dt$$

endlich ist.

Man hat daher für dieses System virtueller Verrückungen

$$\sum_1^n L_i \delta' q_i = \mathfrak{C}_j \delta' \mathfrak{q}_j = [\delta' \mathfrak{q}_j]_{t_0} \mathfrak{C}_j e^{G_j},$$

und gemäß der Gleichung (23**)

(30) $$0 = \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n L_i \delta' q_i dt = [\delta \mathfrak{q}_j]_{t_0} \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{C}_j e^{G_j}\, dt.$$

Es ist aber $[\delta \mathfrak{q}_j]_{t_0}$ eine beliebige Konstante, ferner e^{G_j} positiv und nicht $= 0$, und die Gleichung soll für beliebig nahe gelegene t_0 und t_1 gültig sein. Daher ist notwendigerweise

(30*) $$\mathfrak{C}_j = 0.$$

Es sei ferner N_0 einer der verschwindenden Koeffizienten N_i; dann setze man $\delta' \mathfrak{q}$ und auch $\delta' \mathfrak{q}_0$ als von 0 verschieden voraus, während alle übrigen $\delta' \mathfrak{q}$ verschwinden. Dann folgt aus der Gleichung (27**)

$$M_0 \delta' \mathfrak{q}_0 + M_j \delta' \mathfrak{q}_j + N_j \frac{d}{dt} \delta' \mathfrak{q}_j = 0;$$

es ist daher $\delta' \mathfrak{q}_0$ ganz beliebig; man kann nämlich aus dieser Gleichung $\delta' \mathfrak{q}_j$ immer dem beliebig gegebenen $\delta' \mathfrak{q}_0$ gemäß bestimmen.

Da nun sämtliche $\mathfrak{C}_j$ verschwinden (30*), und nur noch $\delta' \mathfrak{q}_0$ von 0 verschieden ist, so hat man gemäß der Gleichung (23**)

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n L_i \delta' q_i\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{C}_0 \delta' \mathfrak{q}_0\, dt.$$

Aus der Willkürlichkeit von $\delta' \mathfrak{q}_0$ folgt daher, daß auch

(30*) $$\mathfrak{C}_0 = 0$$

ist. Man hat demnach bei Einführung der $\delta' \mathfrak{q}$

$$\sum_1^n L_i \delta' q_i = \sum_1^{n-\nu} \mathfrak{C}_i \delta \mathfrak{q}_i = 0;$$

d. h. für das materielle System besteht das D'Alembertsche Prinzip.

Ad B.) Ich beweise den Satz mittels der in A) eingeführten Funktionen a_i, die ich den Beschränkungen unterwerfe, daß

$$F_2 \equiv \sum \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i'} - a_i\right) \delta' q_i$$

weder an und für sich noch infolge der Bedingungsgleichungen verschwinde, und daß ferner $\sum_1^n a_i \delta' q_i$ zu den festen Zeiten t_0 und t_1 einen und denselben Wert annehme. Da die erste Beschränkung $n - \nu - 1$ Ungleichungen äquivalent, und die zweite sich nur auf die Grenzwerte der a_i bezieht, so kann diesen Bedingungen auf unendlich mannigfaltige Weise entsprochen werden. Dann sind aber die Schlüsse in (Ad A)) nicht nur bis zur Gleichung (30) erlaubt, sondern man kann weiter schließen, daß die G_j von der Wahl der a_i abhängen, daher Funktionen von t sind, die je nach Wahl der a_i von t_0 an bis t_1 ebensogut wachsen wie abnehmen können. Daher sind die $\mathfrak{C}_j = 0$; ebenso verschwinden auch die $\mathfrak{C}_0$; also ist das D'Alembertsche Prinzip eine Folge der in B) gestellten Forderungen.

VII. Die Forderung, daß die N_i nicht sämtlich verschwinden, ist zum Beweis des Satzes in VI. ad A) wesentlich. Hat man den entgegengesetzten Fall vor Augen, daß also

$$(31) \qquad \sum_1^n \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i'} - a_i\right) \delta' q_i = 0$$

ist, falls nur die q_i' und $\delta' q_i$ den Bedingungsgleichungen des materiellen Systems gemäß sind, so gehen die Gleichungen (27) und (27*) über in

$$(31^*) \qquad \sum_1^n a_{0i} \delta' q_i = 0; \quad a_{0i} = \frac{\partial f_2}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_2}{\partial q_i'},$$

$$(31^{**}) \qquad \left[f_1 \delta t + \sum \frac{\partial f_1}{\partial q_i'} \delta' q_i\right]_{t_0}^{t_1}.$$

Es sind zwei Fälle möglich: entweder ist zur Erfüllung der Gleichung (31*) auch noch die Heranziehung der zu bestimmenden Differentialgleichungen der Bewegung notwendig; oder es genügen zu ihrer Erfüllung schon die Bedingungsgleichungen für sich.

Im letzteren Fall ist die Bewegung notwendigerweise die natürliche. Da nämlich die Variationsvorschrift (27**) für sämtliche virtuellen Verrückungen erfüllt ist, wie auch sonst die Bewegungsgleichungen beschaffen sind, an Stelle von (22) aber die Vorschrift (31**) tritt, die bloß eine Beziehung zwischen δt_0 und δt_1 feststellt, so ist die Gleichung (23**) für sämtliche virtuellen Verrückungen $\delta' q_i$ zu erfüllen. Daraus folgt, selbst

wenn t_0 und t_1 fixe Zeitpunkte bedeuten, daß die Bewegung des Systems notwendigerweise die natürliche ist.

Im ersteren Fall ist hingegen die Bewegung nicht notwendigerweise die natürliche. In diesem Fall ist nämlich die Gleichung (31*) als neue Bedingungsgleichung zu betrachten, die für die Wahl der $\delta' q_i$ eine neue Beschränkung bildet. Daher sind die Bewegungsgleichungen von der Form

$$(32) \qquad L_i + \lambda_0 a_{0i} + \sum_1^{\nu} {}^k \lambda_k a_{ki} = 0, \quad (i = 1, \cdots, n),$$

wo λ_0 ein Lagrangescher Koeffizient ist. Als Beispiel für diesen Fall diene, wenn $a_i \equiv \frac{\partial f_2}{\partial q_i'}$ ist für sämtliche $i = 1, \cdot \cdot, n$.

Der Koeffizient λ_0 läßt sich näher bestimmen, falls nur $\sum_1^n {}^i a_{0i} q_i'$ von Null verschieden ist. Substituiert man nämlich in (31*) $\delta' q_i = \delta q_i - q_i' \delta t$, so nimmt sie die Form an

$$\sum_1^n {}^i a_{0i} q_i' \delta t = \sum_1^n {}^i a_{0i} \delta q_i,$$

d. i.

$$\delta t = \sum_1^n {}^i A_{0i} \delta q_i; \quad A_{0i} \equiv \frac{a_{0i}}{\sum_1^n {}^j a_{0j} q_j'}.$$

Führt man dieses δt in den Vossischen Bedingungsgleichungen (16) ein, so hat man für diese

$$(16^{**}) \qquad \sum_1^n {}^i (a_{ki} + a_{k0} A_{0i}) \delta q_i = 0.$$

Ebenso geht die Gleichung (23**) über in diese

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_1^n {}^i L_i \delta q_i - \sum_1^n {}^j L_j q_j' \sum_1^n {}^i A_{0i} \delta q_i \right) \delta t = 0,$$

d. i.

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n {}^i \left(L_i - A_{0i} \sum_1^n {}^j L_j q_j' \right) \delta q_i \delta t = 0.$$

Da nun hier die δq_i im Zeitintervall t_0 bis t_1 bloß den Gleichungen (16**) unterliegen, so folgt aus dieser Gleichung, selbst bei festen t_0 und t_1, für die Bewegungsgleichungen die Form:

$$L_i - A_{0i}\sum_1^n{}^j L_j q_j' + \sum_1^\nu{}^k \lambda_k(a_{ki} + a_{k0}A_{0i}) = 0;$$

d. i.

$$L_i - \frac{a_{0i}}{\sum_1^n{}^j a_{0j}q_j'}\left(\sum_1^n{}^j L_j q_j' - \sum_1^\nu{}^k \lambda_k a_{k0}\right) + \sum_1^\nu{}^k \lambda_k a_{ki} = 0;$$

also

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sum_1^n{}^j a_{0j}q_j'}\left(-\sum_1^n{}^j L_j q_j' + \sum_1^\nu{}^k \lambda_k a_{k0}\right). \tag{32*}$$

Die Bewegung des Systems ist daher gar nicht die natürliche, es wäre denn daß zu den Forderungen des Variationsproblems noch die Gültigkeit des Satzes von der lebendigen Kraft hinzukäme; dann ist nämlich $\lambda_0 = 0$.

VIII. Es seien die Gleichungen

$$a_{k0} + a_{k1}q_1' + a_{k2}q_2' + \cdots + a_{kn}q_n' = 0, \qquad (k = 1, \cdots, \nu) \tag{15}$$

die Bedingungsgleichungen des materiellen Systems; $c_1, c_2, \cdots, c_n$ ein solches *nur* von den a_{ki} abhängiges *partikuläres* Lösungssystem dieser Gleichungen, daß die c_0 sämtlich verschwinden, wenn die a_{k0} sämtlich verschwinden. Dann bildet das System

$$\delta' q_i = (c_i - q_i')\delta t; \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

ein partikuläres System von virtuellen Verrückungen. Wäre also f_2 von der Eigenschaft, daß bei entsprechenden Koeffizienten l_k

$$\sum_1^n{}^i \frac{\partial f_2}{\partial q_i'}\delta' q_i + \sum_1^\nu{}^k l_k \sum_1^n{}^i a_{ki}\delta' q_i \equiv 0 \tag{33}$$

ist, dann wäre auch

$$\sum_1^n{}^i \frac{\partial f_2}{\partial q_i'}(c_i - q_i') + \sum_1^\nu{}^k l_k \sum_1^n{}^i a_{ki}(c_i - q_i') \equiv 0,$$

das ist

$$\sum_1^n{}^i \frac{\partial f_2}{\partial q_i'} q_i' + \sum_1^\nu{}^k l_k\left(a_{k0} + \sum_1^n{}^i a_{ki}q_i'\right) \equiv \sum_1^n{}^i c_i \frac{\partial f_2}{\partial q_i'}. \tag{33*}$$

Bedenkt man dies, so folgt aus dem Lehrsatz in VI, pag. 180 der

Lehrsatz. *Ist* $f_2 = f - f_1$ *von der Eigenschaft, daß die* $\sum_1^n \frac{\partial f_2}{\partial q_i'} q_i'$ *mittels der linearen Substitution* (15) *nicht auf die Form* $\sum_1^n c_i \frac{\partial f_2}{\partial q_i'}$ *gebracht werden kann, wo die* c_i, *falls die Gleichungen* (15) *homogen, sämtlich verschwinden und auch sonst unabhängig von den* q_i' *sind: so ist die Forderung, daß die simultanen Gleichungen*

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} f_1\, dt = 0,$$

$$\delta'(f - f_1) = 0,$$

$$\left[f_1 \delta t + \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'} \delta q_i' \right]_{t_0}^{t_1} = 0,$$

$$\sum_1^n a_{ki}\, \delta' q_i = 0, \qquad (k = 1, \cdots, \nu)$$

$$a_{k0} + \sum_1^n a_{ki} q_i' = 0, \qquad \text{,,}$$

für beliebig verschiebbare t_0 *und* t_1 *Bestand haben, äquivalent damit, daß die* q_i *das System gewöhnlicher Differentialgleichungen befriedigen*

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_i'} + \sum_1^\nu \lambda_k a_{ki} = 0, \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

wo die $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ *Lagrangesche Koeffizienten sind.*

IX. Zerlegt man demnach $T + U$ in zwei beliebige additive Teile f_1 und f_2, so erhält man bei Anwendung der in VII bewiesenen Sätze Variationssätze, die dem Hamiltonschen Satz äquivalent sind.

Wirken auf das System auch Kräfte ohne Potential, so erleidet das Variationsprinzip die Modifikation, daß an Stelle von $\int \delta' f_2\, dt$ der Ausdruck $\int \left(\delta' f_2 + \sum_1^n Q_i \delta q_i \right) dt$ tritt.

Die bisher untersuchten Fälle sind:

1. $f_1 = 2T, \qquad f_2 = U - T,$

2. $f_1 = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i', \qquad f_2 = f - \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' \equiv -F.$

Herr Voss hat den Fall 1., wie oben erwähnt wurde, nur in dem Fall

untersucht, wenn U von den q_i' unabhängig ist. Bei der Beschränkung $\frac{\partial f}{\partial t} \equiv 0$ wurde der Fall 2. von Herrn A. Mayer untersucht; ohne dieser Beschränkung von mir. Aus der unendlichen Mannigfaltigkeit möglicher Zerlegungen sind hervorzuheben

$$3. \quad f_1 = U, \qquad f_2 = T;$$
$$4. \quad f_1 = f, \qquad f_2 = 0.$$

Die Funktionen f_1 und f_2 sind natürlich auch umkehrbar. Die Umkehrung von 1. führt auf ein Prinzip, welches der Herzschen Form*) ähnelt, von dieser aber im Grunde genommen ganz verschieden ist. Die Zerlegung von f in

$$5. \quad f_1 = T - U, \qquad f_2 = 2U$$

gibt ebenfalls ein Prinzip von solcher Form; diese, wie auch die Umkehrung von 3., nämlich

$$6. \quad f_1 = T, \qquad f_2 = U,$$

liefern ein Beispiel für den Ausnahmefall VII, a), wenn das System nur von Kräften angegriffen wird, denen ein von Geschwindigkeiten unabhängiges Potential zukommt. Der Ausdruck des dem Hamiltonschen äquivalenten Prinzips lautet nämlich im Fall 6. wie folgt: Die Variation $\delta\int_{t_0}^{t_1} T dt$ ist $= 0$ bei Einhaltung der Variationsvorschriften

$$\delta' U = 0, \qquad \left[T\delta t + \sum_1^n \frac{\partial (T+U)}{\partial q_i'} \delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1} = 0,$$

$$\sum_1^n a_{\nu i} \delta' q_i = 0, \qquad (\nu = 1, \cdots, \nu)$$

für die natürliche Bewegung und nur für diese, falls für die Bewegung die Erhaltung des Prinzips der lebendigen Kraft gültig sein soll. Man erhält von 5. aus ein gleichwertiges Prinzip: es ist dann $\delta\int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt = 0$, wenn an Stelle der zweiten Vorschrift diese kommt

$$\left[(T-U)\delta t + \sum_1^n \frac{\partial (T+U)}{\partial q_i'} \delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1} = 0,$$

während alles übrige unverändert bleibt.

Die Zerlegung 5. auf das Theorem VI, im Fall B) angewandt, führt auf einen korrekten arithmetischen Ausdruck des vielumstrittenen Ostwaldschen Prinzips. Fordert man nämlich, daß die Variationsgleichungen

*) Gesammelte Werke Bd. 3, pag. 363.

$$\delta\int\limits_{t_0}^{t_1} T\,dt = 0,\quad \int\limits_{t_0}^{t_1}\delta'(T-U)\,dt = 0,\quad \left[T\delta t + \sum\frac{\partial(T+U)}{\partial q_i}\delta' q_i\right]_{t_0}^{t_1} = 0$$

für jedes virtuelle Verschiebungssystem $\delta' q_i$ Bestand haben, so entspricht diesen Forderungen ausschließlich nur die natürliche Bewegung des Systems. T und U können ihre Rollen auch vertauschen, was dem Sinne des Ostwaldschen Ausspruchs gemäß ist.

Ad 1. Ich bezeichne im Falle 1. das $\int f_1\,dt$ mit A_1, also

$$A_1 \equiv \int\limits_{t_0}^{t_1} 2T\,dt;$$

es ist dies die Aktion des materiellen Systems im gewöhnlichen Sprachgebrauch.

In diesem Falle besteht für die Grenzwerte von δt im Sinne von (22)

$$(22_1)\qquad \left[2T\delta t + \sum_1^n\frac{\partial(T+U)}{\partial q_i'}\delta' q_i\right]_{t_0}^{t_1} = 0.$$

Ist U unabhängig von den q_i', so geht diese in die Vosssche Grenzgleichung über. Sind außerdem noch die Bedingungsgleichungen der Bewegung unabhängig von der Zeit, also $\sum\frac{\partial T}{\partial q'}q' = 2T$, so geht (22_1) über in die bekannte Form

$$\left[\sum_1^n\frac{\partial T}{\partial q_i'}\delta q_i\right]_{t_0}^{t_1} = 0.$$

Ad 2. Ich bezeichne im Falle 2. das $\int f_1\,dt$ mit A_2, also

$$A_2 \equiv \int\limits_{t_0}^{t_1}\sum_1^n\frac{\partial f}{\partial q_i'}q_i'\,dt;$$

ich habe dieses Integral in meinen oben genannten Arbeiten mit dem Namen „Aktion des Systems“ belegt; ich werde es hier *Aktion* A_2 nennen. Für diesen Namen spricht der Umstand, daß das Integral im einfacheren Fall, wo die Bedingungsgleichungen der Bewegung unabhängig sind von der Zeit, und das Potential unabhängig ist von den Geschwindigkeiten, identisch ist mit A_1. Sind aber die Bewegungsgleichungen der Bewegung auch von der Zeit abhängig, so ist dies dem Umstande zuzuschreiben, daß das System mit äußern beweglichen Massen in Verbindung steht; diesem *vollständigen* System kommt daher eine lebendige Kraft zu, die außer der Summe der lebendigen Kräfte der beiden Systeme auch noch additive Glieder enthält, in denen die Geschwindigkeiten des innern Systems

linear vorkommen. Enthält endlich das Potential auch die Geschwindigkeiten des Systems, so ist das nach Helmholtz der Bewegung verborgener Massen zuzuschreiben, mit denen das eigentliche System zu ergänzen ist: daher steht an Stelle von T die Summe $T + U$.

Zwischen den Grenzwerten von δt und den $\delta' q_i$ besteht in diesem Falle die Gleichung

$$\left[\sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' \delta t + \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'} \delta' q_i\right]_{t_0}^{t_1} = 0,$$

das ist:

$$(22_2) \qquad \left[\sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'} \delta q_i\right]_{t_0}^{t_1} = 0.$$

Es gibt kaum eine andere wirkliche Zerlegung von f, zu der eine solch' einfache Grenzgleichung gehört.

Diese Zerlegung zeichnet sich auch durch andere Eigenschaften aus. Zu diesen gehört die Eigenschaft, daß die Funktion

$$\sum_1^n \frac{\partial f_2}{\partial q_i'} q_i',$$

die beim Ausspruch des Prinzips eine wichtige Rolle spielt, nur in singulären Punkten der natürlichen Bewegung verschwindet. Es ist nämlich, da $f_2 = f - f_1$,

$$\sum_1^n \frac{\partial f_2}{\partial q_i'} q_i' \equiv \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' - \sum_1^n \frac{\partial f_1}{\partial q_i'} q_i' \equiv f_1 - \sum_1^n \frac{\partial f_1}{\partial q_i'} q_i',$$

also

$$\sum_1^n \frac{\partial f_2}{\partial q_i'} q_i' \equiv - \sum_1^n{}_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial q_j'} q_i' q_j',$$

Es ist demnach $\sum \frac{\partial f_2}{\partial q_i'} q_i'$, wenn man die $\frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial q_j'}$ als Koeffizienten auffaßt, eine quadratische Funktion der Geschwindigkeitskomponenten; und die Determinante dieser quadratischen Funktion ist die Funktionaldeterminante von f, nämlich

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial q_1' \partial q_1'}, \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial q_1' \partial q_n'} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \frac{\partial^2 f}{\partial q_n' \partial q_1'}, \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial q_n' \partial q_n'} \end{vmatrix},$$

dieselbe Determinante, die bei der Lösung der Differentialgleichungen der zu $f = T + U$ gehörigen natürlichen Bewegung eine so wichtige Rolle spielt; die im Falle U das Potential von Kräften ist, wie sie in der Natur

vorkommen, und das materielle System, wie auch deren Bedingungsgleichungen natürliche sind, höchstens in isolierten Punkten, nie aber identisch verschwinden kann. Dasselbe kann also auch bezüglich $\sum \frac{\partial f_2}{\partial q_i'} q_i'$ ausgesprochen werden, auch diese verschwindet höchstens in isolierten Punkten. Bei dieser Zerlegung ist also f_2 von der im Lehrsatz zu VIII (pag. 185) vorausgesetzten Eigenschaft, da sonst, sobald die Bedingungsgleichungen (15) in homogene übergehen, die Funktionaldeterminante verschwinden müßte. *Bei dieser Zerlegung entspricht daher den im Lehrsatz aufgestellten Forderungen nur die natürliche Bewegung des materiellen Systems.* Der Lehrsatz umfaßt demnach das Prinzip der kleinsten Aktion, wenn man mit letzteren Namen das Integral

$$A_2 \equiv \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' \, dt$$

belegt.

Ad 4. In diesem Fall besteht zwischen den Grenzwerten von δt und von den δq_i die Gleichung

$$\left[f \delta t + \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'} \delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1} = 0,$$

und bei Einhaltung dieser einzigen Variationsvorschrift liefert die Gleichung

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} f \, dt = 0$$

die natürliche Bewegung, und nur diese.

Ist hingegen $f_1 = 0$, $f_2 = f$, so besteht die Grenzgleichung

$$\left[\sum \frac{\partial f}{\partial q_i'} \delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1} = 0,$$

und bei Einhaltung dieser einzigen Variationsvorschrift liefert die Forderung

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta' f \, dt = 0$$

die natürliche Bewegung, und nur diese.

Dies ist das Hamiltonsche Prinzip.

X. Aus der Identität (21) folgt mittels (25) die Identität

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} f_1 \, dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta' f_2 \, dt - \left[f_1 \delta t + \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'} \delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1} \equiv \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n L_i \delta' q_i \, dt.$$

Aus dieser folgen die Sätze:

1. Fordere ich, daß $\delta\int\limits_{t_0}^{t_1} f_1\,dt = 0$ sei für jedes virtuelle System $\delta' q_i$, vorausgesetzt nur, daß zwischen δt und den $\delta' q_i$ zu jeder Zeit die Gleichung

$$(19^*)\qquad \delta' f_2 - \frac{d}{dt}\sum_1^n{}^i \frac{\partial f}{\partial q_i'}\delta' q_i = \frac{d}{dt}(f_2\,\delta t) - \sum_1^n{}^i Q_i\delta' q_i$$

als Variationsvorschrift gilt, so ist die Bewegung notwendigerweise und ausschließlich die zum kinetischen Potential $f = T + U$ und dem Kräftesystem Q_i gehörige natürliche Bewegung.

2. Dasselbe gilt auch, wenn die Variationsvorschrift (19*) durch die folgenden zwei Gleichungen ausgedrückt wird:

$$(20^*)\qquad \delta' f_2 = \frac{d}{dt}(f_1\,\delta t) - \sum_1^n{}^i Q_i\delta' q_i;\qquad \left[\sum_1^n{}^i \frac{\partial f}{\partial q_i'}\delta' q_i\right]_{t_0}^{t_1} = 0.$$

3. Diese Variationsvorschrift kann ebenso ersetzt werden durch

$$(20^{**})\qquad \delta' f_2 = \frac{d}{dt}\left[\left(f_1 - \sum_1^n{}^i \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i'\right)\delta t\right] - \sum_1^n{}^i Q_i\delta' q_i;$$

$$\left[\sum_1^n{}^i \frac{\partial f}{\partial q_i'}\delta q_i\right]_{t_0}^{t_1} = 0.$$

Diese Vorschriften bestimmen nämlich (auf dieselbe Weise, wie (19) und (20) in IV) die Variation δt, welche dem System der Zeitfunktionen $\delta' q_i$ im Verlauf der ganzen Bewegung zugeordnet wird. Demzufolge sind diese Aussprüche des Prinzips vom D'Alembertschen resp. Hamiltonschen bloß durch ihre Weitschweifigkeit verschieden.

XI. *Bemerkung zur Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.* Behandelt man das Problem, alle Systeme von Differentialgleichungen zu finden, für welche bei beliebig verschiebbaren t_0 und t_1 die Variation $\delta\int\limits_{t_0}^{t_1} f_1\,dt = 0$ ist, falls $f_2 =$ einer gegebenen Zeitfunktion ist und zwischen den Grenzwerten von δt und δq_i die Gleichung (22) bestehen soll, mittels der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren, so kommt man zu denselben Resultaten. Diese Methode läßt sich aber auf das in VI. behandelte allgemeinere Problem nicht anwenden. Dies ist die Ursache, weshalb ich von der genannten Methode hier keinen Gebrauch gemacht habe.

§ 3.

Die Jacobische Transformation der Aktion A_2.

XII. Es sei $f = T + U$ eine quadratische Funktion der q_i'. Ich schreibe f in der Form

(34) $$f \equiv f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)},$$

wo die Indizes (0), (1), (2) den Grad des Gliedes in q_i' bedeuten. Man hat so

(35) $$f_1 \equiv \sum_1^n {}_i \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' \equiv f^{(1)} + 2f^{(2)},$$

daher

(36) $$f_2 \equiv f - f_1 \equiv f^{(0)} - f^{(2)}.$$

Demnach ist die Energie

(37) $$F \equiv \sum_1^n {}_i \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' - f \equiv f^{(2)} - f^{(0)},$$

und

(38) $$A_2 \equiv \int_{t_0}^{t_1} (2f^{(2)} + f^{(1)})\, dt.$$

Ich schreibe

(39) $$f^{(1)} \equiv \sum_1^n {}_i b_i \frac{dq_i}{dt}, \qquad 2f^{(2)} \equiv \sum_1^n {}_{i,j} b_{i,j} \frac{dq_i}{dt} \frac{dq_j}{dt},$$

ferner die Gleichungen (37) und (38) in der Form

$$\frac{1}{2} \frac{\sum_1^n {}_{ij} b_{ij} dq_i dq_j}{dt^2} \equiv f^{(0)} + F;$$

$$A_2 \equiv \int \left[\frac{\Sigma b_{ij} dq_i dq_j}{dt} + \sum b_i dq_i\right];$$

d. i.

(40) $$dt = \sqrt{\frac{\Sigma b_{ij} dq_i dq_j}{2(f^{(0)} + F)}},$$

(40*) $$A_2 \equiv \int \left(\sqrt{2(f^{(0)} + F) \sum b_{ij} dq_i dq_j} + \sum b_i dq_i\right);$$

und mit s eine nicht zu variierende Variable bezeichnet

(41) $$A_2 \equiv \int_{s_0}^{s_1} \left(\sqrt{2(f^{(0)} + F) \sum_1^n {}_{ij} b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j} + \sum_1^n {}_i b_i \dot{q}_i\right) ds.$$

Diese nach der Jacobischen Methode transformierte Form der Aktion A_2 hat nun die Eigenschaft, daß sie formal zu den natürlichen Bewegungsgleichungen führt, wenn man fordert, daß ihre bei der Supposition $\delta t = 0$, $\delta F = 0$ gebildete Variation verschwinde, sobald nur die Grenzwerte der δq_i verschwinden. Ich setze, um dies zu beweisen

$$(42) \qquad \varphi^{(1)} \equiv \sum_1^n {}^i b_i \dot{q}_i; \qquad \varphi^{(2)} \equiv \sum_1^n {}^{ij} b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j;$$

dann ist

$$(42^*) \quad \frac{dt}{ds} = \sqrt{\frac{\varphi^{(2)}}{2(f^{(0)} + F)}}; \qquad A_2 \equiv \int_{s_0}^{s_1} \left(\sqrt{2(f^0 + F)\varphi^{(2)}} + \varphi^{(1)}\right) ds.$$

Man hat

$$2\sqrt{2}\,\delta\sqrt{(f^{(0)} + F)\varphi^{(2)}} = \frac{ds}{dt}\delta_t \varphi^{(2)} + 2\frac{dt}{ds}\delta_t f^{(0)}.$$

Nun ist bei Rücksichtnahme auf (42) und (39)

$$\delta_t \varphi^{(2)} \frac{ds}{dt} ds = \delta_t \varphi^{(2)} \frac{ds}{dt}\frac{ds}{dt} dt = 2\delta_t f^{(2)} dt.$$

Da endlich

$$\delta \varphi^{(1)} ds = \delta_t f^{(1)} dt,$$

$$ds \cdot \sqrt{2}\,\delta\sqrt{(f^{(0)} + F)\,\varphi^{(2)}} = (\delta_t f^{(2)} + \delta_t f^{(0)})\, dt,$$

so hat man als Ausdruck der ersten Variation der Aktion A_2 bei der genannten Supposition

$$(43) \qquad \delta A_2 = \int_{t_0}^{t_1} \delta_t f\, dt.$$

Die Forderung, daß dieses δA_2 verschwinde, wenn die Grenzwerte der δq_i verschwinden, ist demnach mit dem Hamiltonschen Prinzip formal äquivalent; sie führt daher zu denselben Differentialgleichungen der Bewegung. Die Rechnungen hören aber auf, rein formale zu sein, und haben reelle Bedeutung, wenn man das Problem wie folgt auffaßt:

Man denke sich, $F = E(t)$ als numerische Funktion gegeben, so wie sie bei der wahren Bewegung, bei den numerisch gegebenen Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten zum Vorschein kommt; aus $F = E(t)$ die numerisch feste Zeitfunktion $t = z(F)$ berechnet; und in den b_i, b_{ij}, $f^{(0)}$ an Stelle von t überall diese Zeitfunktion gesetzt. Man betrachte alsdann die Gleichung (40) als Definitionsgleichung für dt, und frage nach dem System von Differentialgleichungen, die der Aktion

$$(44) \quad A_2 \equiv \int_{F_0}^{F_1} \left(\sqrt{2(f^{(0)} + F) \sum b_{ij} \frac{dq_i}{dF}\frac{dq_j}{dF}} + \sum b_i \frac{dq_i}{dF}\right) dF$$

ihren größten oder kleinsten Wert verschaffen, wenn F die unabhängig variable ist, und die Anfangs- und Endwerte der δq_i verschwinden.

Die Lösung dieses Problems ist ein System von Differentialgleichungen, die sich von den Bewegungsgleichungen der Dynamik nur dadurch unterscheiden, daß an Stelle der im kinetischen Potential explizit vorkommenden Zeit t die Zeitfunktionen $z(F)$ zu stehen kommt. Es sind dies dieselben Gleichungen, zu denen ich durch die Interpretation des Helmholtzschen Verfahrens gelangt bin; die Gleichungen, von denen ich gezeigt habe, daß nur ihre von jenen numerisch gegebenen Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten ausgehenden partikulären Lösungen mit den wahren Bewegungen des materiellen Systems sich decken. Demzufolge gehen diese Gleichungen, wenn man hinzufügt, daß nur von diesen partikulären Lösungen die Rede ist, in die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen über*).

§ 4.

Verallgemeinerung für kinetische Potentiale höherer Ordnung.

XIII. Es sei f eine beliebige Funktion der Variablen

$$t,\ q_i,\ q_i',\cdots,\ q_i^{(k)},\cdots,\ q_i^{(m)}\qquad (i=1,\cdots,r);$$

und es sei q_i mit $q_i^{(0)}$ bezeichnet. Man hat dann

$$\delta' f\equiv\sum_0^m{}_k\sum_1^n{}_i\frac{\partial f}{\partial q_i^{(k)}}\,\frac{d^k}{dt^k}\,\delta' q_i. \tag{47}$$

Es ist nämlich, wie bekannt,

$$\delta f\,dt-df\,\delta t\equiv\sum_0^m{}_k\sum_1^n{}_i\frac{\partial f}{\partial q_i^{(k)}}\,(\delta q_i^{(k)}-q_i^{(k+1)}\delta t)\,dt;$$

aus dieser folgt der Satz (47), wenn man die Gleichung (7) in der Form schreibt

$$\delta q_i'-\frac{\partial q_i'}{\partial t}\,\delta t\equiv\frac{d}{dt}\,(\delta q_i-q_i'\delta t),$$

an Stelle von q_i die Differentialquotienten $q_i^{(k-1)},\cdots$ substituiert und so die Identitäten verifiziert:

$$\delta' q_i^{(k)}-\frac{dq_i^{(k)}}{dt}\,\delta t\equiv\frac{d}{dt}\left(\delta q_i^{(k-1)}-\frac{dq_i^{(k-1)}}{dt}\,\delta t\right)\equiv\frac{d^2}{dt^2}\left(\delta q_i^{(k-2)}-\frac{dq_i^{(k-2)}}{dt}\,\delta t\right)$$
$$\equiv\cdots\equiv\frac{d^k}{dt^k}\,\delta' q_i. \tag{48}$$

---

*) Siehe § 3 und § 6 meines in den Math. Ann. Bd. 48 erschienenen Aufsatzes. Ich bemerke, daß pag. 526 Z. 6 v. u. und pag. 529 Z. 8 v. o. an Stelle von „δq_i" zu schreiben ist „δq_i und δt"; pag. 529 Z. 19 v. o. sind die Worte „nothwendige und" zu streichen; pag. 530 Z. 7 v. u. ist an Stelle von „des Satzes (2)" zu schreiben „der Sätze (1) und (2)".

Da ferner

$$\delta' f\,dt \equiv \delta f\,dt - df\,\delta t \equiv \delta(f\,dt) - d(f\,\delta t),$$

so erhält man von (47) aus auf bekanntem Wege

$$(49)\qquad \delta(f\,dt) \equiv d\left(f\,\delta t + \sum_1^n{}^i \sum_0^{m-1}{}^k L_{ik} \frac{d^k}{dt^k}\,\delta' q_i\right) + \sum_1^n{}^i L_i\,\delta' q_i\,dt,$$

wo

$$L_i \equiv \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_i'} + \cdots + (-1)^m \frac{d^m}{dt^m}\frac{\partial f}{\partial q_i^{(m)}},$$

$$L_{ik} \equiv \frac{\partial f}{\partial q_i^{(k+1)}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_i^{(k+2)}} + \cdots + (-1)^{m-k-1}\frac{d^{m-k-1}}{dt^{m-k-1}}\frac{\partial f}{\partial q_i^{(m)}}.$$

Aus (49) folgt mittels Integration

$$(50)\qquad \delta\int_{t_0}^{t_1} f\,dt \equiv \left[f\,\delta t + \sum_1^n{}^i \sum_0^{m-1}{}^k L_{ik}\frac{d^k}{dt^k}\,\delta' q_i\right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\sum_1^n{}^i L_i\,\delta' q_i\,dt,$$

eine Identität, die sich von der von Herrn Königsberger zum Ausgangspunkt genommenen Form nur dadurch unterscheidet, daß hier die Variationen $\delta' q_i$ eingeführt sind.

Man zerlege f in zwei beliebige additive Teile f_1 und f_2 und treffe für die Grenzwerte der δt und $\delta' q_i$ die Festsetzung

$$(51)\qquad \left[f_1\,\delta t + \sum_1^n{}^i \sum_1^{m-1}{}^k L_{ik}\frac{d^k}{dt^k}\,\delta' q_i\right]_{t_0}^{t_1} = 0.$$

Die Gleichung (50) läßt sich dann mit Rücksichtnahme auf die Identität (25) in der Form schreiben

$$(52)\qquad \delta\int_{t_0}^{t_1} f_1\,dt + \int_{t_0}^{t_1}\delta' f_2\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\sum_1^n{}^i L_i\,\delta' q_i\,dt.$$

Diese Gleichung ist der äußern Form nach mit (23*) identisch; da die Identität (47) bloß eine Verallgemeinerung der Form (10*) bildet, wie auch die bezüglich der Grenzwerte getroffene Festsetzung (51) bloß eine Verallgemeinerung von (22) ist, so ergeben sich die Verallgemeinerungen der in § 2 ausgesprochenen und bewiesenen Sätze von selbst.

Beiträge zur Theorie der Punktmengen. I.

Von

A. Schoenflies in Königsberg i./Pr.

Als eines der allgemeinsten Probleme aus der Theorie der Punktmengen kann man die Aufgabe bezeichnen, die grundlegenden Sätze der *Analysis Situs* mengentheoretisch zu formulieren und zu begründen und die Beziehungen darzulegen, die zwischen den *mengentheoretisch-geometrischen* und den *analytischen* Ausdrucksweisen derselben Begriffe und Sätze obwalten. Die paradoxen Resultate, wie sie z. B. in der eineindeutigen Abbildung der Continua und in der Peanoschen Kurve vorliegen, haben die naiven Vorstellungen der Analysis Situs gründlich zerstört. Um so mehr muß man verlangen, daß die Mengentheorie wiederum Ersatz schafft und die geometrischen Grundbegriffe in einer Weise definiert, die ihnen ihren natürlichen für die Analysis Situs charakteristischen Inhalt wieder zurückgibt. Ist auch die vielgeschmähte Anschauung keine Quelle des Beweises, so scheint es mir doch — wenigstens im Gebiet der Analysis Situs — ein Ziel der Forschung zu sein, den Inhalt der geometrischen Definitionen mit dem Anschauungs*inhalt* in Übereinstimmung zu bringen.

Einen ersten Beitrag zur Lösung dieser Aufgabe hat bekanntlich Herr C. Jordan durch seinen Kurvensatz geliefert; einen zweiten ich kürzlich selbst, indem ich zeigte*), in welcher Weise der Kurvensatz des Herrn C. Jordan einer Umkehrung fähig ist. Dieser Satz besagt bekanntlich, daß eine im Intervall $t_0 \cdots t_1$ umkehrbar eindeutige und stetige Beziehung $x = f(t)$ und $y = \varphi(t)$ — falls zu t_0 und t_1 dasselbe Wertepaar x, y gehört — eine Punktmenge bestimmt, die die Ebene in ein Äußeres und ein Inneres teilt. Es erweist sich aber *nicht jede* Punktmenge, die die Ebene in ein Äußeres und ein Inneres teilt, als eine stetige Kurve. Der *geometrische* Begriff der *Gebietsgrenze*, die eine Scheidung der Ebene in zwei getrennte Gebiete bewirkt, kann daher *nicht* als Äquivalent der *analytischen Stetigkeit* angesehen werden. Er ist vielmehr der weitere; um ihn in den engeren Begriff der stetigen Kurve überzuführen, muß man zu ihm, wie ich a. a. O. zeigte, eine wesentliche Bedingung hinzufügen.

---

*) Nachr. d. Göttinger Ges. d. Wiss. 1902.

Was diese Bedingung betrifft, so kann man sie als eine Verallgemeinerung derjenigen *axiomatischen* Tatsache ansehen, die dem *Dedekindschen Schnittprinzip* zu Grunde liegt. Dieses Prinzip, das eine eineindeutige Beziehung zwischen dem Zahlenkontinuum und den Punkten einer Geraden herstellt, löst damit für den elementaren Fall einer Geraden die gleiche Aufgabe, die hier für eine beliebige Kurve behandelt wird; es ist geometrisch damit äquivalent, daß zwei auf verschiedenen Seiten einer Geraden liegende Punkte durch ihre Verbindungslinie stets *einen und nur einen* Punkt der Geraden ausschneiden. Die Eigenschaft, die für diejenigen Punktmengen erfüllt sein muß, über die Werte eines Parameters stetig und eineindeutig verteilt werden sollen, ist hiervon die genaue Verallgemeinerung. Sie verlangt, daß zwei auf verschiedenen Seiten der Punktmenge liegende Punkte durch einen Streckenzug verbindbar sind, der *einen und nur einen* Punkt der Punktmenge enthält. Dieser Punkt ist alsdann wieder der *Schnitt* der bezüglichen Kurve mit dem Streckenzug.

Der eben erwähnte Streckenzug kann eine unendliche Zahl von Strecken enthalten; er besitzt aber dann nur *einen einzigen* Grenzpunkt, nämlich den Kurvenpunkt selbst. Das Auftreten solcher Streckenzüge wird verständlich, wenn man beachtet, wie umfassend die Kurvenklasse ist, auf die sich der fragliche Satz bezieht. So gehören zu ihnen auch diejenigen, die aus funktionentheoretischen Fundamentalbereichen ableitbar sind, indem man diese Bereiche den zugehörigen Substitutionen unterwirft; vorausgesetzt nur, daß hierdurch eine Teilung der Ebene in zwei Gebiete der genannten Art entsteht*).

Im Folgenden gebe ich eine ausführliche Darlegung dieser Dinge, die in vieler Hinsicht von dem Beweisgang, den ich in meiner Note befolgte, abweicht, übrigens inhaltlich in vielen Punkten über sie hinausgeht. Ich gehe von den Eigenschaften des einfachen Polygons als geometrischer Grundlage aus und bestimme die bezüglichen Punktmengen so, daß sie sich als natürliche Verallgemeinerungen des einfachen Polygons ergeben.

Wenn die ausführliche Darlegung etwas umständlich ausgefallen ist, so liegt dies an zwei Umständen. Da man nämlich von einer rein geometrischen, resp. mengentheoretischen Problemstellung ausgeht, so entbehrt man die einfachen Hülfsmittel, über die die Analysis verfügt, und hat die ihnen entsprechenden Tatsachen aus den axiomatischen Grundlagen der Geometrie und der Mengenlehre erst abzuleiten. Um dies durchzuführen, konstruiere ich eine Punktmenge, die mit Bezug auf die gegebene überall dicht ist und zu ihr dieselbe Stellung einnimmt, wie die endlichen Dezimal-

*) Ein vorzügliches Beispiel bildet die von Herrn Fricke untersuchte Kurve, die aus einem Kreisbogenvierseit als Fundamentalbereich entsteht. Vgl. diese Annalen, Bd. 44, S. 584 ff.

brüche zur Gesamtheit aller Zahlen. Ich gelange zu ihr mittelst der oben genannten Streckenzüge, die von einem inneren Punkte zu gewissen Kurvenpunkten hinlaufen und sich um ihn immer mehr verdichten. Die zweite Schwierigkeit besteht darin, daß die Natur der verschiedenen Punktmengen außerordentlich mannigfach ist; erst eine allmähliche Analyse aller Möglichkeiten führt auf diejenigen Mengen, die als die einfachsten Typen anzusehen sind, und sich als stetige Kurven in dem obigen Sinne erweisen. Gerade hierin liegt aber die Schwierigkeit des Beweises. Denn der Beweisgang muß auch die Natur derjenigen Punktmengen erkennen lassen, die der oben eingeführten Bedingung *nicht* genügen; er muß ferner erkennen lassen, warum für diese Punktmengen die Umkehrung des Jordanschen Satzes nicht zutrifft.

In gewisser Hinsicht berühren sich die folgenden Untersuchungen auch mit dem Inhalt des von Herrn Hilbert unlängst veröffentlichten Aufsatzes: *Über die Grundlagen der Geometrie**). Dort wird die Umkehrung des Jordanschen Kurvensatzes für einen speziellen Fall (den sogenannten „wahren Kreis“) ebenfalls bewiesen. Freilich ist der Ausgangspunkt hier und dort wesentlich verschiedener Art. Während bei den folgenden Untersuchungen nur elementare geometrische Hilfsmittel angewandt werden, und die analytische Darstellung das letzte Ziel der Untersuchung bildet, operiert Herr Hilbert von vornherein mit den umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformationen der Zahlenebene in sich. Aus ihnen scheidet er mittelst gewisser Axiome die „Bewegungen“ aus, und beweist mit Hilfe dieser Axiome, daß alle Lagen, in die ein Punkt durch diejenigen „Drehungen“ übergeht, bei denen ein Punkt fest bleibt, eine Jordansche Kurve bilden (den „wahren Kreis“), die stetig und eineindeutig auf den gewöhnlichen Kreis abbildbar ist. Dies beruht wesentlich darauf, daß der wahre Kreis in einfacher Weise durch die Punkte eines gewöhnlichen Kreises bestimmt ist. Im übrigen spielen auch im Hilbertschen Beweis die Wege, die einen äußeren oder inneren Punkt mit den Punkten des wahren Kreises verbinden, eine wichtige Rolle. Während aber bei ihm die Existenz solcher Wege eine fast unmittelbare Folge seiner Annahmen über die Abbildung ist, ist bei der vorliegenden Untersuchung die Punktmenge *nur* durch die Eigenschaften der Gebietsteilung gegeben; die den Wegen entsprechenden Streckenzüge sowie die auf der Kurve durch sie bestimmte Teilmenge müssen daher konstruktiv Schritt für Schritt erzeugt werden**). Gerade diese konstruktive Erzeugung sowie der Nachweis der aus ihr fließenden, für den Beweisgang nötigen Eigenschaften bilden eine Hauptaufgabe der folgenden Darlegung.

*) Diese Annalen, Bd. 56, S. 381.

**) Dies geschieht hier im wesentlichen ebenso, wie in der S. 195 zitierten Note.

§ 1.

Einige Sätze über ebene Polygone.

Sind $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ beliebige Punkte, so soll die Gesamtheit der Strecken $A_1 A_2, A_2 A_3, \cdots, A_{n-1} A_n$ als *Streckenzug* oder *Weg* bezeichnet werden. Falls der Streckenzug sich nicht selber kreuzt, möge er *einfach* heißen. Fällt der Endpunkt des Streckenzuges mit dem Anfangspunkt zusammen, so heißt er *geschlossen;* er bildet dann ein *Polygon.* Das Polygon heißt *einfach*, wenn der Streckenzug ein einfacher ist. Alle Polygone, von denen im Folgenden die Rede sein wird, liegen ganz im *endlichen* Gebiet*).

Eine grundlegende Eigenschaft eines einfachen Polygons ist die, daß es die Ebene in ein *Äußeres* und ein *Inneres* zerlegt. Wird ein *einfacher* Weg, der entweder ganz oder doch abgesehen von seinen Endpunkten dem Inneren oder Äußeren des Polygons angehört, als *innerer*, resp. *äußerer Weg* bezeichnet, so lautet der Satz, der die bezügliche Eigenschaft ausdrückt, in ausführlicher Darstellung folgendermaßen:

I. *Jedes einfache ebene Polygon* $\mathfrak{P}$ *bestimmt in der Ebene* $\mathfrak{E}$ *drei Punktmengen, nämlich die Punkte des Polygons* $\mathfrak{P}$, *die Menge* $\mathfrak{A}$ *der äußeren Punkte und die Menge* $\mathfrak{J}$ *der inneren Punkte, sodaß*

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{P} + \mathfrak{A} + \mathfrak{J}$$

ist, und folgende Beziehungen statthaben: 1) *Je zwei Punkte von* $\mathfrak{J}$ *oder* $\mathfrak{A}$ *lassen sich durch einen einfachen inneren resp. äußeren Weg verbinden, und umgekehrt.* 2) *Auch jeder Punkt von* $\mathfrak{P}$ *läßt sich mit jedem Punkt von* $\mathfrak{J}$ *oder* $\mathfrak{A}$ *durch einen einfachen inneren oder äußeren Weg verbinden; jeder Punkt von* $\mathfrak{A}$ *läßt sich daher mit jedem Punkt von* $\mathfrak{J}$ *durch einen Weg verbinden, der nur einen Punkt von* $\mathfrak{P}$ *enthält.*

Aus diesem Satz folgt noch, daß zwei Wege, die denselben Punkt von $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{J}$ mit demselben Polygonpunkt verbinden, niemals einen weiteren Polygonpunkt einschließen.

Auf den Beweis**) gehe ich nicht näher ein; dagegen ist es für das Folgende nützlich, zu zeigen, wie man die im Satz genannten Wege wirklich ausführen kann.

Auf zwei beliebigen Strecken, die keinen Punkt gemein haben, gibt

---

*) Eine wesentliche Beschränkung ist hierin nicht enthalten. Die Transformation mittelst reziproker Radien kann eine gegebene Punktmenge in eine andere überführen, die im Endlichen liegt, und im Sinn der Analysis situs mit der ersten gleichwertig ist.

**) Wie Herr Hilbert kürzlich hervorgehoben hat, beruht der vorstehende Satz auf der *axiomatischen* Tatsache, daß eine unbegrenzte Gerade die Ebene in zwei durch sie getrennte Gebiete zerlegt; vgl. Grundlagen der Geometrie, S. 7.

es ein Punktepaar, dessen Abstand ein Minimum ist. Ein solches Minimum existiert daher auch für je zwei nicht anstoßende Seiten des Polygons $\mathfrak{P}$. Ist δ das kleinste von ihnen, so ziehe man im Abstand $\varepsilon < 1/_2 \delta$ zu jeder Polygonseite eine äußere Parallele und schlage um jede konvexe Ecke von $\mathfrak{P}$ einen Kreis mit dem Radius ε, so bilden diese Parallelen mit den innerhalb jedes Kreises liegenden Verbindungslinien ihrer Berührungspunkte ein einfaches Polygon $\mathfrak{P}_a$, das im Äußern von $\mathfrak{P}$ verläuft. Analog kann man mittelst innerer Parallelen und der um die konkaven Ecken geschlagenen Kreise ein einfaches Polygon $\mathfrak{P}_i$ konstruieren, das im Innern von $\mathfrak{P}$ verläuft. Beide Polygone haben die Eigenschaft, daß keiner ihrer Punkte von $\mathfrak{P}$ um mehr als ε entfernt ist.

Sind nun a_1 und a_2 zwei äußere Punkte, die mindestens den Abstand η von $\mathfrak{P}$ haben, so zeichne man ein Polygon $\mathfrak{P}_a$, sodaß $\varepsilon < \eta$ und $\varepsilon < 1/_2 \delta$ ist, und ziehe einen einfachen Streckenzug, der von a_1 nach a_2 führt. Enthält er keinen Punkt von $\mathfrak{P}$, so ist er von selbst ein äußerer Weg. Enthält er dagegen einen Punkt von $\mathfrak{P}$, so kreuzt er notwendig auch $\mathfrak{P}_a$; ist a' der erste und a'' der letzte Kreuzungspunkt, so ersetze man das zwischen a' und a'' gelegene Wegstück durch denjenigen Teil des Polygons $\mathfrak{P}_a$, der von a' bis a'' reicht. Der so modifizierte Streckenzug ist dann ein äußerer Weg. Analog verfährt man mit zwei inneren Punkten. Endlich kann man mittelst der Polygone $\mathfrak{P}_a$ und $\mathfrak{P}_i$ auch erreichen, daß ein von einem äußeren zu einem inneren Punkt führender Weg das Polygon nur einmal und zwar an einer beliebig gegebenen Stelle trifft.

Die im Satz I. enthaltenen Eigenschaften sind, soweit das Gebiet der *Analysis situs* in Frage kommt, für den Polygonbegriff grundlegend. Insbesondere fließen aus ihm die bekannten Folgerungen über Teilung, Zusammensetzung und Kreuzung von Polygonen. Ihr Bestehen soll daher als *charakteristisches Merkmal* aller derjenigen Punktmengen angesehen werden, die ich als *Verallgemeinerungen des Polygonbegriffs* einführe. Es gelten dann auch für diese Punktmengen alle die ebengenannten Folgerungen, deren alleinige Quelle der Satz I. ist.

Die nächste Verallgemeinerung des Polygonbegriffs, die ich vornehme, besteht darin, daß die Seitenzahl unendlich groß wird. Um dies durchzuführen, leite ich zuvor einen Hülfsatz über ebene Polygone ab (§ 2). Abgesehen von Satz I. und den eben genannten aus ihm fließenden Folgerungen benutzt er noch die Tatsache, daß bei jedem ein Polygon kreuzenden Streckenzuge die Kreuzungspunkte in *Eintritts-* und *Austrittspunkte* geschieden werden können, und deren gegenseitige Beziehungen.

§ 2.

Beweis eines Hülfsatzes über ebene Polygone.

Sei $\mathfrak{q}$ ein Quadrat mit dem Mittelpunkt O, und A, L, L' Punkte außerhalb $\mathfrak{q}$. Man zeichne (Fig. 1) zwei einfache Streckenzüge

$$\mathfrak{l} = AB \cdots L \quad \text{und} \quad \mathfrak{l}' = AB' \cdots L'$$

und nehme innerhalb von $\mathfrak{q}$ zwei Punkte M und M' in der Weise an, daß $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ mit MOM' ein *einfaches* Polygon

$$\mathfrak{p} = AB \cdots LMOM'L' \cdots B'A$$

bestimmen, von dem keine Ecke auf $\mathfrak{q}$ fällt. Im übrigen kann dieses Polygon das Quadrat beliebig oft kreuzen. Die Schnittpunkte von LM und $L'M'$ mit $\mathfrak{q}$ seien Q und Q'.

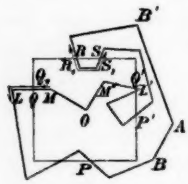


Fig. 1.

Wir verbinden die Punkte A und O durch einen in Bezug auf $\mathfrak{p}$ *inneren* Weg $A \cdots O$. Dieser Weg kreuzt das Quadrat $\mathfrak{q}$ entweder nur einmal, oder es gibt einen Punkt, in dem er $\mathfrak{q}$ zum letzten Mal kreuzt. Sei K der Kreuzungspunkt und PP' dasjenige notwendig existierende Intervall von $\mathfrak{q}$, das K enthält, sodaß P auf dem Streckenzug $\mathfrak{l}$, P' auf $\mathfrak{l}'$ liegt und PP' keinen weiteren Punkt von $\mathfrak{p}$ enthält. Dadurch wird ein Polygon

$$\mathfrak{P} = AB \cdots PP' \cdots B'A$$

bestimmt, das, weil K, also auch die Punkte von PP' innere Punkte von $\mathfrak{p}$ sind, ein Teilpolygon von $\mathfrak{p}$ ist. Es gehört daher O, und damit auch der Streckenzug MOM', zu den *äußeren* Punkten des Polygons $\mathfrak{P}$. Da ferner der von A nach O führende Weg bei K in $\mathfrak{q}$ eintritt, so folgt, daß auch der Streckenzug $\mathfrak{l}$ bei P in $\mathfrak{q}$ *eintritt*, und ebenso $\mathfrak{l}'$ bei P'.

Die Punkte Q und Q' zerlegen $\mathfrak{q}$ in zwei Teile. Einer von ihnen ist dadurch definiert, daß die inneren Punkte von PP' ihm *nicht* angehören; wir bezeichnen ihn durch $\mathfrak{q}'$. Wird er von den Streckenzügen $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ nicht gekreuzt, so besteht er aus lauter *äußeren* Punkten von $\mathfrak{p}$. Dies ist unmittelbar klar, falls P und P' mit Q und Q' identisch sind. Ist aber P von Q verschieden, so folgt es daraus, daß der Streckenzug $\mathfrak{l}$ sowohl bei P, wie auch bei Q in das Quadrat $\mathfrak{q}$ eintritt. Wird dagegen $\mathfrak{q}'$ von $\mathfrak{l}$ oder $\mathfrak{l}'$ gekreuzt, und ist R der erste Kreuzungspunkt von Q aus, so folgert man zunächst wieder, daß QR eine äußere Strecke für $\mathfrak{p}$ ist. Der bei R in $\mathfrak{q}$ eintretende Streckenzug wird dann $\mathfrak{q}$ in einem Punkt S verlassen, der notwendig auf $\mathfrak{q}'$ liegt; denn sonst müßte er den Streckenzug $QMOM'Q'$ kreuzen, was ausgeschlossen ist. Es sind dann entweder alle Punkte von SQ' äußere Punkte von $\mathfrak{p}$, oder es gibt ein in S beginnendes Intervall ST dieser Art, sodaß wieder T ein Kreuzungspunkt

von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ ist, und der bei T in $\mathfrak{q}$ eintretende Streckenzug in einem Punkt U austritt, der auf $\mathfrak{q}$ zwischen S und Q' enthalten ist, usw.

Nun sei δ der kleinste Abstand der Streckenzüge $L \cdots A \cdots L'$ und MOM', so konstruiere man auf die in § 1 angegebene Weise mit $\varepsilon < \frac{1}{2}\delta$ das Polygon $\mathfrak{p}_a$. Dieses mag die auf $\mathfrak{q}'$ gelegenen äußeren Strecken QR, $ST, \cdots$ in Q_1, R_1, S_1, T_1, U_1, $\cdots$ schneiden. Alsdann bestimmen die von R_1 bis S_1, von T_1 bis U_1 $\cdots$ reichenden Streckenzüge dieses Polygons $\mathfrak{p}_a$ nebst den Strecken QR_1, S_1T_1, $\cdots$ und dem Streckenzug $QL \cdots A \cdots L'Q'$ ein einfaches Polygon

$$\mathfrak{Q} = A \cdots LQR_1 \cdots S_1T_1 \cdots Q'L' \cdots A,$$

von dem klar ist, daß $\mathfrak{p}$ ein Teilpolygon von ihm ist; denn der ganze Streckenzug $QR_1 \cdots S_1T_1 \cdots Q'$ besteht, von den Endpunkten abgesehen, aus äußeren Punkten von $\mathfrak{p}$. Es ist daher O ein *innerer* Punkt von $\mathfrak{Q}$.

Da $\mathfrak{p}$ Teilpolygon von $\mathfrak{Q}$ ist und $\mathfrak{P}$ Teilpolygon von $\mathfrak{p}$, so ist auch $\mathfrak{P}$ Teilpolygon von $\mathfrak{Q}$. Aus der Definition von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ ist daher ersichtlich, daß das Polygon $\mathfrak{R}$, das $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{Q}$ ergänzt, definiert ist durch

$$\mathfrak{R} = P \cdots LQR_1 \cdots S_1T_1 \cdots Q'L' \cdots P',$$

und daß auch für $\mathfrak{R}$ der Punkt O ein *innerer* Punkt ist.

Die vorstehenden Betrachtungen beruhen, insoweit das Polygon $\mathfrak{p}$ in Betracht kommt, ausschließlich darauf, daß man mit zwei einfachen Streckenzügen

$$ML \cdots A \cdots L'M' \quad \text{und} \quad MOM'$$

operiert, die einander nicht kreuzen und der Bedingung genügen, daß A, L, L' außerhalb und MOM' innerhalb von $\mathfrak{q}$ liegen. Der Verlauf von MOM' innerhalb von $\mathfrak{q}$ kommt jedoch für den Beweis nur insofern in Frage, daß dieser Streckenzug durch O gehen muß.

Die erhaltenen Resultate können daher auch als Eigenschaften der Streckenzüge

$$AB \cdots LM \quad \text{und} \quad AB' \cdots L'M'$$

angesehen werden. Um in diesem Fall das Intervall PP' zu definieren, kann man folgendermaßen verfahren. Man kann zunächst zeigen, daß sich M mit M' durch einen innerhalb $\mathfrak{q}$ verlaufenden Streckenzug $\mathfrak{l}_1$ verbinden läßt, der mit den beiden gegebenen Streckenzügen ein einfaches Polygon $\mathfrak{p}$ bestimmt, und dann PP', wie vorstehend mittelst $\mathfrak{p}$ definieren. Oder aber man definiere, ohne $\mathfrak{l}_1$ zu zeichnen, PP' als dasjenige Intervall von $\mathfrak{q}$, das mit den Streckenzügen $A \cdots P$ und $A \cdots P'$ ein einfaches Polygon $\mathfrak{P}$ bestimmt, das den Punkt A enthält, und, falls es mehrere solche Polygone gibt, so ist $\mathfrak{P}$ dasjenige, das alle andern als Teilpolygone enthält. Mit PP' ist dann wieder der Teil $\mathfrak{q}'$ von $\mathfrak{q}$ bestimmt. Was ferner $\mathfrak{Q}$ betrifft, so beruht seine Bestimmung nur auf der Existenz

einer Größe δ und der Möglichkeit, von dem Polygon $\mathfrak{p}_a$ die von R_1 bis S_1, von T_1 bis $U_1 \cdots$ reichenden Streckenzüge zu konstruieren.

Hiervon werden wir in § 3 Gebrauch zu machen haben.

§ 3.
Die Polygone mit unendlich vielen Seiten.

Es handelt sich jetzt darum, den Polygonbegriff auf den Fall auszudehnen, daß die Zahl der Seiten über alle Grenzen wächst.

Sei also

$$\{A_\nu\} = A_1, A_2, A_3, \cdots, A_\nu, \cdots$$

eine Menge unendlich vieler Punkte, so soll die Gesamtheit der Strecken $A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_\nu A_{\nu+1}, \cdots$ wiederum als *Streckenzug* bezeichnet werden.

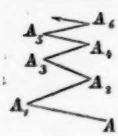


Fig. 2.

Er heißt *einfach*, falls nur je zwei aneinander grenzende Strecken einen gemeinsamen Punkt besitzen. Dieser Streckenzug hat mindestens einen Grenzpunkt; er kann aber auch unendlich viele haben, die sogar eine beliebige Kurve ausmachen können, und die wir zu dem Streckenzug hinzurechnen.

Die nebenstehenden Beispiele sollen eine Vorstellung von der großen Mannigfaltigkeit solcher Streckenzüge geben. In Fig. 2 bilden die Häufungspunkte ein Stück einer Geraden g, in Fig. 3 erfüllen sie den Umfang eines Quadrats; man kann diese Beispiele auch so modifizieren, daß die Strecken mit wachsendem ν beliebig klein werden.

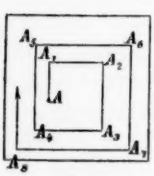


Fig. 3.

Auch diese Streckenzüge lassen sich so kombinieren, daß die von ihnen gebildete Figur, wie das einfache Polygon, die Ebene in ein Äußeres und ein Inneres teilt. Für den Streckenzug von Fig. 2 kann dies z. B. so geschehen, daß man ihn zunächst an g spiegelt, und die so entstandene Figur noch einmal an der Geraden, die A mit dem aus ihm entstandenen Spiegelbild verbindet. Die so entstandene Punktmenge soll jedoch *nicht* als Verallgemeinerung des Polygonbegriffes betrachtet werden, da sie nicht den sämtlichen Eigenschaften von Satz I. genügt. Es ist unmöglich einen auf g enthaltenen Punkt p der Punktmenge mit einem inneren oder äußeren Punkt durch einen Streckenzug zu verbinden, der außer p nur innere oder äußere Punkte enthält.

Aus diesem Grunde beschränken wir uns im Folgenden auf solche Streckenzüge, die nur *einen einzigen* Grenzpunkt A_ω besitzen; er ist dann auch Grenzpunkt der Punktmenge $\{A_\nu\}$, *Nur diese Streckenzüge bezeichnen wir von jetzt an als Wege*, und falls sie sich nicht selber kreuzen, als *einfache Wege*. Bei einem einfachen Weg soll auch ausgeschlossen

sein, daß der Punkt A_ω in eine Seite $A_\nu A_{\nu+1}$ hineinfällt. Die Punkte A_1 und A_ω bilden den *Anfangspunkt* und den *Endpunkt* des Weges. Eine *endliche Länge* braucht jedoch ein solcher Weg *nicht* zu besitzen*).

Zwei derartige einfache Wege, die von demselben Anfangspunkt zu demselben Endpunkt laufen, die einander nicht kreuzen und von denen jeder aus einer endlichen oder unendlichen Zahl von Strecken besteht, bezeichne ich nunmehr allgemein als *einfaches Polygon*. Auf sie kann nämlich der Satz I. vollinhaltlich übertragen werden. Naturgemäß kann dies nur so bewiesen werden, daß man stets mit Polygonen von endlicher Seitenzahl operiert; diese sollen, falls es zur Unterscheidung nötig ist, auch als *gewöhnliche* Polygone bezeichnet werden.

Seien also

$$\mathfrak{L} = A A_1 A_2 \cdots A_\omega \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}' = A A_1' A_2' \cdots A_\omega$$

zwei einfache Wege, die zusammen das einfache Polygon

$$\mathfrak{P} = A A_1 \cdots A_\omega \cdots A_1' A$$

bilden. Man lege (Fig. 4) um A_ω als Mittelpunkt ein Quadrat $\mathfrak{q}_1$, das durch keine Ecke von $\mathfrak{P}$ hindurchgeht; überdies soll A außerhalb von $\mathfrak{q}_1$ liegen. Die letzten Schnittpunkte von $\mathfrak{q}_1$ mit $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ seien Q_1 und Q_1', und es falle Q_1 in die Seite $A_\lambda A_{\lambda+1}$ und Q_1' in die Seite $A_\varrho' A_{\varrho+1}'$; ferner seien

$$\mathfrak{l}_1 = A A_1 \cdots A_\lambda \quad \text{und} \quad \mathfrak{l}_1' = A A_1' \cdots A_\varrho'$$

die von A nach A_λ und A_ϱ' gehenden Teile von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$. Auf sie können wir dann die Betrachtungen von § 2 anwenden. Gemäß § 2 bestimmen wir auf ihnen zwei auf $\mathfrak{q}_1$ liegende Punkte P_1 und P_1' und damit ein Polygon

$$\mathfrak{P}_1 = P_1 \cdots A_1 A A_1' \cdots P_1',$$

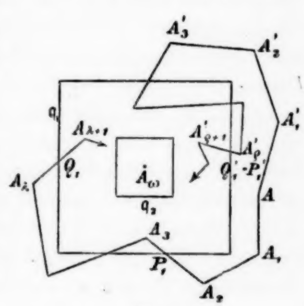


Fig. 4.

sodaß $A_{\lambda+1}$, $A_{\varrho+1}'$ und A_ω zu den *äußeren* Punkten von $\mathfrak{P}_1$ gehören.

Wenn δ den kleinsten Abstand der beiden Streckenzüge

$$A_\lambda \cdots A \cdots A_\varrho' \quad \text{und} \quad A_{\lambda+1} \cdots A_\omega \cdots A_{\varrho+1}'$$

bedeutet, so kann man, wie in § 2, zu denjenigen Teilen von $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_1'$, die innerhalb von $\mathfrak{q}_1$ liegen, mit $\varepsilon < \frac{1}{2}\delta$ die zugehörigen äußeren Streckenzüge konstruieren, und erhält somit wieder das einfache Polygon

$$\mathfrak{Q}_1 = A \cdots A_\lambda Q_1 R_1 \cdots S_1 T_1 \cdots Q_1' A_\varrho' A.$$

Für dieses Polygon sind $A_{\lambda+1}$, $A_{\varrho+1}'$ und A_ω *innere* Punkte.

*) Die Punkte

$$x = 1/n, \quad y = (-1)^n \cdot 1/n \qquad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

durch Strecken verbunden, liefern einen solchen Weg.

Endlich ist wieder

$$\mathfrak{R}_1 = P_1 \cdots A_\lambda Q_1 R_1 \cdots S_1 T_1 \cdots Q_1' A_\varrho' \cdots P_1'$$

dasjenige Polygon, das $\mathfrak{P}_1$ zu $\mathfrak{Q}_1$ ergänzt; es ist daher A_ω *innerer* Punkt auch von $\mathfrak{R}_1$. Aus der Definition von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ ist überdies klar, daß beide den Streckenzug $P_1 \cdots A \cdots P_1'$ enthalten.

Aus der Bestimmung von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ folgt weiter, daß der Abstand des Punktes A_ω von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ größer als $1/2\,\delta$ ist. Man kann daher um A_ω als Mittelpunkt ein zu $\mathfrak{q}_1$ paralleles Quadrat $\mathfrak{q}_2$ so legen, daß $\mathfrak{q}_2$ innerhalb $\mathfrak{Q}_1$ und außerhalb $\mathfrak{P}_1$ liegt; es genügt, die Seite von $\mathfrak{q}_2$ kleiner als $1/2\,\delta\sqrt{2}$ zu nehmen. Wir wählen $\mathfrak{q}_2$ überdies so, daß $A_{\lambda+1}$ und $A'_{\varrho+1}$ zu seinen äußeren Punkten gehören. Mit diesem Quadrat kann man ebenso operieren, wie mit $\mathfrak{q}_1$ und gelangt dadurch zu den drei Polygonen

$$\mathfrak{P}_2 = P_2 \cdots A_1 A A_1' \cdots P_2',$$
$$\mathfrak{Q}_2 = A \cdots A_\mu Q_2 R_2 \cdots S_2 T_2 \cdots Q_2' A_\sigma' \cdots A,$$
$$\mathfrak{R}_2 = P_2 \cdots A_\mu Q_2 R_2 \cdots S_2 T_2 \cdots Q_2' A_\sigma' \cdots P_2',$$

wo $\mu > \lambda$ und $\sigma > \varrho$ ist und $A_\mu A_{\mu+1}$, resp. $A_\sigma' A_{\sigma+1}'$ die letzte Strecke der Streckenzüge $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$, die $\mathfrak{q}_2$ kreuzt. Diese drei Polygone besitzen zu A_ω und zueinander die nämlichen Beziehungen, wie $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{R}_1$. Insbesondere enthalten $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{Q}_2$ beide den Streckenzug $P_2 \cdots A \cdots P_2'$. Ferner aber ist $\mathfrak{P}_1$ Teilpolygon von $\mathfrak{P}_2$, da $\mathfrak{P}_2$ eine Strecke von $\mathfrak{q}_2$ enthält, und $\mathfrak{q}_2$ außerhalb von $\mathfrak{P}_1$ liegt; ebenso folgt, daß $\mathfrak{Q}_2$ Teilpolygon von $\mathfrak{Q}_1$ ist. Was schließlich $\mathfrak{R}_2$ betrifft, so zeigt man leicht, daß es innerhalb des Quadrates $\mathfrak{q}_1$ liegt. Von dem Streckenzug $Q_2 R_2 \cdots Q_2'$ ist es unmittelbar klar, denn er liegt gemäß seiner Definition (§ 2) entweder auf $\mathfrak{q}_2$ oder innerhalb $\mathfrak{q}_2$. Da nun A_ω gemäß Festsetzung von dem Streckenzug $A_\lambda \cdots A \cdots A_\varrho'$ mindestens den Abstand δ besitzt, so können die auf $\mathfrak{q}_2$ liegenden Punkte P_2 und P_2' diesem Streckenzug nicht angehören. Sie liegen daher auf $A_\lambda \cdots A_\omega \cdots A_\varrho'$, und da $A_\lambda A_{\lambda+1}$ und $A_\varrho' A_{\varrho+1}'$ außerhalb von $\mathfrak{q}_2$ liegen, auf $A_{\lambda+1} \cdots A_\omega \cdots A_{\varrho+1}'$. Dieser Streckenzug liegt aber nach Festsetzung innerhalb von $\mathfrak{q}_1$, denn $A_\lambda A_{\lambda+1}$ und $A_\varrho' A_{\varrho+1}'$ sind die letzten Strecken von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$, die $\mathfrak{q}_1$ schneiden. Daher liegt auch $P_2 \cdots A_\mu Q_2$ und $P_2' \cdots A_\sigma' Q_2'$ innerhalb von $\mathfrak{q}_1$, also auch $\mathfrak{R}_2$ selbst.

In dieser Weise kann man fortfahren, indem man eine gegen A_ω konvergierende Reihe von Quadraten

$$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3, \cdots, \mathfrak{q}_\nu, \cdots$$

benutzt. Man erhält durch sie drei Reihen von Polygonen

$$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_\nu, \cdots,$$
$$\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \cdots, \mathfrak{Q}_\nu, \cdots,$$
$$\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \cdots, \mathfrak{R}_\nu, \cdots,$$

sodaß je zwei Polygone $\mathfrak{P}_\nu$, $\mathfrak{P}_{\nu+1}$ und $\mathfrak{Q}_\nu$, $\mathfrak{Q}_{\nu+1}$ in der oben angegebenen Beziehung zueinander stehen und $\mathfrak{R}_{\nu+1}$ innerhalb $\mathfrak{q}_\nu$ liegt. Aus der Konstruktion dieser Polygone geht überdies hervor, daß für irgend einen von A_ω verschiedenen Punkt p von $\mathfrak{P}$ stets ein kleinster Index τ existiert, sodaß p den Polygonen $\mathfrak{P}_\tau$ und $\mathfrak{Q}_\tau$ als Polygonpunkt angehört.

Mit Hülfe dieser Polygone beweisen wir den folgenden Satz:

II. *Ist $\mathfrak{P}$ ein einfaches Polygon mit unendlich vielen Seiten, haben $\mathfrak{P}_\lambda$ und $\mathfrak{Q}_\lambda$ die oben angegebene Bedeutung, ist ferner $\mathfrak{J}$ die Menge der Punkte, die für irgend ein λ innere Punkte eines Polygons $\mathfrak{P}_\lambda$, also auch aller Polygone $\mathfrak{P}_{\lambda+\nu}$ sind, und $\mathfrak{A}$ die Menge aller Punkte, die für irgend ein λ äußere Punkte eines Polygons $\mathfrak{Q}_\lambda$ und damit auch aller Polygone $\mathfrak{Q}_{\lambda+\nu}$ sind, so genügen diese Mengen der Gleichung*

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{P} + \mathfrak{A} + \mathfrak{J}$$

und es gilt für sie der Satz I. *des* § 1.

Aus der Definition der Polygone $\mathfrak{P}_\lambda$, $\mathfrak{Q}_\lambda$, $\mathfrak{R}_\lambda$ folgt zunächst, daß jeder Punkt, der *nicht* dem Polygon $\mathfrak{P}$ angehört, für jedes λ entweder dem Innern oder dem Umfang von $\mathfrak{P}_\lambda$ und damit dem *Innern* von $\mathfrak{P}_{\lambda+1}$, oder dem Äußern resp. dem Umfang von $\mathfrak{Q}_\lambda$, also auch dem *Äußern* von $\mathfrak{Q}_{\lambda+1}$, oder aber dem *Innern* von $\mathfrak{R}_\lambda$ angehört. Punkte, die weder zu $\mathfrak{P}$, noch zu $\mathfrak{J}$, noch auch zu $\mathfrak{A}$ gehören, können daher an sich nur solche sein, die für *jedes* λ innere Punkte von $\mathfrak{R}_\lambda$ sind. Da aber $\mathfrak{R}_\lambda$ innerhalb von $\mathfrak{q}_{\lambda-1}$ liegt, so sind diese Punkte zugleich innere Punkte aller $\mathfrak{q}_\lambda$; es giebt aber nur einen solchen Punkt, nämlich A_ω. Da nun A_ω zu $\mathfrak{P}$ gehört, so ist damit die obige Gleichung erwiesen.

Sind nun i' und i'' zwei Punkte von $\mathfrak{J}$, so existiert ein erstes Polygon $\mathfrak{P}_\varrho$, dem beide als innere Punkte angehören. Sie sind mithin durch einen Weg verbindbar, der innerhalb $\mathfrak{P}_\varrho$ liegt und daher zu $\mathfrak{J}$ gehört. Sind a' und a'' Punkte von $\mathfrak{A}$, so gibt es ein erstes Polygon $\mathfrak{Q}_\sigma$, außerhalb dessen sie liegen; sie sind daher durch einen Weg verbindbar, der außerhalb von $\mathfrak{Q}_\sigma$ verläuft, also zu $\mathfrak{A}$ gehört. Ist p ein von A_ω verschiedener Punkt von $\mathfrak{P}$, und i ein Punkt von $\mathfrak{J}$, so gibt es ein erstes Polygon $\mathfrak{P}_\tau$, sodaß i innerhalb und p auf $\mathfrak{P}_\tau$ liegt, woraus die bezügliche Verbindbarkeit von p mit i folgt; ebenso folgt sie für p und einen Punkt von $\mathfrak{A}$. Ist endlich p mit A_ω identisch, und i ein Punkt von $\mathfrak{J}$, der innerer Punkt von $\mathfrak{P}_\tau$, also auch aller $\mathfrak{P}_{\tau+\nu}$ ist, so betrachte man die auf den Quadraten $\mathfrak{q}_\tau, \mathfrak{q}_{\tau+1}, \cdots, \mathfrak{q}_{\tau+\nu}$ liegenden Intervalle

$$P_\tau P'_\tau,\; P_{\tau+1}P'_{\tau+1},\; \cdots,\; P_{\tau+\nu},\; P'_{\tau+\nu},\; \cdots$$

und nehme auf ihnen je einen Punkt

$$P''_\tau,\; P''_{\tau+1},\; \cdots,\; P''_{\tau+\nu}$$

an. Man kann dann i mit P_τ'' durch einen Weg verbinden, der innerhalb $\mathfrak{P}_\tau$ liegt, P_τ'' mit $P_{\tau+1}''$ durch einen Weg, der innerhalb $\mathfrak{P}_{\tau+1}$ und außerhalb $\mathfrak{P}_\tau$ liegt, usw. Die Gesamtheit dieser Wege bildet dann einen *inneren Weg*, der nur A_ω als Grenzpunkt enthält. Analog beweist man die Verbindbarkeit von A_ω mit einem Punkt von $\mathfrak{A}$ durch einen *äußeren Weg*.

Der Satz II. läßt sich auch auf solche Polygone ausdehnen, in die eine endliche Zahl von Streckenzügen mit je einem Grenzpunkt eingeht. Doch ist damit die Grenze der Verallgemeinerungsfähigkeit des Polygonbegriffes nicht erreicht.

Es ist ersichtlich, daß die in § 1 erwähnten Sätze über Teilung, Zerlegung und Zusammensetzung von Polygonen auch für die hier betrachteten Polygone in Kraft bleiben.

§ 4.

Einige allgemeine Eigenschaften der Punktmengen.

Die Punktmengen, mit denen wir uns zunächst beschäftigen, sind *abgeschlossen*, sodaß ihre Grenzpunkte ihnen zugehören. Eine solche Menge zerfällt nach einem von Herrn G. Cantor herrührenden Satz*) in eine gewisse *abzählbare* Menge *isolierter* Punkte, und eine *perfekte* Menge. Es genügt daher, zunächst perfekte Mengen in Betracht zu ziehen. Da eine perfekte Menge, die in einem Gebiet *überall dicht* ist, *alle* Punkte des Gebiets enthält, so ist sie durch die Grenze des Gebiets hinlänglich charakterisiert; wir werden daher zunächst nur mit *nirgends dichten* Mengen operieren. Für eine solche existiert kein auch noch so kleines Flächenstück, dessen sämtliche Punkte ihr zugehören. Wir nehmen wieder an, daß die zu betrachtenden Mengen ganz im Endlichen enthalten sind**).

Für diese Mengen sind zunächst einige allgemeine Begriffe und Eigenschaften zu erörtern. Ich beginne mit dem Abstandsbegriff.

Für eine jede abgeschlossene Menge $\mathfrak{T}$ lassen sich bekanntlich *stetige* Funktionen des Orts definieren; alle aus dem Stetigkeitsbegriff fließenden Folgerungen gelten für sie in der gleichen Weise wie für das Kontinuum***). Insbesondere gilt auch der Satz, daß eine stetige Funktion des Orts, die eine obere oder untere Grenze besitzt, an mindestens einer Stelle der

---

*) Math. Ann. 23, S. 463 ff.

**) Vgl. die Anmerkung auf S. 198.

***) Vgl. meinen Bericht über Mengenlehre, Jahresber. d. deutsch. Math. Ver. Bd. 8, 2, S. 115 ff.

Menge $\mathfrak{T}$ ein Maximum resp. ein Minimum erreicht. Dies führt zu folgender Definition des Abstands eines beliebigen Punktes p der Ebene von der Menge $\mathfrak{T}$. Ist t irgend ein Punkt von $\mathfrak{T}$, und $\varrho(p,t)$ der *Abstand von p und t*, so ist $\varrho(p,t)$ eine in $\mathfrak{T}$ *stetige* Funktion, wie aus elementaren geometrischen Tatsachen folgt. Andrerseits gibt es für alle Größen $\varrho(p,t)$ eine untere Grenze, also auch mindestens einen Punkt von $\mathfrak{T}$, für den sie angenommen wird. Den so bestimmten Minimumswert von ϱ bezeichnen wir als *Abstand* $\varrho(p,\mathfrak{T})$ *des Punktes p von* $\mathfrak{T}$. Er ist selbst eine stetige Funktion von p, wie ebenfalls leicht gezeigt wird.

In ähnlicher Weise kann man den Abstand *zweier* abgeschlossener Mengen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ definieren. Sind nämlich t und t' zwei ihrer Punkte, so ist $\varrho(t,t')$ stetige Funktion von t und t'; es gibt daher wieder ein Minimum aller Werte $\varrho(t,t')$, das wir durch $\varrho(\mathfrak{T},\mathfrak{T}')$ bezeichnen und als Abstand der Mengen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ definieren.

Sei nun $\mathfrak{q}$ ein Quadrat, in dem $\mathfrak{T}$ enthalten ist, und $\mathfrak{E}(\mathfrak{q})$ die Menge aller Punkte, die dem Innern und dem Umfang von $\mathfrak{q}$ angehören. Setzt man dann

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{T} + \mathfrak{M}(\mathfrak{q}),$$

so heißt $\mathfrak{M}(\mathfrak{q})$ die *Komplementärmenge* von $\mathfrak{T}$ bezüglich $\mathfrak{q}$. Kürzer bezeichnen wir die Mengen $\mathfrak{E}(\mathfrak{q})$ und $\mathfrak{M}(\mathfrak{q})$ auch durch $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$, schreiben also

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{T} + \mathfrak{M};$$

es kann dann $\mathfrak{E}$ insbesondere auch die sämtlichen Punkte der Ebene bedeuten.

Um einen Punkt m von $\mathfrak{M}$ lege man jetzt ein Quadrat, dessen innere Punkte ebenfalls zu $\mathfrak{M}$ gehören, und lasse es parallel mit sich so wachsen, daß m sein Mittelpunkt bleibt. Da $\varrho(m,\mathfrak{T})$ stetige Funktion von $\mathfrak{T}$ ist, so gibt es unter diesen Quadraten ein größtes, und auf seinem Umfang liegt *mindestens ein Punkt* von $\mathfrak{T}$. Man lasse das Quadrat nun weiter wachsen, doch so, daß diejenigen Seiten, die Punkte von $\mathfrak{T}$ enthalten, *fest bleiben*, und nur die andern sich weiter von m entfernen. Auf diese Weise werden schließlich sämtliche Seiten fest, und es entsteht ein Rechteck, dessen Inneres zu $\mathfrak{M}$ gehört, während auf *jeder* Seite mindestens ein Punkt von $\mathfrak{T}$ liegt. Dieses Rechteck nenne ich *den zu m gehörigen punktfreien Bereich.*

Dabei ist zu bemerken: 1) Fällt beim Wachstum des Quadrats ein Punkt von $\mathfrak{T}$ in eine Ecke, so können *beide* in der Ecke zusammenstoßende Seiten fest werden (Fig. 5), es kann *eine bestimmte* Seite fest werden (Fig. 6), es kann aber auch das weitere Wachstum des Quadrats so erfolgen, daß eine *beliebige* der beiden Seiten fest wird (Fig. 7). Im letzten Fall wähle man eine von ihnen beliebig als festwerdend. Es liegt

dann freilich eine Unbestimmtheit in der Gestalt des Rechtecks vor, doch ist dies ohne Belang. 2) Da $\mathfrak{T}$ im Innern eines Quadrates q liegt, so

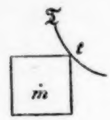


Fig. 5.

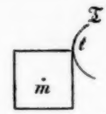


Fig. 6.

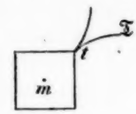


Fig. 7.

kann eine Seite auch dadurch fest werden, daß sie mit einer Seite von q zusammenfällt*).

Der so definierte Bereich hat gemäß seiner Konstruktion die folgenden Eigenschaften:

1) Seine inneren Punkte gehören zu $\mathfrak{M}$. 2) Auf seinem Umfang liegt eine zu $\mathfrak{T}$ gehörige Teilmenge $\mathfrak{T}_m$, die aus einer endlichen oder unendlichen Zahl von Punkten besteht, und sogar die Mächtigkeit des Kontinuums haben kann. 3) *Eine Vergrößerung durch Parallelverschiebung auch nur einer seiner Seiten läßt der Bereich nicht zu.*

Diese Bereiche habe ich bereits in meinem Bericht eingeführt**); sie bilden das Analogon zu den punktfreien Intervallen der linearen Mengen.

§ 5.

Der Begriff des Zusammenhangs.

Der *Zusammenhang* ist sowohl für eine perfekte Menge $\mathfrak{T}$, wie auch für ihre Komplementärmenge $\mathfrak{M}$ zu definieren. Da es sich hier um Eigenschaften allgemeinster Art handelt, so nehme ich $\mathfrak{T}$ zunächst als beliebige perfekte Menge an.

Herr G. Cantor, der allen diesen Dingen zuerst methodisch gerecht geworden ist, benutzt für die Definition des Zusammenhangs den *Abstandsbegriff*. Er definiert eine beliebige Punktmenge T als zusammenhängend***), „wenn für je zwei Punkte t und t' derselben, bei vorgegebener beliebig kleiner Zahl ε immer eine *endliche* Zahl Punkte $t_1, t_2, \cdots t_\nu$ von T auf mehrfache Art vorhanden sind, sodaß die Entfernungen $\overline{tt_1}, \overline{t_1t_2}, \overline{t_2t_3}, \cdots \overline{t_\nu t'}$ sämtlich kleiner sind, als ε.“ Wenn nun auch der Abstand zweier Punkte für die hier vorliegenden Untersuchungen einen axiomatischen geometrischen

*) Der an sich mögliche Fall, daß eine Seite eines neuen Bereiches an eine Seite eines schon vorhandenen stößt, ist hier ausgeschlossen; vgl. § 8.

**) a. a. O. S. 81 ff.

***) Math. Ann. Bd. 21, S. 575.

Grundbegriff bildet, so scheint es mir doch zweckmäßig, rein mengentheoretische Definitionen überall da zu bevorzugen, wo es möglich ist, besonders aber, wenn ihnen der Vorzug theoretischer Einfachheit zukommt. Eine solche Definition ist für eine perfekte Menge $\mathfrak{T}$ möglich; ich definiere nämlich:

Eine perfekte Menge $\mathfrak{T}$ heißt zusammenhängend, wenn sie nicht in Teilmengen zerlegbar ist, deren jede perfekt ist.

Diese Definition findet sich, wie ich nachträglich bemerkte, bereits bei Herrn Jordan*); Herr Study, dem ich sie brieflich mitteilte, hat sich ihr angeschlossen**). Herr Jordan stellt jedoch die Definition nur auf, um aus ihr die Cantorsche Formulierung abzuleiten und dann mit dieser zu operieren. Demgegenüber ist zu bemerken, daß die Definition nicht etwa nur formale Vorzüge besitzt. Es genüge, auf folgendes hinzuweisen. Der Zusammenhang ist eine für die gesamte Analysis situs wichtige und grundlegende Eigenschaft. Da man nun die Analysis situs als diejenige Wissenschaft auffassen kann, die *sich bei den umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildungen invariant verhält****), so muß auch der Zusammenhang der Gebilde bei solchen Abbildungen *invariant* bleiben. In der Tat kann aber diese Eigenschaft aus der obigen Definition auf das einfachste gefolgert werden, was ich hier noch anführen möchte.

Seien nämlich die beiden perfekten Mengen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}_1$ eineindeutig und stetig aufeinander abgebildet, und sei die Menge $\mathfrak{T}$ zusammenhängend. Wäre nun die Menge $\mathfrak{T}_1$ nicht zusammenhängend, so müßte sie in zwei Teilmengen $\mathfrak{T}_1'$ und $\mathfrak{T}_1''$ zerfallen, die beide perfekt sind. Die ihnen bei der stetigen Abbildung entsprechenden Teilmengen $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ von $\mathfrak{T}$ müßten daher ebenfalls perfekt sein†), was jedoch, da $\mathfrak{T}$ zusammenhängend ist, unmöglich ist.

Ich erwähne noch, daß die Invarianz des Zusammenhangs bei den stetigen aber nur einseitig eindeutigen Abbildungen *nicht* vorhanden ist. Es genüge, auf dasjenige Beispiel als Beleg hinzuweisen, das ich in meinem Bericht ausführlich behandelt habe, und das die Peanosche Abbildung des Quadrats auf die Gerade betrifft††). Einer das Quadrat durchziehenden *Strecke* entspricht nämlich bei dieser Abbildung stets eine *nirgends dichte* auf der Geraden liegende Punktmenge, die als solche in beliebig viele abgeschlossene Punktmengen zerlegbar ist.

---

*) Cours d'analyse, 2. Aufl. Bd. 1, S. 25.

**) Geometrie der Dynamen, S. 248. Als ich Herrn Study die bezügliche briefliche Mitteilung machte, war mir die Stelle des Jordanschen cours d'analyse, unbekannt.

***) So verfährt auch Herr Thomae, Abriß einer Theorie der Funktionen, S. 5.

†) Vgl. meinen Bericht über Mengenlehre, a. a. O. S. 117.

††) a. a. O. S. 121 ff.

Wir beschränken uns nunmehr auf *zusammenhängende* Mengen $\mathfrak{T}$.

Um den Zusammenhang für die Menge $\mathfrak{M}$ zu definieren, die Komplementärmenge einer zusammenhängenden Menge $\mathfrak{T}$ ist, verfahre ich folgendermaßen. Sei m irgend ein Punkt von $\mathfrak{M}$, so gibt es jedenfalls andre Punkte von $\mathfrak{M}$, die sich mit m durch einen einfachen Weg verbinden lassen, der ganz zu $\mathfrak{M}$ gehört; man sieht auch leicht, daß ein solcher Weg immer nur eine endliche Zahl von Strecken enthält. Nun ist m entweder mit *jedem* andern Punkt von $\mathfrak{M}$ durch einen solchen Weg verbindbar, oder nicht. Im ersten Fall folgt, daß man auch je zwei Punkte m' und m'' durch einen solchen Weg verbinden kann. Die beiden von m' und m'' nach m führenden Wege stellen ihn nämlich unmittelbar dar, falls sie sich nicht kreuzen; kreuzen sie sich, so liefern ihn die Teilwege bis zum ersten Kreuzungspunkt. Wir definieren daher:

Die Komplementärmenge $\mathfrak{M}$ einer zusammenhängenden perfekten Menge $\mathfrak{T}$ heißt zusammenhängend, resp. zusammenhängendes Gebiet, falls je zwei ihrer Punkte durch einen einfachen Weg verbindbar sind, der ihr ganz angehört).*

Ist die Menge $\mathfrak{M}$ nicht zusammenhängend, so scheiden wir sie in zwei Teilmengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ und zwar auf folgende Weise. Zu $\mathfrak{A}$ rechnen wir die Punkte auf dem Umfang des Quadrates $\mathfrak{q}$, in dem $\mathfrak{T}$ enthalten ist, sowie alle diejenigen, die mit ihnen durch einen einfachen zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Weg verbindbar sind; alle andern rechnen wir zu $\mathfrak{J}$. Zwei Punkte a' und a'' von $\mathfrak{A}$ sind dann wieder durch einen zu $\mathfrak{A}$ gehörigen Weg verbindbar; *die Menge $\mathfrak{A}$ stellt daher ein zusammenhängendes Gebiet dar.* Dagegen ist kein Punkt von $\mathfrak{A}$ mit einem Punkt von $\mathfrak{J}$ durch einen zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Weg verbindbar. Wir bezeichnen daher $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ als *getrennte* Mengen, resp. als solche, die *durch $\mathfrak{T}$ voneinander getrennt sind.*

Da $\mathfrak{T}$ zusammenhängend ist, so schließen zwei Wege, die von einem Punkt m zu einem Punkt m' gehen, entweder *alle* Punkte von $\mathfrak{T}$ ein, oder *keinen.* Nun liefert das Quadrat $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{A}$ gehöriges Polygon, das $\mathfrak{T}$ einschließt. Daraus folgt, daß zwei zu $\mathfrak{J}$ gehörige Wege, die von i zu i' laufen, niemals einen Punkt von $\mathfrak{T}$ einschließen. Denn sonst läge $\mathfrak{T}$ ganz in dem von ihnen gebildeten Polygon $\mathfrak{p}$ und es würden alle zwischen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}$ liegenden Punkte zu $\mathfrak{A}$ gehören, also auch $\mathfrak{p}$, resp. i und i' selbst. *Wir bezeichnen daher $\mathfrak{A}$ als Äußeres, $\mathfrak{J}$ als Inneres bezüglich $\mathfrak{T}$.*

Ist die Menge $\mathfrak{J}$ *nicht* zusammenhängend, so zerfällt sie in zwei Mengen $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_1'$, sodaß $\mathfrak{J}_1$ alle Punkte von $\mathfrak{J}$ enthält, die mit einem beliebig fixierten Punkt i_1 verbindbar sind, und $\mathfrak{J}_1'$ die übrigen. Es sind

*) Diese Definition ist mit der Cantorschen inhaltlich übereinstimmend. Doch dürfte es sich empfehlen, die Definitionen für die Mengen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{M}$ zu sondern. Vgl. auch Study, a. a. O.

daher $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_1'$ getrennte Mengen. Mit $\mathfrak{J}_1'$ kann man ähnlich verfahren, und gelangt so zu dem Resultat, daß $\mathfrak{J}$ in eine Reihe getrennter Teilmengen

$$\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \cdots \mathfrak{J}_\nu, \cdots$$

zerfallen kann, deren jede ein zusammenhängendes Gebiet ist. Die Indizes ν können bis zu transfiniten Ordnungszahlen aufsteigen; die Gebiete lassen sich aber auch so ordnen, daß nur endliche Indizes auftreten, z. B. so, daß man in jedem $\mathfrak{J}_\nu$ den Punkt m_ν beliebig annimmt, und die Gebiete nach der Größe des Abstandes $\varrho(m_\nu, \mathfrak{T})$ ordnet. Es folgt schließlich:

III. *Die Komplementärmenge einer zusammenhängenden Menge* $\mathfrak{T}$ *bildet entweder ein zusammenhängendes Gebiet, oder sie zerfällt in zwei getrennte Mengen* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{J}$, *sodaß es in* $\mathfrak{J}$ *kein Polygon gibt, das* $\mathfrak{T}$ *einschließt, während in* $\mathfrak{A}$ *solche Polygone existieren. Die Menge* $\mathfrak{A}$ *ist stets zusammenhängend, die Menge* $\mathfrak{J}$ *bildet entweder ein zusammenhängendes Gebiet, oder sie zerfällt in eine endliche oder abzählbare Menge getrennter Gebiete* $\mathfrak{J}_\nu$; *d. h.*

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{T} + \mathfrak{A} + \sum \mathfrak{J}_\nu.$$

Ist im besonderen $\mathfrak{T}$ wieder eine nirgends dichte Menge, so stellt ein in beliebig viele Teile zerlegtes einfaches Polygon den einfachsten Typus solcher Mengen dar. Es war aber notwendig, die Natur dieser Mengen aus den zu Grunde gelegten Definitionen in allgemeinster Weise abzuleiten.

Die einfachsten zusammenhängenden Mengen $\mathfrak{T}$ sind diejenigen, deren Komplementärmenge in *zwei getrennte Gebiete* zerfällt, oder *selbst zusammenhängend* ist. Auf sie lassen sich die übrigen Mengen $\mathfrak{T}$ zurückführen. Mit ihnen werden wir uns daher zunächst ausschließlich beschäftigen.

§ 6.

Die zu einem zusammenhängenden Gebiet gehörige Gebietsteilung.

Sei also $\mathfrak{T}$ eine nirgends dichte, zusammenhängende Menge, deren Komplementärmenge nur aus einem oder höchstens zwei Gebieten besteht. Irgend eines von ihnen bezeichnen wir jetzt durch $\mathfrak{M}$. Zu jedem Punkt m gehört ein punktfreier Bereich (§ 4). Diese Bereiche stehen zu der Menge $\mathfrak{T}$ in einer einfachen Beziehung. Wie ich in meinem Bericht gezeigt habe*), läßt sich nämlich das Gebiet $\mathfrak{M}$ mit einer abzählbaren Menge solcher Bereiche so bedecken, daß die auf dem Umfang der Bereiche enthaltenen Punkte von $\mathfrak{T}$ nebst deren Grenzpunkten die gesamte Menge $\mathfrak{T}$ konstituieren. *Die Menge* $\mathfrak{T}$ *steht also zu diesen Bereichen genau*

*) a. a. O. S. 81 ff.

in derselben Beziehung, wie die lineare nirgends dichte Menge zu ihren punktfreien Intervallen.

Während es sich in meinem Bericht nur darum handelte, den *Existenzbeweis* für diese Tatsachen zu führen, wollen wir hier eine *spezielle* Konstruktion der Bereiche ausführen, die für die vorliegenden Aufgaben zweckmäßig ist. Um die Begriffe zu fixieren, denken wir uns in der Ebene eine x- und eine y-Achse beliebig angenommen und lassen die Seiten der Bereiche diesen *Achsen* parallel laufen. Um ferner die Betrachtung möglichst einfach zu gestalten, möge der Menge $\mathfrak{T}$ *ein Stück einer Geraden nicht angehören;* ferner soll die zu $\mathfrak{T}$ gehörige Menge $\mathfrak{M}$ in *zwei* Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ zerfallen, und man ziehe zunächst die Menge $\mathfrak{J}$ in Betracht.

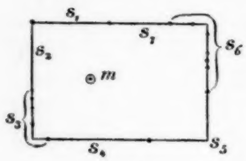


Fig. 8.

Sei *m irgend einer* ihrer Punkte und S der zugehörige punktfreie Bereich. Auf dem Umfang von S liegt dann (Fig. 8) eine endliche oder unendliche Menge von punktfreien Intervallen s', deren innere Punkte zu $\mathfrak{M}$ gehören, während ihre Endpunkte und deren Grenzpunkte eine Teilmenge von $\mathfrak{T}$ konstituieren. Ein solches Intervall s' kann übrigens auf zwei verschiedenen Seiten von S enthalten sein; dies wird immer und nur dann der Fall sein, wenn ein Eckpunkt von S zu $\mathfrak{M}$ gehört.

Die so bestimmte Intervallmenge denken wir uns der Größe nach geordnet, und bezeichnen sie durch

$$(1) \qquad \mathfrak{S}' = \{s_\nu'\} = s_1', s_2', s_3', \cdots s_\nu', \cdots.$$

Man fixiere nun eine positive Umlaufsrichtung für den Umfang von S, die wir im folgenden festhalten, und bestimme eine Reihe gegen Null abnehmender Zahlen

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \cdots > \varepsilon_\nu > \cdots.$$

Die Intervalle $s_i' \geqq \varepsilon_1$ teilen den Umfang von S in eine endliche Zahl konsekutiver Teile. Dazu gehören sie selbst, sowie die etwa zwischen je zweien von ihnen enthaltenen Teilintervalle. Diese alle denken wir uns in positiver Reihenfolge durchlaufen, und bezeichnen sie, von irgend einem beginnend, durch

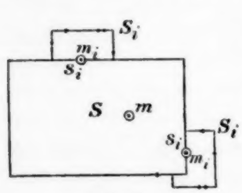


Fig. 9.

$$(2) \qquad \mathfrak{S}_1 = \{s_1, s_2, \cdots s_\lambda\},$$

sodaß in diese Menge jedenfalls alle Intervalle $s_i' \geqq \varepsilon_1$ eingehen.

Für jedes zu $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}_1$ gehörige Intervall s_i benutzen wir (Fig. 9) nun seinen *Mittelpunkt* als Konstruktionspunkt m_i

für einen neuen punktfreien Bereich S_i; es bleibt dann für S_i von vornherein die Seite fest, auf der m_i liegt. Gehört dem Intervall s_i eine Ecke von S an, so kann der Bereich S_i mit einer oder mit zwei Seiten an S angrenzen (Fig. 9). Den Bereich S bezeichnen wir jetzt noch als Polygon $\mathfrak{P}$.

Die Bereiche S_i bilden mit S zusammen ein Polygon $\mathfrak{P}'$, dessen Inneres zu $\mathfrak{M}$ gehört, während auf seinem Umfang eine Teilmenge $\mathfrak{T}'$ von $\mathfrak{T}$ liegt, die auf $\mathfrak{P}'$ eine Intervallmenge

(3) $$\mathfrak{S}'' = \{s_\nu''\} = s_1'', s_2'', \cdots s_\nu'', \cdots$$

bestimmt, die wieder der Größe nach geordnet sein soll. Wir definieren nun auf $\mathfrak{P}'$ eine zu $\mathfrak{S}_1$ analoge Intervallmenge $\mathfrak{S}_2$ und zwar folgendermaßen.

Gemäß der angegebenen Konstruktion wird ein Intervall s_i, das einen Punkt m_i enthält, durch einen zu $\mathfrak{P}'$ gehörigen Linienzug $\mathfrak{l}_i$ ersetzt, der durch $\mathfrak{T}'$ in gewisse zu $\mathfrak{S}''$ gehörige Intervalle zerfällt. Unter ihnen mögen solche enthalten sein, die nicht kleiner als ε_2 sind. Füllen sie den Linienzug $\mathfrak{l}_i$ nicht ganz aus, so zerfällt er in sie und die etwa zwischen je zweien von ihnen resp. zwischen seinen Endpunkten liegenden Intervalle. Alle diese, im positiven Sinn durchlaufen, bezeichnen wir durch

$$s_{i1}, s_{i2}, \cdots s_{i\mu};$$

dabei ist zu beachten, daß s_{i1} und $s_{i\mu}$ mit s_i ein Stück gemein haben können. Enthält jedoch $\mathfrak{l}_i$ kein Intervall $s_i'' \geqq \varepsilon_2$, so bezeichnen wir den ganzen Linienzug $\mathfrak{l}_i$ durch s_{i0}.

Ist andrerseits s_i ein solches Intervall von $\mathfrak{S}_1$, das *nicht* zu $\mathfrak{S}'$ gehört, und enthält es kein Intervall $s_i'' \geqq \varepsilon_2$, so bezeichnen wir s_i nunmehr durch s_{i0}, so daß $s_i = s_{i0}$ ist. Dasselbe soll geschehen, wenn s_i ein einziges Intervall $s_i'' \geqq \varepsilon_2$ darstellt, sodaß also $\varepsilon_1 > s_i'' \geqq \varepsilon_2$ ist. In jedem andern Fall *zerfällt* s_i in mindestens ein resp. mehrere Intervalle $s_i'' \geqq \varepsilon_2$ und in die etwa zwischen je zweien von ihnen resp. zwischen seinen Endpunkten liegenden Intervalle; alle diese, in positiver Reihenfolge durchlaufen, bezeichnen wir alsdann durch

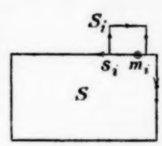


Fig. 10.

$$s_{i1}, s_{i2}, \cdots s_{i\mu}.$$

Auf diese Weise ist der ganze Umfang von $\mathfrak{P}'$ in lauter Intervalle s_{ik} zerlegt; sie konstituieren die Intervallmenge

(4) $$\mathfrak{S}_2 = \{s_{ik}\},$$

in die jedenfalls alle Intervalle $s_i'' \geqq \varepsilon_2$ eingehen.

Ein Intervall s_{ik} kann, wie Fig. 10 zeigt, außer auf *einer*, *zwei* oder auch auf *drei* Seiten von $\mathfrak{P}'$ enthalten sein.

Wir fahren nun in der Konstruktion der Bereiche fort. Für jedes Intervall s_{ik}, das keine konkave Ecke von $\mathfrak{P}'$ enthält, benutzen wir seinen

Halbierungspunkt m_{ik} als Konstruktionspunkt eines Bereiches S_{ik}. Falls jedoch s_{ik} eine konkave Ecke enthält, so soll diese (Fig. 11) den Punkt m_{ik} abgeben; dann bleiben für m_{ik} von vornherein zwei Bereichseiten fest. Alle diese Bereiche S_{ik} bilden mit $\mathfrak{P}'$ zusammen ein Polygon $\mathfrak{P}''$, dessen Inneres zu $\mathfrak{M}$ gehört, während sein Umfang eine Teilmenge $\mathfrak{T}''$ von $\mathfrak{T}$ enthält, die auf $\mathfrak{P}''$ eine gewisse Menge punktfreier Intervalle

$$(5) \qquad \mathfrak{S}''' = \{s_\nu'''\} = s_1''', s_2''', \cdots s_\nu''', \cdots$$

bestimmt.

Wir definieren nun wieder eine auf $\mathfrak{P}''$ liegende Intervallmenge $\mathfrak{S}_3$. Jedes Intervall s_{ik} von $\mathfrak{S}_2$, das zugleich zu $\mathfrak{S}''$ gehört, wird durch unsre Konstruktion durch einen zu $\mathfrak{P}''$ gehörigen Linienzug $\mathfrak{l}_{ik}$ ersetzt. Liegt auf ihm kein Intervall $s_i''' \geqq \varepsilon_3$, so bezeichnen wir ihn durch s_{ik0}; enthält jedoch $\mathfrak{l}_{ik}$ solche Intervalle, so bezeichnen wir sie, sowie die etwa zwischen je zweien von ihnen resp. zwischen den Endpunkten von $\mathfrak{l}_{ik}$ liegenden Teilintervalle, in positiver Reihenfolge durch

$$s_{ik1},\ s_{ik2}, \cdots s_{ik\nu}.$$

Ist dagegen s_{ik} ein Intervall, das *nicht* zu $\mathfrak{S}''$ gehört, und enthält es kein Intervall $s_i''' \geqq \varepsilon_3$, so bezeichnen wir es durch s_{ik0}; ebenso, falls es ein einziges Intervall $s_i''' \geqq \varepsilon_3$ darstellt; es ist also $s_{ik} = s_{ik0}$. In jedem andern Fall *zerfällt* s_{ik} und enthält mindestens ein Intervall $s_i''' \geqq \varepsilon_3$; alsdann bezeichnen wir diese Intervalle und die etwa zwischen ihnen resp. den Endpunkten von s_{ik} liegenden Teilintervalle durch

$$s_{ik1},\ s_{ik2}, \cdots s_{ik\nu}.$$

Auf diese Weise ist der ganze Umfang von $\mathfrak{P}''$ in lauter Intervalle s_{ikl} zerfällt, die zusammen die Menge

Fig. 11.

$$(6) \qquad \mathfrak{S}_3 = \{s_{ikl}\}$$

ausmachen, die alle Intervalle $s_i''' \geqq \varepsilon_3$ entlhält.

Auch die Intervalle s_{ikl} sind *höchstens auf drei* Seiten von $\mathfrak{P}''$ enthalten. Dies beruht darauf, daß (Fig. 11) bei den Intervallen s_{ik}, in die eine konkave Ecke fällt, diese Ecke als Punkt m_{ik} benutzt wird, und daß auf jedem Intervall s_{ik}, das auf drei Seiten von $\mathfrak{P}'$ liegt, eine solche Ecke vorhanden ist (Fig. 10).

In dieser Weise fahren wir fort. Wir gelangen so zu den Bereichen

$$(7) \qquad S,\ S_i,\ S_{ik},\ S_{ikl}, \cdots S_N,$$

wo N eine Gruppe von ν Indizes bedeutet, zu den Polygonen

$$(8) \qquad \mathfrak{P},\ \mathfrak{P}',\ \mathfrak{P}'',\ \mathfrak{P}''', \cdots \mathfrak{P}^{(\nu)}, \cdots,$$

deren Inneres stets zu $\mathfrak{M}$ gehört, und zu den auf ihnen liegenden Intervallmengen

(9) $$\mathfrak{S}', \mathfrak{S}'', \mathfrak{S}''', \cdots \mathfrak{S}^{(\nu)}, \mathfrak{S}^{(\nu+1)},$$

resp.

(10) $$\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \cdots \mathfrak{S}_\nu, \mathfrak{S}_{\nu+1},$$

sodaß $\mathfrak{S}_\nu = \{s_N\}$ alle Intervalle $s_i^{(\nu)} \geqq \varepsilon_\nu$ enthält und jedes s_N *höchstens auf drei* Seiten von $\mathfrak{P}^{(\nu-1)}$ liegen kann.

Die so definierten Bereiche S_N bezeichne ich als eine *zu* $\mathfrak{M}$ *gehörige einfache Gebietsteilung.*

Wir haben im Vorstehenden die Menge $\mathfrak{M}$ als eine Menge $\mathfrak{J}$ vorausgesetzt. Ist sie eine Menge $\mathfrak{A}$, oder gehört zu $\mathfrak{T}$ nur eine einzige zusammenhängende Komplementärmenge $\mathfrak{M}$, so benutzen wir die Ecken des Quadrats $\mathfrak{q}$, in dem $\mathfrak{T}$ liegt, als erste Punkte für die Konstruktion der Bereiche. Wir beginnen mit irgend einer Ecke, verfahren ebenso mit einer zweiten, die nicht bereits dem zur ersten konstruierten Bereich angehört, und eventuell noch mit der dritten und vierten. Wir erhalten dann ein erstes Polygon $\mathfrak{P}'$, dessen *Äußeres* zu $\mathfrak{M}$ gehört, während auf seinem Umfang eine Teilmenge $\mathfrak{T}'$ liegt, und auch hier jedes punktfreie Intervall auf *höchstens drei* Seiten von $\mathfrak{P}'$ enthalten ist. Mit diesem Polygon verfahren wir nun analog wie oben, und gelangen zu den gleichen Resultaten, wie für die Menge $\mathfrak{J}$, nur mit dem Unterschied, daß hier das *Äußere* aller Polygone $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ zu $\mathfrak{M}$ gehört.

Es erübrigt noch die Frage, ob ein Bereich S_N an einen bereits vorhandenen Bereich S_M angrenzen kann. Ist dies der Fall, so kann der ihnen gemeinsame Punkt nicht zu $\mathfrak{M}$ gehören. Denn gäbe es einen solchen Punkt m, und faßt man ihn zunächst als Punkt von S_M auf, so könnte man einen zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Weg legen, der von m_0 über $m_i, m_{ik}, \cdots$ nach m_M und zuletzt nach m führte, und ebenso einen Weg von m_0 über m_N nach m. Diese beiden Wege bilden dann ein Polygon $\mathfrak{p}$, das zu $\mathfrak{M}$ gehört, und es würden Punkte von $\mathfrak{T}$ sowohl außerhalb wie innerhalb von $\mathfrak{p}$ liegen, was ausgeschlossen ist.

Es können daher S_M und S_N nur Punkte von $\mathfrak{T}$ gemein haben. Dies ist aber auch möglich. Da $\mathfrak{T}$ nach Annahme kein Stück einer Geraden enthalten sollte, so folgt weiter, daß nur ein Eckpunkt von S_M mit einem Eckpunkt von S_N zusammenfallen kann. Dadurch wird aber die weitere Konstruktion der Bereiche nicht modifiziert; ebensowenig wird die eindeutige Bestimmtheit der Polygone $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ und der Mengen $\mathfrak{S}^{(\nu)}$ resp. $\mathfrak{S}_\nu$ dadurch geändert.

Ich bemerke noch, daß, wenn S_M und S_N den Punkt t gemein haben, die beiden von m_0 nach t durch S_M resp. S_N führenden Wege ein Polygon $\mathfrak{p}$ bilden, sodaß sowohl sein Äußeres wie sein Inneres Punkte von $\mathfrak{T}$ enthält.

§ 7.

Die einfache geschlossene Kurve.

Der allgemeine *Kurvenbegriff der Analysis* hat im Lauf der Zeit einen außerordentlich ausgedehnten Inhalt angenommen. Ihn durch eine äquivalente mengentheoretische Definition zu erschöpfen, ist ausgeschlossen. Es genüge, auf zwei Beispiele hinzuweisen. Der Peanoschen Kurve, bei der x und y eindeutige und stetige Funktionen einer Variablen sind, gehören alle Punkte eines Quadrates an. Bei der mengentheoretischen Definition kann aber die Punktmenge immer nur als *Ganzes* in Betracht kommen; andrerseits gehört es zu den elementarsten Erfordernissen der Analysis situs, die *Dimension* als *Invariante* zu betrachten und zwischen *Strecke* und *Fläche* zu unterscheiden, sodaß hier ein prinzipieller Gegensatz zu Tage tritt.

Ein zweites Beispiel ist das folgende. Wird eine *Epicykloide* so bestimmt, daß die beiden Kreisradien in einem irrationalen Verhältnis stehen, so besteht sie aus unendlich vielen einfachen Bögen, die einen Kreisring *überall dicht* erfüllen, ohne daß ihr jedoch jeder Punkt des Kreisringes zugehört. Hier sind also x und y in der Weise stetige und eindeutige Funktionen einer Variablen, daß die durch sie dargestellte Punktmenge *nicht abgeschlossen* ist, während es doch ein grundlegendes Erfordernis der *Geometrie* ist, unter den Begriffen Kurve, Fläche usw. *abgeschlossene* Mengen zu verstehen.

Angesichts dieser Schwierigkeit halte ich es für zweckmäßig, die Definitionen zunächst so eng wie möglich zu fassen und von solchen Punktmengen auszugehen, die Vertreter der einfachsten Kurventypen sind. Dabei lasse ich mich von einer doppelten Überlegung leiten. Wie bereits oben bemerkt wurde (§ 5), dürfte es im Sinn der Analysis situs liegen, die Bezeichnungen so zu wählen, daß sie bei *eineindeutigen und stetigen* Abbildungen *invariant* bleiben, genau wie die Dimension und der Zusammenhang. Zweitens aber sollen sie den natürlichen Verallgemeinerungen der einfachsten Figuren entsprechen, zumal derjenigen, die sich mit Streckenzügen bilden lassen, d. h. des einfachen Polygons.

Eine der wichtigsten geometrischen Eigenschaften der *einfachen geschlossenen Kurve* ist die, daß sie, genau wie das Polygon, eine *einfache Gebietsgrenze* ist, also die Ebene in zwei durch sie getrennte Punktmengen teilt, in ein *Äußeres* $\mathfrak{A}$ und ein *Inneres* $\mathfrak{J}$. Doch fällt, analog zu den Ausführungen von § 3, nicht jede Punktmenge, die eine solche Teilung bewirkt, unter den einfacheu Kurvenbegriff. Man betrachte nur die im Beginn des § 3 erwähnten Beispiele, die sich auf Kurven übertragen

lassen*). Die einfache Kurve erhalten wir dann erst, wenn wir für die Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ die dem einfachen Polygon zugehörigen und im Satz I enthaltenen Eigenschaften voraussetzen. Wir definieren also:

Wenn eine perfekte Menge $\mathfrak{T}$ die Ebene in zwei Teilmengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ zerlegt, die den Bedingungen des Satzes I genügen, so heißt sie eine geschlossene einfache Kurve.

Für eine geschlossene einfache Kurve $\mathfrak{T}$ sind demnach die Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ so definiert, daß je zwei innere, resp. je zwei äußere Punkte durch einen gewöhnlichen inneren resp. äußeren Weg verbindbar sind, und daß auch *jeder* Kurvenpunkt t mit *jedem* äußeren und *jedem* inneren Punkt durch einen Weg verbindbar ist, der von t abgesehen, nur äußere resp. innere Punkte enthält. Ein äußerer und ein innerer Punkt können daher so verbunden werden, daß der Verbindungsweg *nur einen* Kurvenpunkt enthält; einen muß er aber auch mindestens enthalten.

§ 8.

Allgemeine Eigenschaften der zu einer einfachen geschlossenen Kurve gehörigen Gebietsteilung.

1) *Ist $\mathfrak{T}$ eine einfache geschlossene Kurve, so fällt bei der zum Innern oder Äußeren gehörigen Gebietsteilung niemals ein Punkt eines Bereiches S_N mit einem Punkt eines Bereiches S_M zusammen.*

Man betrachte zunächst die zur Menge $\mathfrak{J}$ gehörigen Bereiche. Gäbe es nun einen den Bereichen S_M und S_N gemeinsamen Punkt, so könnte man zu diesem Punkt, wie in § 6, von m aus einen Weg sowohl durch S_M, wie durch S_N hindurchlegen, und diese beiden Wege würden ein Polygon liefern, das in seinem Innern, wie in seinem Äußern Punkte von $\mathfrak{T}$ enthält**). Das steht aber damit in Widerspruch, daß bei den hier betrachteten Mengen *jeder* Punkt t mit *jedem* innern und *jedem* äußern Punkt durch einen innern resp. äußern Weg verbunden werden kann. Daraus folgt noch, daß die sämtlichen Polygone $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ gewöhnliche Polygone sind.

Das gleiche folgt für die Bereiche, die zur Gebietsteilung der Menge $\mathfrak{A}$ gehören.

2) *Sei s' irgend ein punktfreies Intervall der Menge $\mathfrak{S}' = \{s_\nu'\}$* (§ 6), *und m irgend ein auf ihm liegender Punkt von $\mathfrak{M}$, so gibt es einen angebbaren Bereich S_N, dem m angehört.*

---

*) Ein einfaches Beispiel stellt auch ein in einem Rechteck enthaltenes endliches Stück der Kurve $y = \sin 1/x$ dar.

**) Wie z. B. ein Kreis mit einem seiner Radien.

Sei nämlich m' der Konstruktionspunkt von s'. Wenn dann (Fig. 12) der zu m' gehörige Bereich S' den Punkt m nicht enthält, so endet er in einem zwischen m und m' gelegenen Punkt m_1, der eine konkave Ecke eines gewissen Polygons $\mathfrak{P}^{(i)}$ (§ 6) ist. Das Intervall, das diesen Punkt m_1 enthält, gehört einer gewissen Menge $\mathfrak{S}_k$ an; es ist als solches durch s_K zu bezeichnen, und besitzt den Punkt m_1 als Konstruktionspunkt m_K, wo K eine Gruppe von $\varkappa$ Indizes bedeutet. Wenn dann der zugehörige Bereich S_K den Punkt m noch nicht enthält, so endet er in einem zwischen m_K und m gelegenen Punkt, der wieder ein Konstruktionspunkt m_L eines Intervalles s_L ist, usw. Ist nun δ das Minimum aller Abstände $\varrho(mm', \mathfrak{T})$ so hat jeder zu einem Punkt von mm' konstruierte Bereich mindestens die Breite δ, wie aus der Definition dieser Bereiche unmittelbar ersichtlich ist. Unsre Konstruktion kommt daher nach einer endlichen Zahl von Schritten zu Ende. Es gibt also auch einen Bereich S_N, der den Punkt m enthält.

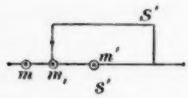


Fig. 12.

Der vorstehende Satz gilt auch für jedes Intervall irgend einer Menge $\mathfrak{S}^{(\mu)} = \{s_\nu^{(\mu)}\}$; also:

3) *Sei $s^{(\mu)}$ irgend ein punktfreies Intervall einer Menge $\mathfrak{S}^{(\mu)} = \{s_\nu^{(\mu)}\}$, und m ein auf ihm liegender Punkt von $\mathfrak{M}$, so gibt es einen angebbaren Bereich S_N, dem m angehört.*

Der Beweis wird ebenso geführt, wie der Beweis von Satz 1).

4) *Sei $\mathfrak{r}$ irgend ein rechteckiger Bereich, dessen Inneres zu $\mathfrak{M}$ gehört, so kann es nicht unendlich viele aneinandergrenzende Bereiche S_N geben, die das Rechteck $\mathfrak{r}$ durchsetzen.*

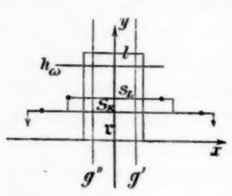


Fig. 13.

Angenommen, es gäbe unendlich viele solche Bereiche, sei S_K einer von ihnen, und s_L dasjenige auf ihm enthaltene punktfreie Intervall, das $\mathfrak{r}$ durchdringt. Wir wählen die zu s_L senkrechte Mittellinie von $\mathfrak{r}$ als y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems und legen die x-Achse so, daß die im folgenden zu betrachtenden Bereiche positive Ordinaten besitzen (Fig. 13). Die Breite des Rechtecks $\mathfrak{r}$ sei $2d$. Ferner sei h_ω die Gerade, gegen die sich die Bereiche S_N verdichten, und es seien

$$y = \eta_\omega \quad \text{und} \quad y = e; \quad \eta_\omega \leqq e$$

die Gleichungen der Geraden h_ω und der oberen Grundlinie l von $\mathfrak{r}$.

Seien nun g' und g'' zwei durch die Gleichungen

$$x = d - \varepsilon, \quad x = -d + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < d$$

gegebene Geraden. Wenn dann der Konstruktionspunkt m_L des Intervalls s_L

zwischen g' und g'' liegt, so ist die Höhe h_L des zugehörigen Bereiches S_L im allgemeinen mindestens gleich ε. Nur in dem Fall, daß der Abstand des Bereiches S_L von der Geraden l kleiner als ε ist, kann auch $h_L < \varepsilon$ sein; es würde aber dann der Bereich S_L bis an l heranreichen. Da aber die Höhen der Bereiche gegen Null konvergieren, wenn es unendlich viele solche Bereiche gibt, so folgt, daß der Konstruktionspunkt m_L nur für eine *endliche* Zahl von Bereichen zwischen g' und g'' fällt. Da ε beliebig ist, so gilt dies auch für das Innere von $\mathfrak{r}$ selbst.

Sei nun der Bereich S_K so gewählt, daß für ihn und alle folgenden Bereiche dies nicht mehr der Fall ist; wir nehmen an, der Punkt m_L habe eine *positive* Abscisse. Der zugehörige Bereich S_L kann dann an sich noch außerhalb $\mathfrak{r}$ liegen; gemäß Satz 4) gibt es aber einen angebbaren Bereich, der in $\mathfrak{r}$ eindringt und daher auch $\mathfrak{r}$ durchdringt; wie aus den in § 4 angegebenen Eigenschaften dieser Bereiche hervorgeht, kann er nicht innerhalb $\mathfrak{r}$ endigen. Dieser Bereich (Fig. 14) sei S'; sei m' der Konstruktionspunkt, zu dem er gehört, $\mathfrak{x}'$ dessen Abscisse, und h' die Höhe von S'. Gemäß seiner Definition enthält dieser Bereich auf derjenigen Seite, die $\mathfrak{r}$ durchdringt, im Intervall

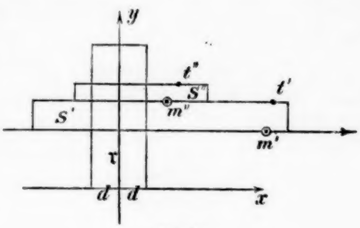


Fig. 14.

$$\mathfrak{x}' - h' \cdots \mathfrak{x}' + h' + h_K{}^{*)}$$

mindestens einen Punkt t' von $\mathfrak{T}'$; ist $\mathfrak{x}_t'$ seine Abscisse, so ist also

$$(1) \qquad \mathfrak{x}_t' \leqq \mathfrak{x}' + h' + h_K.$$

Mit demjenigen Intervall dieses Bereiches, das $\mathfrak{r}$ durchdringt, verfahren wir nun ebenso. Wenn der zu seinem Konstruktionspunkt gehörige Bereich noch außerhalb $\mathfrak{r}$ liegt, so gibt es einen angebbaren Bereich S'', der $\mathfrak{r}$ durchdringt. Der Konstruktionspunkt m'' dieses Bereiches kann dann ebenfalls eine positive Abscisse $\mathfrak{x}''$ haben; ist dies der Fall, so ist m'' Mitte eines Intervalls, dessen linker Endpunkt links von $\mathfrak{r}$ liegt, es ist also, wie man leicht findet,

$$(2) \qquad \mathfrak{x}'' < \frac{\mathfrak{x}_t' - d}{2} \leqq \frac{\mathfrak{x}' + h' + h_K - d}{2}.$$

Ferner enthält S'' auf der Gegenseite von m'' wieder einen Punkt t'', so daß diesmal

$$(3) \qquad \mathfrak{x}_t'' \leqq \mathfrak{x}'' + h''$$

*) Der Summand h_K entspricht der Möglichkeit, daß m' auch auf derjenigen freien Seite von S_K liegen kann, die zur y-Achse parallel ist, und deren Länge h_K ist.

ist. Hat auch der Konstruktionspunkt m''' des nächsten Bereiches S''', der $\mathfrak{r}$ durchsetzt, eine positive Abscisse $\mathfrak{x}'''$, so folgt ebenso

$$(4) \qquad \mathfrak{x}''' < \frac{\mathfrak{x}_l'' - d}{2}, \quad \mathfrak{x}_l''' \leqq \mathfrak{x}''' + h''',$$

und falls sich dies ϱ-mal wiederholt, sodaß auch $\mathfrak{x}^{(\varrho+1)} > 0$ ist, so ist

$$(5) \quad \mathfrak{x}^{(\varrho+1)} < \frac{\mathfrak{x}'}{2^\varrho} + \frac{h' + h_K}{2^\varrho} + \frac{h''}{2^{\varrho-1}} + \cdots + \frac{h^{(\varrho)}}{2} - \frac{d}{2^\varrho} - \frac{d}{2^{\varrho-1}} - \cdots - \frac{d}{2}.$$

Diese Ungleichung zeigt, daß $\mathfrak{x}^{(\varrho)}$ nicht beständig positiv sein kann; man kann ja S_K so wählen, daß sogar

$$h_K + h' + h'' + \cdots + h^{(\varrho)}$$

beliebig klein wird.

Der Konstruktionspunkt $m^{(\varrho)}$ tritt daher für ein gewisses ϱ auf die linke Seite der y-Achse; er kann aber auch nicht immer links bleiben, er tritt alsdann wieder nach rechts und *dies wiederholt sich unaufhörlich.*

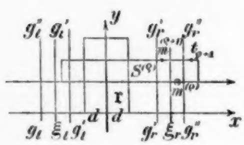


Fig. 15.

Wir projizieren jetzt (Fig. 15) die Punkte $m', m'', \cdots m^{(\varrho)}, \cdots$ auf die x-Achse. Die Projektionspunkte $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \cdots \mathfrak{x}^{(\varrho)}, \cdots$ besitzen links und rechts von der y-Achse je einen Grenzpunkt, dessen Abscisse $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$, absolut genommen, ein Minimum ist. Diese Punkte liegen nicht innerhalb der beiden Geraden g' und g'', und da ε beliebig war, so folgt

$$|\mathfrak{x}_l| \geqq d \quad \text{und} \quad |\mathfrak{x}_r| \geqq d.$$

Man nehme nun δ beliebig an und ziehe die Geraden g_l' und g_l'', deren Gleichungen

$$x = \mathfrak{x}_l + \delta, \quad x = \mathfrak{x}_l - \delta$$

sind, und die Geraden g_r' und g_r'' mit den Gleichungen

$$x = \mathfrak{x}_r - \delta, \quad x = \mathfrak{x}_r + \delta.$$

Gemäß der Definition von $\mathfrak{x}_r$ und $\mathfrak{x}_l$ kann man, welches auch δ sei, einen Index ϱ so bestimmen, daß für $\sigma \geqq \varrho$ kein Punkt $m^{(\sigma)}$ zwischen g_l' und g_r' fällt, und zugleich je unendlich viele Punkte zwischen g_l' und g_l'' und zwischen g_r' und g_r'' liegen. Man kann aber den Index ϱ noch der weiteren Bedingung unterwerfen, daß für *jedes* $\sigma \geqq \varrho$ die Abscissen $\mathfrak{x}^{(\sigma)}$ und $\mathfrak{x}^{(\sigma+1)}$ verschiedenes Zeichen besitzen. Sei z. B. $\mathfrak{x}^{(\varrho)} > 0$, sei wieder $S^{(\varrho)}$ der zu $m^{(\varrho)}$ gehörige Bereich, $h^{(\varrho)}$ seine Höhe, und möge der rechte Endpunkt $t_{\varrho+1}$ des Intervalles $s^{(\varrho+1)}$ von $S^{(\varrho)}$, das den Punkt $m^{(\varrho+1)}$ enthält, die Abscisse $\mathfrak{x}_{\varrho+1}$ besitzen. Wenn nun auch $\mathfrak{x}^{(\varrho+1)} > 0$ sein soll, so muß jedenfalls

$$\mathfrak{x}_{\varrho+1} - (\mathfrak{x}_r - \delta) > \mathfrak{x}_r - \delta + d$$

sein, wie leicht ersichtlich. Nun ist aber $\xi_{\varrho+1} \leqq \xi_l^{(\varrho)}$, und daher gemäß Gleichung (1)

$$\xi_{\varrho+1} \leqq \xi^{(\varrho)} + h^{(\varrho)} + h^{(\lambda)} < \xi_r + \delta + h^{(\varrho)} + h^{(\lambda)},$$

wo $h^{(\lambda)}$ die Höhe des Bereiches ist, auf dem der Punkt $m^{(\varrho)}$ liegt. Die obige Ungleichung führt daher auf

$$h^{(\varrho)} + h^{(\lambda)} > \xi_r + d - 3\delta, \tag{6}$$

was für hinreichend großes λ resp. ϱ niemals der Fall ist. Man kann daher ϱ in der angegebenen Weise bestimmen.

Da nun die Bereiche $S^{(\varrho)}$ und $S^{(\varrho+1)}$ beide das Rechteck $\mathfrak{r}$ durchdringen und da $m^{(\varrho+1)}$ Halbierungspunkt des in $t_{\varrho+1}$ endigenden Intervalles $s^{(\varrho+1)}$ ist, so folgt weiter, daß der Bereich $S^{(\varrho)}$ mindestens um das Stück

$$d_l = \xi_{\varrho+1} - \xi_l - 3\delta$$

über g_l'' nach links hinausragen wird. Da aber das Rechteck $\mathfrak{r}$ zu $\mathfrak{M}$ gehört, so muß, $\xi_{\varrho+1} \geqq d$ sein, also ist

$$d_l \geqq d - \xi_l - 3\delta. \tag{7}$$

Solcher Bereiche gibt es daher unendlichviele, und ebenso gibt es unendlichviele, die nach rechts um

$$d_r \geqq d + \xi_r - 3\delta \tag{8}$$

hinausragen.

Man unterwerfe ϱ endlich noch der weiteren Bedingung, daß für $\sigma \geqq \varrho$ nicht allein die Punkte $m^{(\sigma)}$ zwischen g_l' und g_l'' resp. zwischen g_r' und g_r'' fallen, sondern auch die durch sie bestimmten Punkte $t^{(\sigma)}$, was gemäß Gleichung (3) immer möglich ist.

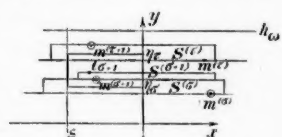


Fig. 16.

Seien nun (Fig. 16) $S^{(\sigma)}$ und $S^{(\tau)}$ zwei Bereiche, die die gleiche Lage haben, wie der eben bestimmte Bereich $S^{(\varrho)}$, sodaß also $m^{(\sigma+1)}$ und $m^{(\tau+1)}$ und zugleich $t^{(\sigma+1)}$ und $t^{(\tau+1)}$ zwischen g_l' und g_l'' liegen, während $S^{(\sigma)}$ und $S^{(\tau)}$ über g_l' mindestens um d_l hinausragen. Wählt man nun auf der y-Achse zwei Punkte η_σ und η_τ *innerhalb* $S^{(\sigma)}$ und $S^{(\tau)}$ und wählt ξ so, daß

$$\xi_l - d_l - \delta < \xi < \xi_l - \delta \tag{9}$$

ist, so bestimmen die Geraden

$$x = 0, \quad x = \xi, \quad y = \eta_\sigma, \quad y = \eta_\tau$$

ein Rechteck, das den Punkt $t^{(\sigma+1)}$ von $\mathfrak{T}$ im Innern enthält. Es muß also auch sein Umfang mindestens einen Punkt von $\mathfrak{T}$ enthalten, und der kann gemäß der Bestimmung des Rechtecks nur auf der Geraden $x = \xi$ liegen. Da es nun unendlichviele solche Bereiche $S^{(\sigma)}$ und $S^{(\tau)}$ gibt, so müssen sich diese Punkte gegen die Gerade h_ω häufen, also muß der

Schnitt von $x = \mathfrak{x}$ mit h_ω zu $\mathfrak{T}$ gehören, und zwar für jedes gemäß (9) bestimmte $\mathfrak{x}$.

Diese Folgerung enthält aber einen Widerspruch. Verbindet man nämlich zwei dieser Punkte, p_1 und p_2, mit einem *inneren* Punkt m durch je einen inneren Weg, so stellen diese beiden Wege im Verein mit der Strecke $p_1 p_2$ ein Polygon $\mathfrak{p}$ dar, auf das der Satz I resp. II zutrifft. Innerhalb dieses Polygons liegen nun aber Punkte von $\mathfrak{T}$. Denn ist p ein Punkt zwischen p_1 und p_2, so liegen auf der durch ihn parallel zur y-Achse laufenden Geraden Punkte von $\mathfrak{T}$ in beliebiger Nähe an p. Diese Punkte könnten aber von einem zur Menge $\mathfrak{A}$ gehörigen *äußeren* Punkt nicht durch einen äußeren Weg erreicht werden, da jeder solche Weg das Polygon kreuzen, und demnach Punkte von $\mathfrak{J}$ oder $\mathfrak{T}$ enthalten müßte. Damit ist der Satz 4) bewiesen.

5) *Je zwei äußere oder je zwei innere Punkte lassen sich durch Wege verbinden, die nur eine endliche Zahl von Bereichen der Gebietsteilung durchsetzen.*

Es genügt den Beweis für solche Wege zu führen, die einen beliebigen Punkt m mit dem Ausgangspunkt m_0 der Gebietsteilung verbinden.

Sei $\mathfrak{l}$ ein von m_0 zu einem Punkt m führender einfacher innerer resp. äußerer Weg und 2ϑ das Minimum aller Abstände $\varrho(\mathfrak{l}, \mathfrak{T})$, wo $\vartheta > 0$ ist. Wir ersetzen jede Strecke l von $\mathfrak{l}$ durch einen Streckenzug, dessen Seiten den Achsen parallel laufen, und dessen Punkte von l höchstens den Abstand ϑ besitzen. Der so konstruierte Streckenzug ist ebenfalls ein innerer resp. äußerer Weg $\mathfrak{l}'$ mit endlicher Streckenzahl. Dieser Weg wird den Bereich S_0 in einem Intervall s_0' kreuzen; es gibt dann eine bestimmte Strecke l_0' von $\mathfrak{l}'$, die den Kreuzungspunkt m_0' enthält, und ganz oder teilweise außerhalb von S_0 liegt. Das Intervall s_0' gehört einer gewissen Menge $\mathfrak{S}^{(\lambda)}$ an (§ 6); gemäß Satz 3) existiert daher ein wohldefinierter Bereich S_M', dem m_0' angehört, und in dem daher die Seite l_0' ganz oder teilweise enthalten ist.

Nur der Fall bedarf der weiteren Erörterung, daß der Kreuzungspunkt m'' von $\mathfrak{l}'$ mit S_M' ebenfalls noch auf l_0' enthalten ist. Er fällt dann in ein punktfreies Intervall $s^{(\nu)}$ einer gewissen Menge $\mathfrak{S}^{(\nu)}$, und gemäß Satz 3) gibt es einen Bereich S_P'', dem der Kreuzungspunkt m'' angehört, und in den daher die Strecke l_0' eintritt. Fällt nun auch der Kreuzungspunkt von $\mathfrak{l}'$ mit S_P'' in die Strecke l_0', so kann dies doch nicht unendlich oft geschehen. Dies folgt unmittelbar aus Satz 4). Zieht man nämlich zu l_0' zwei Parallelen, die von l_0' höchstens den Abstand $\frac{1}{2}\vartheta$ haben, so bestimmen sie einen Bereich $\mathfrak{r}$, der l_0' einschließt und ganz zu $\mathfrak{M}$ gehört, und auf den daher Satz 4) anwendbar ist.

Die Strecke l_0' kann daher nur eine endliche Zahl von Bereichen

durchdringen .Da andrerseits gemäß Satz 3) die Konstruktion neuer Bereiche niemals abbrechen kann, so folgt nunmehr, daß man durch eine endliche Zahl von Schritten zu einem letzten wohlbestimmten Bereich der Gebietsteilung kommt, der den Endpunkt m im Innern oder auf dem Umfang enthält, womit der Satz bewiesen ist.

Durch die vorstehenden Sätze ist die Besonderheit der einfachen geschlossenen Kurve, resp. der zugehörigen Gebietsteilung vollständig charakterisiert. Sie genügen jedenfalls zur Ableitung der weiteren Folgerungen. Ehe ich hierzu übergehe, bemerke ich noch folgendes.

Ist die Menge $\mathfrak{T}$ *keine* einfache geschlossene Kurve, so kann, wie der Beweis von Satz 4) zeigt, die Notwendigkeit entstehen, die Konstruktion der Bereiche bis zu transfiniten Indizes fortzusetzen. Falls nämlich die Gerade h_ω das Rechteck $\mathfrak{r}$ kreuzt, werden sich die Bereiche, die den endlichen Indizes entsprechen, nur bis h_ω erstrecken; man hat dann mit dem auf h_ω liegenden punktfreien Intervall s_ω die Bereichkonstruktion von neuem zu beginnen*). Es gilt daher für eine solche Kurve auch nicht der Satz 5).

Bei einer *einfachen geschlossenen Kurve* bleibt man jedoch mit allen Konstruktionen im Endlichen. Diese für die folgenden Schlüsse wichtige Tatsache zeigt die Zweckmäßigkeit der hier gewählten Gebietsteilung. Sie versteht sich jedoch nicht von selbst und bedurfte eines ausführlichen Beweises, und dies um so mehr, als sie sich als die wesentliche Quelle der weiteren Resultate erweisen wird.

§ 9.

Eine Eigenschaft der Bereiche S_N bei unbegrenzt wachsendem ν.

Ich leite nunmehr einige Eigenschaften der Gebietsteilung ab, die sich auf die Bereiche S_N bei unbegrenzt wachsendem ν beziehen.

Ist die Menge $\mathfrak{T}$ keine einfache geschlossene Kurve, so kann es unendlich viele Bereiche S_N geben, die ein punktfreies Intervall von gegebener Länge enthalten. Ein einfaches Beispiel einer solchen Menge bildet z. B. die Kurve $y = \sin\frac{1}{x}$ **). Für eine einfache geschlossene Kurve trifft dies jedoch nicht zu. Vielmehr besteht der Satz:

6) *Bei einer einfachen geschlossenen Kurve haben die Bereiche S_N der Gebietsteilung die Eigenschaft, daß mit wachsendem ν die Länge der auf ihnen liegenden punktfreien Intervalle unter jede Grenze sinkt.*

Der Beweis dieses Satzes ist etwas umständlich, weil es sich nämlich

*) Es ist nicht schwierig, sich derartige Kurven herzustellen; das in § 3 aus Fig. 2 abgeleitete Polygon stellt bereits eine derartige Kurve dar.

**) Auch das in § 2 erwähnte aus Figur 2 abgeleitete Polygon bildet bereits ein Beispiel einer solchen Menge.

wieder darum handelt, diejenigen Punktmengen auszuscheiden, für die der Satz nicht zutrifft. Wir beweisen ihn wie folgt:

Träfe der Satz nicht zu, so gäbe es für unendlich viele Indizes

$$\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_\varrho, \cdots$$

mindestens je einen Bereich

$$S_{N_1}, S_{N_2}, \cdots S_{N_\varrho}, \cdots$$

der ein punktfreies Intervall enthielte, das größer als $2d$ ist. Dabei genügt es, Intervalle, die aus zwei oder drei Strecken bestehen, nur dann hierher zu rechnen, wenn mindestens eine dieser Strecken größer als $2d$ ist. Ich bezeichne diese Strecken jetzt durch r_ϱ. Es gibt dann auch unendlichviele dieser Strecken, die der x-Achse oder der y-Achse parallel laufen; es sei die x-Achse.

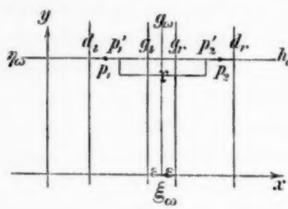


Fig. 17.

Wir projizieren wieder (Fig. 17) die Mittelpunkte μ_ϱ der Strecken r_ϱ in die Punkte ξ_ϱ der x-Achse. Diese Punkte haben mindestens eine Häufungsstelle ξ_ω; durch sie legen wir parallel zur y-Achse die Gerade g_ω. Man bestimme nun wieder zwei Geraden g_l und g_r durch die Gleichungen

$$x = \xi_\omega - \varepsilon, \qquad x = \xi_\omega + \varepsilon$$

und projiziere die zwischen ihnen liegenden Punkte μ_ϱ auf die y-Achse, so haben auch diese Projektionspunkte mindestens eine Grenzstelle η_ω, und es gibt unter ihnen unendlichviele Punkte

$$\eta', \eta'', \eta''', \cdots \eta^{(\sigma)}, \cdots$$

die sich in der vorstehenden Reihenfolge von derselben Seite her gegen η_ω verdichten. Seien

$$\mu', \mu'', \cdots \mu^{(\sigma)}, \cdots$$

die zugehörigen Halbierungspunkte und

$$R', R'', \cdots R^{(\sigma)}, \cdots$$

die entsprechenden Bereiche.

Man bestimme nun noch zwei Geraden d_l und d_r durch die Gleichungen

$$x = \xi_\omega - d + \varepsilon \quad \text{und} \quad x = \xi_\omega + d - \varepsilon,$$

so werden die sämtlichen Bereiche $R^{(\sigma)}$ den Streifen zwischen d_l und d_r durchsetzen und sich gegen eine durch η_ω gehende Gerade h_ω verdichten. Die zwischen d_l und d_r liegenden Punkte von h_ω können daher nicht zu $\mathfrak{M}$ gehören; dies steht, wie leicht ersichtlich, damit im Widerspruch, daß es für jeden Punkt von $\mathfrak{M}$ gemäß § 8 einen angebbaren Bereich S_N gibt, der ihn im Innern oder auf dem Umfang enthält.

Es müßte daher das ganze zwischen d_l und d_r liegende Stück von h_ω zu $\mathfrak{T}$ gehören. Man wähle zwei seiner Punkte p_1 und p_2, die symmetrisch zu g_ω liegen, und verbinde sie mit einem *inneren* Punkt i und mit einem *äußeren* Punkt a durch je einen inneren resp. äußeren Weg. Analog wie in § 8 schließt man dann, daß die beiden Polygone $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_a$, die durch $p_1 p_2$ und diese Wege bestimmt werden, nur *innere* resp. nur *äußere* Punkte enthalten. Sie liegen daher auf *verschiedenen* Seiten von h_ω, und zwar möge $\mathfrak{p}_i$ auf derselben Seite liegen, wie die Bereiche $R^{(\sigma)}$. Nun seien p_1' und p_2' zwei zwischen p_1 und p_2 symmetrisch zu g_ω gelegene Punkte, so gibt es für die Punkte von $p_1' p_2'$ ein von Null verschiedenes Minimum ϱ ihrer Abstände von den Wegen, die i mit p_1 und p_2 verbinden. Zieht man daher im Abstand ϱ', so daß $\varrho' < \varrho$ und zugleich $\varrho' < p_1 p_2$ ist, eine das Polygon $\mathfrak{p}_i$ durchsetzende Parallele zu h_ω, so wird durch sie und $p_1' p_2'$ ein Rechteck $\mathfrak{r}$ bestimmt, dessen Inneres zu $\mathfrak{M}$ gehört und dieses Rechteck würde von unendlich vielen Bereichen $R^{(\sigma)}$ durchkreuzt. Dies ist aber, wie wir sofort zeigen, unmöglich.

Mögen nämlich unter ihnen zunächst unendlich viele enthalten sein, für welche die Seite, die die Strecke r_λ enthält, näher zu h_ω liegt als die Gegenseite und sei $R^{(\lambda)}$ einer von ihnen. Falls nun für das punktfreie Intervall, dem r_λ angehört, der Konstruktionspunkt $m^{(\lambda)}$ in den Mittelpunkt fällt, so wird er bei hinreichend großem λ zwischen g_l und g_r enthalten sein, und der zugehörige Bereich müßte bis h_ω heranreichen. Es entsteht also ein Widerspruch. Fällt er nicht in den Mittelpunkt des Intervalls, so kann der zugehörige Bereich zunächst außerhalb des Rechtecks $\mathfrak{r}$ liegen; wir nehmen an, es sei rechts von $\mathfrak{r}$. Gemäß Satz I. von § 7 gibt es aber einen Bereich, der in $\mathfrak{r}$ eindringt, und falls er nicht bis h_ω heranreicht, wird er das Rechteck durchsetzen. Auf der das Rechteck $\mathfrak{r}$ durchziehenden Seite liegt dann rechts von $\mathfrak{r}$ ein Punkt t, und diese Seite enthält ein punktfreies Intervall, das $\mathfrak{r}$ durchzieht. Fällt dessen Konstruktionspunkt innerhalb $\mathfrak{r}$, so reicht der zugehörige Bereich bis h_ω. Fällt er außerhalb $\mathfrak{r}$, so gibt es einen Bereich, der in $\mathfrak{r}$ eindringt, und entweder bis h_ω heranreicht, oder $\mathfrak{r}$ durchsetzt; man gelangt also entweder zu einem bis h_ω sich erstreckenden Bereich oder zu einer unendlichen Folge angrenzender Bereiche, die $\mathfrak{r}$ durchsetzen, was in § 7 ebenfalls als unmöglich erkannt wurde.

Gibt es schließlich nur eine endliche Zahl von Bereichen, für welche die Strecke r_λ näher an h_ω liegt, als die Gegenseite, so gibt es unendlich viele, bei denen die Strecke r_λ den größeren Abstand von h_ω hat als die Gegenseite. Sind $R^{(\lambda)}$ und $R^{(\mu)}$ zwei von ihnen, so wiederhole man die vorstehenden Schlüsse für das zwischen $R^{(\lambda)}$ und $R^{(\mu)}$ liegende Gebiet. Bei hinreichend großem λ würde folgen, daß Bereiche existieren, die bis

in den Bereich $R^{(\lambda)}$ hineinreichen, oder aber die durch § 7 ausgeschlossene Lage besitzen. Damit ist der bezügliche Satz bewiesen.

Aus dem somit bewiesenen Satz zieht man endlich die Folgerung, daß *auch die Seiten der Bereiche S_N mit wachsendem ν gegen Null konvergieren.* Daß dies für den Flächeninhalt der Fall ist, ist klar; für jede einzelne Seite bedarf es des Beweises.

Gäbe es unendlich viele Bereiche, bei denen eine Seite größer ist als $2d$, so gäbe es wieder unendlich viele, bei denen diese Seite derselben Achse parallel ist; sei es die x-Achse. Man projiziere wieder die Mittelpunkte dieser Seiten auf die x-Achse, und betrachte einen Grenzpunkt ξ_ω der so entstehenden Punktmenge. Wie oben, schließt man, daß die Bereiche, für welche die Projektionen ihrer Konstruktionspunkte $\mu^{(\varrho)}$ nahe bei ξ_ω liegen, gegen mindestens eine Gerade h_ω konvergieren müßten; auf ihr gäbe es wieder ein Stück, das zu $\mathfrak{T}$ gehörte, und ein wie vorstehend bestimmtes Rechteck $\mathfrak{r}$, dessen Inneres zu $\mathfrak{M}$ gehören müßte und das von unendlich vielen Bereichen $R^{(\sigma)}$ durchsetzt würde. Innerhalb von $\mathfrak{r}$ müßten aber andererseits Punkte t liegen, da die punktfreien Intervalle, die auf den Bereichen $R^{(\sigma)}$ enthalten sind, mit wachsendem Index, wie eben bewiesen, unter jede Grenze sinken. Also folgt:

7) *Bei einer einfachen geschlossenen Kurve haben die Bereiche S_N der zugehörigen einfachen Gebietsteilung die Eigenschaft, daß mit wachsendem ν jede ihrer Seiten unendlich klein wird.*

§ 10.

Die in $\mathfrak{T}$ überalldichte Teilmenge $\mathfrak{T}_r$.

Im § 6 haben wir eine unendliche Folge von Polygonen

$$\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \mathfrak{P}'', \cdots, \mathfrak{P}^{\nu-1} \cdots,$$

sowie die auf ihnen gelegenen Intervallmengen

$$\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \cdots, \mathfrak{S}_\nu \cdots$$

eingeführt, und zwar besteht $\mathfrak{S}_\nu = \{s_N\}$ aus einer *endlichen* Menge konsekutiver Intervalle, die den Umfang des Polygons $\mathfrak{P}^{(\nu-1)}$ bilden, und zu der jedenfalls *alle auf $\mathfrak{P}^{(\nu-1)}$ liegenden punktfreien Intervalle $s_i^{(\nu)} \geqq \varepsilon_\nu$ gehören.* Die Endpunkte dieser Intervalle sind Punkte von $\mathfrak{T}$; sie mögen die Menge $\mathfrak{T}_\nu$ konstituieren. Es ist dann $\mathfrak{T}_\nu$ eine Teilmenge von $\mathfrak{T}_{\nu+1}$. Sei nun $\mathfrak{T}_r$ diejenige Menge, die alle Mengen $\mathfrak{T}_\nu$ enthält, sodaß

$$\mathfrak{T}_r = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{T}_\nu \tag{1}$$

ist, so ist $\mathfrak{T}_r$, wie sich zeigen wird, eine *in $\mathfrak{T}$ überall dichte* Menge, aus der durch Hinzufügung ihrer Grenzpunkte die Menge $\mathfrak{T}$ hervorgeht.

Dieser Beweis folgt, was ich vorausschicke, aus der oben gewählten Bezeichnungsweise der in $\mathfrak{S}_\nu$ eingehenden Intervalle s_N. Sie stellt eine Erweiterung des Dezimalsystems dar, und zwar in der Weise, daß die Basis beliebig ist und von Stelle zu Stelle wechseln kann*); auch können, wie im Dezimalsystem, die endlichen Brüche, die die Menge $\mathfrak{T}_r$ darstellen, als unendliche Brüche geschrieben werden. Die in § 6 eingeführte Bezeichnungsweise in Verbindung mit den Sätzen von § 9 liefert damit den geometrischen Ersatz für das im Gebiet der Analysis unmittelbar gegebene Dezimalsystem. Dies beweist ihre innere Zweckmäßigkeit, ja vielleicht Notwendigkeit; sie ist die Quelle, aus der die behauptete Eigenschaft von $\mathfrak{T}_r$ fließt. Die Konstruktion dieser Intervalle s_N und der in § 6 resp. § 9 enthaltene Nachweis ihrer formalen und materiellen Analogie mit dem Dezimalsystem dürfte das hauptsächlichste Hülfsmittel darstellen, das für die vorliegenden Untersuchungen zu schaffen war.

Die hiermit angedeutete Beziehung der Punkte von $\mathfrak{T}_r$ zu den Intervallen s_N wollen wir nunmehr genauer untersuchen resp. begründen.

Gemäß der über $\mathfrak{T}$ gemachten Annahme läßt sich *jeder* Punkt t mit dem Ausgangspunkt m der Gebietsteilung durch einen Weg $\mathfrak{l}$ verbinden, der, falls er unendlich viele Strecken enthält, in t seinen *einzigen* Grenzpunkt besitzt. Der Punkt m kann sowohl zu $\mathfrak{A}$ als auch zu $\mathfrak{J}$ gehören; wir werden für das folgende m als *inneren* Punkt wählen. Er liegt damit *innerhalb* aller Polygone $\mathfrak{P}^{(\nu)}$.

Liegt zunächst t *nicht* auf dem Umfang eines Polygones $\mathfrak{P}^{(\nu)}$, so wird der Weg $\mathfrak{l}$ *jedes* Polygon $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ kreuzen. Falls nötig, läßt er sich so reduzieren, daß er $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ nur *einmal* kreuzt; hierzu genügt es, m mit dem letzten Kreuzungspunkt von $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ durch einen innerhalb $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ verlaufenden Weg zu verbinden. Auf dem Umfang des Polygons $\mathfrak{P}^{(\nu-1)}$ sei s_N dasjenige Intervall, das den Kreuzungspunkt enthält, und p_N der Kreuzungspunkt, so wird durch den Weg eine unendliche Reihe von Intervallen

$$(2) \qquad s_i,\ s_{ik},\ s_{ikl},\ \cdots,\ s_N\ \cdots$$

definiert, und eine unendliche Folge von Punkten

$$(3) \qquad p_i,\ p_{ik},\ p_{ikl},\ \cdots,\ p_N,\ \cdots,$$

die nach Annahme in t ihren *einzigen* Grenzpunkt besitzen.

Die hier definierte Intervallfolge ist durch t *eindeutig* bestimmt. Gehörte nämlich zu einem von m nach t führenden Weg $\mathfrak{l}'$ die Intervallfolge

$$s_i',\ s_{ik}',\ s_{ikl}',\ \cdots,\ s_N',\ \cdots,$$

*) Eine solche bewußte Verallgemeinerung des Dezimalsystems dürfte sich zuerst bei Strauß finden, Acta math. Bd. 11, S. 13. Vgl. auch Brodèn, Math. Ann. Bd. 51, S. 302, sowie meinen Bericht über Mengenlehre, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. Bd. 8, 2, S. 102.

und wären für irgend ein ν die Intervalle s_N und s_N' verschieden, so würden die Wege $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ ein Polygon bestimmen, das mindestens einen auf dem Umfang von $\mathfrak{P}^{(\nu-1)}$ gelegenen Punkt von $\mathfrak{T}$ einschließt. Kreuzen sich nämlich $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ zwischen $\mathfrak{P}^{(\nu-1)}$ und t, so wäre dies ein gewöhnliches Polygon, kreuzen sich $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ nicht, ein Polygon mit dem Grenzpunkt t. Damit ist die Eindeutigkeit der Intervallfolge 2) erwiesen.

Dasselbe ist der Fall, wenn t auf dem Umfang des Polygons $\mathfrak{P}^{(\lambda-1)}$ liegt, aber nicht zur Menge $\mathfrak{T}_r$ gehört. Alsdann kann man t mit m durch einen gewöhnlichen Streckenzug verbinden, und erhält so eine zunächst endliche Reihe von Intervallen

$$(4) \qquad s_i,\ s_{ik},\ \cdots,\ s_L;$$

und zwar ist t *innerer* Punkt von s_L. Andererseits ist t in diesem Fall *gemeinsamer* Punkt aller Polygone

$$(5) \qquad \mathfrak{P}^{(\lambda-1)},\ \mathfrak{P}^{(\lambda)},\ \mathfrak{P}^{(\lambda+1)},\ \cdots,\ \mathfrak{P}^{(\lambda+\nu)},\ \cdots$$

und jedes dieser Polygone enthält ein wohldefiniertes Intervall, dem t als innerer Punkt angehört. Es wird also auch in diesem Fall durch t eine Intervallfolge

$$(6) \qquad s_i,\ s_{ik},\ \cdots,\ s_L,\ s_{Li},\ s_{Lik},\ \cdots$$

bestimmt; daß sie eindeutig ist, bedarf hier keines besonderen Beweises. Also folgt:

8) *Jeder Punkt t, der nicht zu $\mathfrak{T}_r$ gehört, bestimmt eindeutig eine Intervallfolge* $\{s_N\}$ *).

Wenn dagegen t ein Punkt von $\mathfrak{T}_r$ ist, so ist er *gemeinsamer Punkt* zweier auf einem Polygon $\mathfrak{P}^{(\lambda-1)}$ liegenden Intervalle s_L und $s_{L'}$. Er ist auch in diesem Fall auf allen Polygonen 5) enthalten, und bestimmt zunächst wieder die endliche Reihe 4). Jetzt kann man aber diese Reihe auf zwei verschiedene Arten zu einer unendlichen Reihe ergänzen. Sei t *Anfangspunkt* des Intervalles s_L, wo dies Intervall die in § 6 definierte Richtung hat. Es kann dann s_L auch noch dem Umfang von $\mathfrak{P}^{(\lambda)}$ angehören, alsdann erhält es gemäß § 6 die Bezeichnung s_{L0}. Gehört aber s_L nicht dem Umfang von $\mathfrak{P}^{(\lambda)}$ an, so entsteht aus ihm ein zu $\mathfrak{P}^{(\lambda)}$ gehöriger Linienzug, und dieser wird gemäß § 6 entweder ebenfalls durch s_{L0} bezeichnet, — falls er nämlich kein punktfreies Intervall enthält, das der Menge $\mathfrak{S}_{\lambda+1}$ angehört —, oder aber er zerfällt in gewisse Intervalle s_{Li}.

*) Man kann diesen Satz als eine Ausdehnung des in § 7 angeführten Satzes ansehen, daß zwei Bereiche S_M und S_N keinen Punkt gemein haben. Der Satz von § 7 gilt dann für Punkte von $\mathfrak{T}_r$, der obenstehende auch für Punkte von $\mathfrak{T}$.

Dann wird t Anfangspunkt von s_{L1} sein. In analoger Weise behandelt man das so bestimmte Intervall s_{L0} resp. s_{L1}. Man erhält also auch hier eine unendliche Folge von Intervallen

$$(7) \qquad s_L, s_{Li}, s_{Lik}, \cdots, s_{LN}, \cdots$$

wo alle Indices $i, k, l, \cdots$, 0 oder 1 sind, sodaß t gemeinsamer Anfangspunkt aller dieser Intervalle ist. Das gleiche ergibt sich für das Intervall $s_{L'}$, nur mit der Maßgabe, daß in diesem Fall statt s_{L1} das Intervall $s_{L'\mu}$ zu wählen ist, wo (§ 6) μ den größten zulässigen Index darstellt. Die so bestimmte Intervallreihe sei wieder

$$(7a) \qquad s_{L'}, s_{L'i}, s_{L'ik}, \cdots, s_{L'N}, \cdots$$

wo $i, k, \cdots$ diesmal 0 sind oder den größten zulässigen Index bedeuten. Man hat also hier zwei unendliche Folgen von Intervallen, die beide den Punkt t bestimmen. Also folgt:

9) *Jeder Punkt von $\mathfrak{T}_r$ bestimmt zwei verschiedene Folgen von Intervallen $\{s_N\}$, von der Art, daß von einem gewissen Glied an t gemeinsamer Endpunkt aller dieser Intervalle ist.*

Von den Intervallen s_N der durch t bestimmten Folgen läßt sich zeigen, daß sie mit wachsendem ν unendlich klein werden. Gemäß Satz 6 bedarf dies nur für diejenigen Intervalle s_N eines Beweises, die (§ 6) nicht selbst punktfreie Intervalle $s_i^{(\nu)} \geqq \varepsilon_\nu$ sind, sondern zwischen je zwei solchen konsekutiven Intervallen liegen. Ist s_N ein solches, so enthält es eine endliche oder unendliche Menge punktfreier Intervalle $s_i^{(\nu)} < \varepsilon_\nu$. Sei s' das größte von ihnen, so gibt es eine kleinste Zahl ϱ, sodaß $s' \geqq \varepsilon_\varrho$ ist; daher wird s' ein Intervall s_R der Menge $\mathfrak{S}_\varrho$, und es zerfällt s_N in mindestens zwei Intervalle s_R und $s_{R'}$. Mit jedem dieser Intervalle tritt für einen gewissen Index σ resp. σ' das gleiche ein. Da nun die Intervalle $s_i^{(\nu)}$ auf s_N überall dicht liegen, so kann es keinen Teil von s_N geben, der bei allen Zerfällungen als Ganzes erhalten bleibt; woraus die Behauptung folgt, d. h.:

10) *Die Intervalle s_N der Mengen $\mathfrak{S}_\nu$ werden mit wachsendem ν unendlich klein.*

Beachtet man nun, daß ein Punkt t entweder Endpunkt resp. Grenzpunkt der auf den Intervallen s_N liegenden Punkte p_N war, oder daß diese Intervalle von einem bestimmten an den Punkt t als gemeinsamen Endpunkt besitzen, so folgt noch, daß t in *allen* Fällen Grenzpunkt von Endpunkten von Intervallen s_N, also von Punkten von $\mathfrak{T}_r$ ist. Also folgt

IV. *Die Endpunkte aller auf den sämtlichen Bereichen S_N liegenden punktfreien Intervalle $\{s_i^{(\nu)}\}$ bestimmen eine in $\mathfrak{T}$ überall dichte Menge $\mathfrak{T}_r$.*

Die Beziehung zwischen den Intervallen s_N und den Punkten von $\mathfrak{T}$ findet ihren Abschluß durch folgenden Satz:

V. *Jeder Folge* $\{s_N\}$ *von Intervallen*

$$s_i,\ s_{ik},\ s_{ikl},\ \cdots,\ s_N,\ \cdots$$

entspricht ein und nur ein Punkt von $\mathfrak{T}$.

Wie wir eben sahen, wird mit wachsendem ν jedes Intervall s_N unendlich klein. Da aber gemäß § 9, Satz 7 auch Breite und Höhe der Bereiche S_N mit wachsendem ν unendlich klein werden, so wird auch der Abstand der Intervalle der obigen Folge zuletzt unendlich klein, also auch der Abstand ihrer Endpunkte. Diese Endpunkte gehören zu $\mathfrak{T}$, sie bestimmen daher zum mindesten einen Grenzpunkt, der als solcher ebenfalls zu $\mathfrak{T}$ gehört. Falls nun die Intervalle s_N von einem bestimmten Glied an einen gemeinsamen Endpunkt besitzen, so bestimmen sie diesen Punkt, und nur diesen. Ist dies nicht der Fall, so schließt man die Eindeutigkeit des zu ihnen gehörigen Punktes t folgendermaßen. Die Folge 6) bestimmt mindestens einen Punkt von $\mathfrak{T}$; er sei t' und gehört nicht zu $\mathfrak{T}_r$. Andrerseits gehört zu t' eine und nur eine Folge; diese ist daher mit 6) identisch. Zu der durch t' bestimmten Folge gelangten wir aber oben so, daß wir einen Weg $\mathfrak{l}$ legten, der gewisse Punkte p_N und damit die sie enthaltenden Intervalle s_N definierte, und in t' seinen *einzigen* Grenzpunkt besitzt. Da nun die Intervalle s_N mit wachsendem ν unendlich klein werden, so besitzen ihre Endpunkte denselben Grenzpunkt, wie die Punkte p_N, also auch nur einen, womit der Satz bewiesen ist.

§ 11.

Die umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung der einfachen geschlossenen Kurve auf den Kreis.

Um den Punkt m, der den Konstruktionspunkt des Bereiches S bildet, legen wir einen Kreis $\mathfrak{K}$, der innerhalb S liegt, und bilden ihn folgendermaßen auf die Menge $\mathfrak{T}$ ab.

Gemäß § 6 liegen auf dem Umfang von S die λ konsekutiven Intervalle

(1) $$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \cdots,\ s_\lambda,$$

deren Endpunkte die Teilmenge $\mathfrak{T}_1$ von $\mathfrak{T}$ bilden. Wir verbinden die Punkte von $\mathfrak{T}_1$ mit m; sie zerfällen den Kreis in λ *konsekutive* Kreisbögen, die wir durch

(2) $$k_1,\ k_2,\ k_3,\ \cdots,\ k_\lambda$$

bezeichnen. Ihre Endpunkte mögen die Menge $\mathfrak{K}_1$ bilden. Diese Menge $\mathfrak{K}_1$ beziehen wir so auf $\mathfrak{T}_1$, daß den Endpunkten von k_i die Endpunkte von s_i zugeordnet werden.

Beim Übergang von S zu $\mathfrak{P}'$ entsteht nach § 6 aus einem Intervall s_i entweder ein einziges Intervall s_{i0}, das auch mit s_i identisch sein kann, und stets dieselben Endpunkte hat wie s_i, oder es gehen aus ihm die μ Teilintervalle

$$s_{i1},\ s_{i2},\ \cdots,\ s_{i\mu}$$

hervor. Die Endpunkte aller so aus den Intervallen s_i abgeleiteten Intervalle s_{ik} bilden die Teilmenge $\mathfrak{T}_2$ von $\mathfrak{T}$. Demgemäß soll, falls aus s_i ein s_{i0} entsteht, k_i durch k_{i0} bezeichnet werden, sodaß $k_i = k_{i0}$ ist; im andern Fall teilen wir den Bogen k_i in μ der Einfachheit halber gleiche Teile

$$k_{i1},\ k_{i2},\ \cdots,\ k_{i\mu}.$$

Die Endpunkte aller dieser aus den Kreisbögen k_i entstehenden Bögen k_{ik} bilden die Menge $\mathfrak{K}_2$; wir beziehen sie so auf $\mathfrak{T}_2$, daß den Endpunkten von s_{ik} die Endpunkte von k_{ik} entsprechen.

In dieser Weise fahren wir fort; es entstehen so die auf dem Kreis $\mathfrak{K}$ liegenden Mengen

$$\mathfrak{K}_1,\ \mathfrak{K}_2,\ \cdots,\ \mathfrak{K}_\nu,\ \cdots \tag{3}$$

die den auf den Polygonen $\mathfrak{P}^{(\sigma)}$ liegenden Mengen

$$\mathfrak{T}_1,\ \mathfrak{T}_2,\ \cdots,\ \mathfrak{T}_\nu,\ \cdots \tag{4}$$

entsprechen. Wird insbesondere durch

$$\mathfrak{K}_r = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{K}_\nu \tag{5}$$

die Menge bezeichnet, die alle $\mathfrak{K}_\nu$ enthält, so sind die Mengen $\mathfrak{K}_r$ und $\mathfrak{T}_r$ eineindeutig aufeinander bezogen.

Von der Menge $\mathfrak{T}_r$ haben wir bereits gesehen, daß sie (§ 10) eine in $\mathfrak{T}$ überall dichte Menge ist, das gleiche gilt aber auch für die Menge $\mathfrak{K}_r$ in Bezug auf den Kreis $\mathfrak{K}$. Um dies nachzuweinen, ist nur zu zeigen, daß es keine Folge $\{s_N\}$ gibt, bei der sich schließlich dauernd der neue Index 0 einstellt. Dies ergibt sich leicht als Folge der in § 6 enthaltenen Konstruktionsvorschrift, und zwar folgendermaßen.

Gemäß § 6 kann das Intervall s_N auf drei verschiedene Arten in ein Intervall s_{N0} übergehen. Es kann zunächst s_N einen Punkt m_N enthalten, doch so, daß der aus s_N entstehende Linienzug von $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ ein einziges Intervall s_{N0} bildet. Auf diesem Linienzug liegt dann ein *größtes* punktfreies Intervall s' und es existiert ein Index ϱ, sodaß $s' \geqq \varepsilon_\varrho$ ist, also gemäß § 6 s' ein Intervall der Menge $\mathfrak{S}_\varrho$ wird. In diesem Fall ist dann

ϱ derjenige Index, sodaß der bezügliche Linienzug zwar noch in die Menge $\mathfrak{S}_{\varrho-1}$, aber nicht mehr in die Menge $\mathfrak{S}_\varrho$ als *ganzes* Intervall eingeht; beim Übergang von $\mathfrak{S}_{\varrho-1}$ zu $\mathfrak{S}_\varrho$ zerfällt er daher in mindestens zwei Intervalle, deren eines s' ist.

Analog ist es, wenn s_N selbst ein punktfreies Intervall einer gewissen Menge $\mathfrak{S}_\varrho$ darstellt. Beim Übergang von $\mathfrak{S}_\varrho$ zu $\mathfrak{S}_{\varrho+1}$ entsteht dann aus ihm ein Linienzug, der entweder selbst aus mehreren Intervallen von $\mathfrak{S}_{\varrho+1}$ besteht, oder aber unter die vorstehende Betrachtung fällt.

Wenn endlich s_N nicht selbst ein Intervall s_ϱ darstellt, so enthält es wieder ein größtes Intervall s', das einer Menge $\mathfrak{S}_\varrho$ angehört; es wird daher s_N als ganzes Intervall zwar noch der Menge $\mathfrak{S}_{\varrho-1}$, aber nicht mehr der Menge $\mathfrak{S}_\varrho$ angehören.

Jeder Kreisbogen k_N muß daher für einen angebbaren Index ϱ in mindestens zwei gleiche Kreisbögen zerfallen, woraus der überall dichte Charakter der Menge $\mathfrak{K}_r$ hervorgeht.

Aus der eineindeutigen Beziehung der Mengen $\mathfrak{K}_r$ und $\mathfrak{T}_r$ kann ihre umkehrbar stetige Beziehung leicht geschlossen werden. Sei nämlich t ein Punkt von $\mathfrak{T}$, der nicht zu $\mathfrak{T}_r$ gehört, und seien

(6) $$\{t_r^{(\varrho)}\} = t_r,\ t'_r,\ t''_r,\ \cdots,\ t_r^{(\varrho)},\ \cdots$$

irgend welche Punkte von $\mathfrak{T}_r$, deren Grenzpunkt t ist. Alsdann gibt es notwendig ein λ, sodaß t_r einem Intervall s'_L als Endpunkt angehört, ebenso ein μ, sodaß t_r' Endpunkt eines Intervalles s'_M ist, usw. Durch die Folge $\{t_r^{(\varrho)}\}$ wird daher eine Folge von Intervallen

(7) $$s'_L,\ s'_M,\ \cdots,\ s'_R,\ \cdots$$

definiert, deren Endpunkte nach Annahme gegen t konvergieren. Andrerseits gehört zu t auch eine Folge

(8) $$s_i,\ s_{ik},\ \cdots,\ s_{ikl},\ \cdots,\ s_N,\ \cdots$$

und diese Folge enthält gewisse Intervalle

(9) $$s_L,\ s_M,\ \cdots,\ s_R,\ \cdots,$$

bei denen die Indicesanzahlen mit denen der Folge (7) übereinstimmen. Um die Beziehung zur Menge $\mathfrak{K}_r$ herzustellen, hat man die Folge (7) in die Form (8) überzuführen; dies kann auf folgende Weise geschehen.

In der Folge (9) ist der erste Index konstant; er sei i. Für die Folge (7) braucht dies nicht der Fall zu sein; es ist aber ausgeschlossen, daß ein von i verschiedener *erster* Index i' unendlich oft in ihr vorkommt. Wäre dies der Fall und wären

$$s',\ s'',\ s''',\ \cdots\ s^{(\varrho)},\ \cdots$$

die zugehörigen Intervalle, so müßten auch sie gegen t konvergieren, also auch irgend welche auf ihnen gelegenen Punkte $p^{(\varrho)}$; zugleich wäre t der einzige Grenzpunkt dieser Punkte. Sie müßten daher einen Weg $\mathfrak{l}'$ bestimmen, der von m nach t führt. *Aber dieser Weg kreuzt den Bereich S nicht auf demjenigen Intervall, wie der zur Folge* (8) *gehörige Weg* $\mathfrak{l}$; die Wege $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ würden also ein Polygon bilden, das einen Punkt von $\mathfrak{T}$ im Innern enthielte, was unmöglich ist. Daher muß in (7) der erste Index von einem bestimmten Glied an derselbe Index i sein, wie in (9) resp. (8). Damit ist der erste Index der Folge (8) bestimmt.

Man tilge jetzt aus (7) diejenigen Intervalle, die nicht den Index i enthalten. Von der übrigbleibenden Folge beweist man dann genau wie eben, daß sie nur eine endliche Zahl von Intervallen enthält, deren zweiter Index von dem zweiten Index k der Folge (8) verschieden ist. Für die Folge (7) existiert also ein angebbares Intervall, von dem an alle folgenden Intervalle die nämlichen Indices i und k enthalten, wie die Intervalle von (8), womit auch k bestimmt ist. In dieser Weise kann man fortfahren und so beliebig viele Indices von (8) bestimmen. Damit ist (7) in (8) übergeführt.

Den Intervallen von (8) entsprechen auf dem Kreis $\mathfrak{K}$ die Kreisbögen

(10) $$k_i,\ k_{ik},\ k_{ikl},\ \cdots,\ k_N,\ \cdots,$$

die gegen *einen* bestimmten Punkt k konvergieren. Gegen diesen Punkt konvergieren nun auch die Punkte

(11) $$k'_r,\ k''_r,\ \cdots,\ k_r^{(\varrho)},\ \cdots\ .$$

Wegen der eineindeutigen Beziehung der Mengen $\mathfrak{K}_r$ und $\mathfrak{T}_r$ sind nämlich diese Punkte Endpunkte der Intervalle

(12) $$k_{L'},\ k_{M'},\ \cdots,\ k_{R'},\ \cdots,$$

deren Indices mit denen der Folge (7) übereinstimmen. Da in ihr von einem bestimmten Gliede an der erste Index den Wert i hat, so sind die Kreisbögen von (12) von einem bestimmten Glied an sämtlich Teilbögen von k_i. Von einem andern Glied an sind sämtliche Kreisbögen von (12) Teilbögen von k_{ik} usw. Demnach bestimmen die Folgen (10), (11) und (12) denselben Punkt k. Es entspricht daher einem Punkt t, welches auch die ihn darstellende Folge sei, ein und nur ein Punkt k.

Analog gestaltet sich der Beweis in dem Fall, daß der durch die Folge $\{t_r^{(\varrho)}\}$ definierte Punkt t zur Menge $\mathfrak{T}_r$ gehört. Auch hier wird durch den Punkt t eine Folge (7) bestimmt; von ihr beweist man, daß ihre Indices von einem bestimmten Gliede an mit den Indices mindestens einer der beiden Folgen übereinstimmen, die in diesem Fall dem Punkte t entsprechen (§ 10).

In derselben Weise kann man zeigen, daß jedem Punkt k des Kreises $\mathfrak{K}$ ein und nur ein Punkt von $\mathfrak{T}$ zugehört. Der Beweis, daß eine Folge von der Form (7) immer eine Folge von der Form (8) bestimmt, gestaltet sich ebenso, wie der vorstehende.

Die Mengen $\mathfrak{K}_r$ und $\mathfrak{T}_r$ stehen also in der Beziehung, daß jedem Grenzelement der einen Menge ein und nur ein Grenzelement der anderen entspricht, womit die gegenseitige stetige Beziehung erwiesen ist. Also folgt:

VI. *Jede einfache geschlossene Kurve läßt sich umkehrbar eindeutig und stetig auf die Punkte eines Kreises abbilden.*

Über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz in der Theorie des Maximums und Minimums der einfachen Integrale.*)

Von

A. Mayer in Leipzig.

In seinen hochinteressanten *„Mathematischen Problemen"* hat Hilbert u. a. auch eine vielversprechende neue Methode zur Ableitung der Kriterien des Maximums und Minimums der ein- und mehrfachen Integrale angedeutet.**) Grundlegend für diese neue Methode ist ein Satz, der im einfachsten Problem der Variationsrechnung, wo es sich um den größten oder kleinsten Wert eines gegebenen Integrales:

$$J \equiv \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx, \qquad \left(y' \equiv \frac{dy}{dx}\right),$$

bei festen Grenzwerten von x und y handelt, also lautet:

Hat man von der Differentialgleichung zweiter Ordnung des Problems diejenige einfach unendliche Schar von Lösungen:

$$y = Y(x, a)$$

gefunden, welche für $x = x_0$ den vorgeschriebenen festen Wert y_0 annimmt, so braucht man nur noch die Differentialgleichung erster Ordnung:

$$y' = p(x, y)$$

zu bilden, deren vollständige Lösung durch jene Schar dargestellt wird, um in der Funktion $p = p(x, y)$ zugleich eine solche Funktion gewonnen zu haben, die den Ausdruck:

$$f(x, y, p) + (y' - p)\frac{\partial f(x, y, p)}{\partial p}$$

zu einem vollständigen Differentialquotienten, und damit infolge der vorgeschriebenen Grenzwerte, das Integral:

---

*) Abgedruckt aus den Leipziger Berichten vom 4. Mai 1903.

**) Göttinger Nachrichten 1900, p. 291—296.

$$J^* \equiv \int_{x_0}^{x_1} \left\{ f(x, y, p) + (y' - p) \frac{\partial f(x, y, p)}{\partial p} \right\} dx$$

(solange die Funktion unter dem Integralzeichen stetig bleibt) unabhängig macht von der Wahl der Funktion y von x.

Im folgenden handelt es sich darum, diesen Hilbertschen Unabhängigkeitssatz auszudehnen auf das allgemeinere Problem:

Unter allen Funktionen $y_1, \cdots, y_n$ von x, die $r < n$ gegebenen, in Bezug auf die Differentialquotienten $y_1', \cdots, y_n'$ voneinander unabhängigen Bedingungsgleichungen

$$f_\varrho(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n') = 0 \qquad \varrho = 1, 2, \cdots, r$$

genügen, in den beiden gegebenen Grenzen x_0 und $x_1 > x_0$ feste Werte besitzen, und zwischen diesen Grenzen mit ihren ersten Differentialquotienten stetig bleiben, diejenigen zu finden, welche dem gegebenen Integrale:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n')\, dx$$

einen größten oder kleinsten Wert verschaffen.

Und zwar soll gezeigt werden, daß der betreffende Satz sich ganz von selbst darbietet, wenn man nach der Methode von Clebsch*) die Differentialgleichungen des Problems mittels ihrer Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung integriert hat, mit der überhaupt der Satz in allerengstem Zusammenhange steht. Ich hatte ursprünglich die Absicht, diese Integrationsart als bekannt vorauszusetzen, wodurch dann der Beweis des Satzes in ein paar Zeilen erledigt werden kann. In den mir bekannten Begründungen der Clebschschen Integrationsmethode tritt aber gerade ein Punkt, auf den es hier wesentlich ankommt, nicht deutlich genug zu Tage. Der Klarheit wegen habe ich es daher schließlich doch vorgezogen, dem Beweise des verallgemeinerten Unabhängigkeitssatzes die Ableitung der kanonischen Integrationsmethode der Differentialgleichungen der Variationsrechnung selbst vorauszuschicken.**)

---

*) Crelle J. 55, p. 337—340.

**) Für den Fall $n = 2$ ist allerdings der Satz bereits richtig angegeben, aber nur ein gänzlich verfehlter Beweis dafür geliefert worden, obgleich man in diesem speziellen Falle die partielle Differentialgleichung des Problems gar nicht heranzuziehen braucht und auch ohne dieselbe unschwer zeigen kann, daß die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind.

§ 1.

Integration der Differentialgleichungen des Problems durch vollständige Lösung ihrer Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung.

Setzt man:

$$\Omega \equiv f(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n') + \sum_1^r \varrho \lambda_\varrho f_\varrho(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n'), \tag{1}$$

so führt das vorgelegte Problem auf die n Lagrangeschen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zwischen $y_1, \cdots, y_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_r$ und x:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i}. \tag{2}$$

Soll dasselbe daher bei festen Grenzwerten von $x, y_1, \cdots, y_n$ überhaupt möglich und bestimmt sein, so müssen zu allernächst die $n+r$ Gleichungen (2) und:

$$f_\varrho(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n') = 0 \tag{3}$$

ein System Differentialgleichungen von der Ordnung $2n$ bilden, d. h. ihre vollständige Integration muß $2n$ willkürliche Konstanten mit sich bringen, und das wieder ist identisch damit, daß die $n+r$ Gleichungen:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = \frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad f_\varrho = 0$$

auflösbar sein müssen nach den $n+r$ Unbekannten

$$y_1', \cdots, y_n', \lambda_1, \cdots, \lambda_r.\text{*)}$$

Die Substitution ihrer Auflösungen:

$$y_i' = \Psi_i\left(x, y_1, \cdots, y_n, \frac{\partial V}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial y_n}\right),$$

$$\lambda_\varrho = \Pi_\varrho\left(x, y_1, \cdots, y_n, \frac{\partial V}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial y_n}\right)$$

führt dann die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \Omega - \sum_1^n {}_h\, y_h' \frac{\partial \Omega}{\partial y_h'} = f - \sum_1^n {}_h \frac{\partial V}{\partial y_h} y_h'$$

über in eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = H\left(x, y_1, \cdots, y_n, \frac{\partial V}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial y_n}\right) \tag{4}$$

zwischen der unbekannten Funktion V und den $n+1$ unabhängigen Variabeln $x, y_1, \cdots, y_n$.

---

*) Vgl. Leipziger Berichte 1895, p. 138.

Ist daher $V = W$ irgend eine Lösung dieser Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung des Problems, so genügen die Werte:

$$(5)\qquad \begin{cases} y_i' = \Psi_i\left(x, y_1, \cdots, y_n, \frac{\partial W}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial W}{\partial y_n}\right), \\ \lambda_\varrho = \Pi_\varrho\left(x, y_1, \cdots, y_n, \frac{\partial W}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial W}{\partial y_n}\right) \end{cases}$$

mit den $n + r$ Gleichungen:

$$(6)\qquad \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = \frac{\partial W}{\partial y_i}, \qquad f_\varrho = 0,$$

von denen sie die Auflösungen sind, zugleich auch der Gleichung:

$$(7)\qquad \frac{\partial W}{\partial x} = \Omega - \sum_1^n {}_h\, y_h' \frac{\partial \Omega}{\partial y_h'}$$

identisch für alle Werte sowohl der Variabeln $x, y_1, \cdots, y_n$ als auch der etwaigen willkürlichen Konstanten der Lösung W.

Es sei a irgend eine solche, in W nicht bloß additiv vorkommende Konstante.

Denkt man sich dann für die y_i' und λ_ϱ die Werte (5) gesetzt und differenziiert hierauf die Relation (7) partiell nach y_i und nach a, so erhält man, indem sich die partiellen Differentialquotienten der y_h' von selbst wegheben, die Formeln:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y_i} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i} + \sum_1^r {}_\varrho\, f_\varrho \frac{\partial \lambda_\varrho}{\partial y_i} - \sum_1^n {}_h\, y_h' \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial \Omega}{\partial y_h'},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial a} = \qquad \sum_1^r {}_\varrho\, f_\varrho \frac{\partial \lambda_\varrho}{\partial a} - \sum_1^n {}_h\, y_h' \frac{\partial}{\partial a} \frac{\partial \Omega}{\partial y_h'}.$$

Mit den Gleichungen (6) genügen daher ihre Auflösungen (5) zugleich auch für alle Werte von $x, y_1, \cdots, y_n, a$ identisch den Gleichungen:

$$(8)\qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial y_i \partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i} - \sum_1^n {}_h \frac{\partial^2 W}{\partial y_h \partial x_i} y_h', \\ \frac{\partial^2 W}{\partial a \partial x} = \qquad - \sum_1^n {}_h \frac{\partial^2 W}{\partial y_h \partial a} y_h'. \end{cases}$$

Sei nun im besonderen:

$$(9)\qquad V = W(x, y_1, \cdots, y_n, a_1, \cdots, a_n) + \text{const.}$$

irgend eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung (4). Dann ist die Determinante:

$$(10)\qquad \sum \pm \frac{\partial^2 W}{\partial y_1 \partial a_1} \frac{\partial^2 W}{\partial y_2 \partial a_2} \cdots \frac{\partial^2 W}{\partial y_n \partial a_n}$$

nicht identisch Null. Daher bestimmen die n Gleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial a_i} = \alpha_i, \tag{11}$$

in denen auch $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ willkürliche Konstanten bedeuten sollen, stets die n Unbekannten $y_1, \cdots, y_n$, und wenn die Substitution ihrer Auflösungen:

$$y_i = \varphi_i(x, a_1, \cdots, a_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) \equiv [y_i] \tag{12}$$

die Gleichungen (5) überführt in:

$$\begin{cases} y_i' = \psi_i(x, a_1, \cdots, a_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) \equiv [y_i'], \\ \lambda_\varrho = \pi_\varrho(x, a_1, \cdots, a_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) \equiv [\lambda_\varrho], \end{cases} \tag{13}$$

so genügen diese Werte (12) und (13) den Gleichungen (11), (6), (7) und (8) identisch für jedes $x, a_1, \cdots, a_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$. Deutet man die Substitution der Werte (12) und (13) durch [ ] an, so hat man also einerseits:

$$\left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\right] \equiv \left[\frac{\partial W}{\partial y_i}\right], \quad \alpha_i \equiv \left[\frac{\partial W}{\partial a_i}\right],$$

und daraus durch partielle Differentiation nach x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\right] \equiv \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y_i \partial x}\right] + \sum_1^n{}^h \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y_i \partial y_h}\right] \frac{\partial [y_h]}{\partial x},$$

$$0 \equiv \left[\frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial x}\right] + \sum_1^n{}^h \left[\frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial y_h}\right] \frac{\partial [y_h]}{\partial x}.$$

Andrerseits ist aber nach (8):

$$\left[\frac{\partial^2 W}{\partial y_i \partial x}\right] \equiv \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_i}\right] - \sum_1^n{}^h \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y_h \partial y_i}\right] [y_h'],$$

$$\left[\frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial x}\right] \equiv \qquad - \sum_1^n{}^h \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y_h \partial a_i}\right] [y_h'],$$

und wenn man diese Identitäten zu den vorhergehenden addiert, ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\right] \equiv \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_i}\right] + \sum_1^n{}^h \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y_i \partial y_h}\right] \left(\frac{\partial [y_h]}{\partial x} - [y_h']\right), \tag{14}$$

$$0 \equiv \qquad \sum_1^n{}^h \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y_h \partial a_i}\right] \left(\frac{\partial [y_h]}{\partial x} - [y_h']\right). \tag{15}$$

Nun kann die Determinante (10), da sie an sich nicht Null und ganz frei von den unbestimmten Größen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ ist, auch nicht infolge der Gleichungen (11) identisch verschwinden. Es ist daher auch die Determinante

der n linearen homogenen Relationen (15) nicht identisch Null und diese Relationen verlangen folglich, daß einzeln jedes:

$$\frac{\partial[y_h]}{\partial x} - [y_h'] \equiv 0$$

sei, wodurch sich die Relationen (14) auf:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\right] \equiv \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_i}\right]$$

reduzieren, d. h. aber, da auch jedes $[f_\varrho] \equiv 0$ ist:

Die Differentialgleichungen (2) und (3) werden vollständig integriert durch die Auflösungen (12) und (13) der Gleichungen (11) und (6), Auflösungen, welche zugleich für alle beliebigen Werte von $a_1, \cdots, a_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ die Gleichung (7) identisch erfüllen, und in denen allgemein ist:

$$(16) \qquad [y_h'] \equiv \frac{\partial[y_h]}{\partial x}.$$

Damit haben wir die kanonische Integrationsmethode der Differentialgleichungen unsres Problems gewonnen und können nunmehr zur Ableitung des Hilbertschen Unabhängigkeitssatzes übergehen.

§ 2.

Zusammenhang zwischen der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung und dem Hilbertschen Unabhängigkeitssatze.

Das vorgelegte Problem schreibt den Funktionen $y_1, \cdots, y_n$ an den beiden festen Grenzen x_0 und x_1 fest gegebene Werte vor. Nennt man also $y_{10}, \cdots, y_{n0}$ die gegebenen Anfangswerte der y, so müssen, damit die Aufgabe lösbar sei, weiter nun noch die n Gleichungen (12) zusammen mit den n Gleichungen:

$$(17) \qquad y_{i0} = \varphi_i(x_0, a_1, \cdots, a_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

auflösbar sein nach ihren $2n$ willkürlichen Konstanten a und α, oder nur anders ausgedrückt, es müssen die n letzten Gleichungen auflösbar sein nach n von diesen Konstanten, und nach Substitution der Auflösungen müssen die n Gleichungen (12) die übrigen n Konstanten bestimmen.

Bei der Festsetzung:

$$(18) \qquad W_0 \equiv W(x_0, y_{10}, \cdots, y_{n0}, a_1, \cdots, a_n)$$

ergeben sich aber aus den Gleichungen (11) sofort die n Gleichungen:

$$(19) \qquad \frac{\partial(W - W_0)}{\partial a_k} = 0,$$

welche, die Anfangswerte $x_0, y_{10}, \cdots, y_{n0}$ als fest gegeben betrachtet, die

Unbekannten $y_1, \cdots, y_n$ als bloße Funktionen von x und von den n willkürlichen Konstanten $a_1, \cdots, a_n$ bestimmen.

Ist also, was natürlich hier immer vorausgesetzt wird, die Aufgabe überhaupt möglich und bestimmt, so müssen die n Gleichungen (19) auflösbar sein auch nach den n Unbekannten $a_1, \cdots, a_n$.

Es seien:

$$y_i = Y_i(x, a_1, \cdots, a_n) \tag{20}$$

diejenigen Auflösungen der Gleichungen (19) nach den n Unbekannten y_i, die für $x = x_0$ die Werte $y_i = y_{i0}$ annehmen.

Die Gleichungen (19) besitzen dann gleichzeitig immer auch solche Auflösungen:

$$a_k = A_k(x, y_1, \cdots, y_n) \equiv \{a_k\} \tag{21}$$

nach den n Unbekannten a_k, welche die Gleichungen (20) identisch erfüllen, also auch von diesen Gleichungen wieder Auflösungen sind, und indem man die Werte (20) in die Gleichungen (5) einsetzt, erhält man nach (16) ein Wertsystem der y_i' und λ_ϱ:

$$\begin{cases} y_i' = Y_i'(x, a_1, \cdots, a_n) \equiv \dfrac{\partial Y_i}{\partial x}, \\ \lambda_\varrho = L_\varrho(x, a_1, \cdots, a_n), \end{cases} \tag{22}$$

welches zusammen mit den Werten (20) der y_i den Gleichungen (6) und (7) identisch genügt für jedes $a_1, \cdots, a_n$, wobei zugleich die Werte der y_i und λ_ϱ ein System partikulärer Lösungen der Differentialgleichungen (2) und (3) mit nur noch n willkürlichen Konstanten $a_1, \cdots, a_n$ bilden.

Die Einsetzung der Werte (21) der a_k, die durch $\{\ \}$ hervorgehoben werden möge, erfüllt nun die Gleichungen (20) identisch und verwandelt die Werte (22) der y_i' und λ_ϱ in bloße Funktionen von $x, y_1, \cdots, y_n$. Bezeichnen wir diese Funktionen durch p_i und μ_ϱ, definieren wir also:

$$p_i \equiv \left\{\frac{\partial Y_i}{\partial x}\right\}, \qquad \mu_\varrho \equiv \{L_\varrho\}, \tag{23}$$

so führt die Substitution $\{\ \}$ die Gleichungen (20) und (22) über in die Identitäten und Gleichungen:

$$y_i \equiv y_i \quad \text{und} \quad y_i' = p_i, \quad \lambda_\varrho = \mu_\varrho, \tag{24}$$

von denen die n Gleichungen:

$$y_i' = p_i$$

ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung bilden, das durch die Gleichungen (20) vollständig integriert wird.*)

*) Für $x = x_0$ reduzieren sich die Gleichungen (20) auf $y_i = y_{i0}$ und bestimmen also gar nicht mehr die Unbekannten a_k. Daher nehmen notwendig ihre Auflösungen (21), und mit diesen auch die Funktionen p_i und μ_ϱ an der Stelle $x = x_0$, wo den y_i

Es mögen endlich $\bar{f}$, $\bar{f}_\varrho$ und $\bar{\Omega}$ diejenigen Funktionen bezeichnen, die aus f, f_ϱ und Ω durch die Substitutionen (24) entstehen, wenn man die p_i und μ_ϱ zunächst als beliebige Variable auffaßt.

Die Werte (20) und (22) genügen den Gleichungen (6) und (7) identisch für alle Werte von $a_1, \cdots, a_n$. Diese Identitäten können daher nicht aufgehoben werden durch Substitution der Werte (21) der a_k. Nach (24) und nach den eben gegebenen Definitionen gehen sie aber hierdurch über in:

$$\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_i} \equiv \left\{\frac{\partial W}{\partial y_i}\right\}, \quad \bar{f}_\varrho \equiv 0, \quad \bar{\Omega} - \sum_1^n {}_i\, p_i \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_i} \equiv \left\{\frac{\partial W}{\partial x}\right\},$$

wo nun natürlich unter den p_i und μ_ϱ die bestimmten, durch (23) definierten Funktionen von $x, y_1, \cdots, y_n$ zu verstehen sind. Diese Identitäten lehren, daß für alle beliebigen Funktionen $y_1, \cdots, y_n$ von x die Relation besteht:

$$\bar{f} + \sum_1^n {}_i\, (y_i' - p_i) \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_i} \equiv \left\{\frac{\partial W}{\partial x}\right\} + \sum_1^n {}_i \left\{\frac{\partial W}{\partial y_i}\right\} y_i'.$$

Andrerseits hat man, wenn man durch die Substitution $\{\ \}$ auch die Funktion $W - W_0$ überführt in eine Funktion von $x, y_1, \cdots, y_n$ allein:

$$\frac{d\,\{W - W_0\}}{dx} \equiv \left\{\frac{\partial W}{\partial x}\right\} + \sum_1^n \left\{\frac{\partial W}{\partial y_i}\right\} y_i' + \sum_1^n {}_k \left\{\frac{\partial (W - W_0)}{\partial a_k}\right\} \frac{d\,\{a_k\}}{dx},$$

und die Werte (21) der a_k sind Auflösungen auch der Gleichungen (19), also ist jedes:

$$\left\{\frac{\partial (W - W_0)}{\partial a_k}\right\} \equiv 0.$$

Aus den beiden vorhergehenden Identitäten fließt daher sofort die Formel:

$$\bar{f} + \sum_1^n {}_i\, (y_i' - p_i) \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_i} \equiv \frac{d\,\{W - W_0\}}{dx}, \tag{26}$$

welche nichts anderes ist als die kanonische Form des **Hilbertschen** Unabhängigkeitssatzes, und aus der, für alle Funktionen $y_1, \cdots, y_n$, welche

---

die gegebenen Anfangswerte y_{i0} vorgeschrieben sind, die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, d. h. die Anfangswerte der Funktionen $\{a_k\}$, p_i und μ_ϱ sind durch die Anfangswerte der Funktionen y allein noch nicht bestimmt, sondern hängen auch noch ab von den Anfangswerten der Differentialquotienten dieser Funktionen. Im besondern lehrt die Definition der p_i und die Entstehung der Gleichungen (21) aus den Gleichungen (20), daß für jedes Funktionensystem $y_1, \cdots, y_n$, welches die gegebenen Anfangswerte besitzt, der Anfangswert von p_i nichts anderes ist als der Anfangswert des Differentialquotienten y_i'.

an der Stelle $x = x_0$ die festen Anfangswerte $y_{10}, \cdots, y_{n0}$ besitzen, und zwischen den Grenzen x_0 und x die Funktion $\{W - W_0\}$ stetig erhalten, folgt:

$$\int\limits_{x_0}^{x} \left(\bar{f} + \sum_{1}^{n} {}_i (y_i' - p_i) \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_i} \right) dx \equiv \{ W - W_0 \}. - \tag{27}$$

Obgleich diese Resultate bereits vollständig ausreichen, um die gewünschte Ausdehnung des Unabhängigkeitssatzes in voller Allgemeinheit darstellen zu können, schalte ich hier doch noch die folgenden, für diese Ausdehnung selbst überflüssigen Bemerkungen ein, weil dieselben die allgemeinen Beziehungen zwischen der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung (4) und der Aufgabe, den Ausdruck

$$\bar{\Omega} + \sum_{1}^{n} {}_i (y_i' - p_i) \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_i} \tag{28}$$

zu einem vollständigen Differentialquotienten zu machen, und daneben auch noch den r endlichen Gleichungen:

$$\bar{f}_\varrho = 0 \tag{29}$$

zu genügen, einerseits, und andrerseits zwischen dieser letzten Aufgabe und der Integration der Differentialgleichungen (2) und (3) in ein helleres Licht setzen.

Zunächst sieht man sofort, daß die mittlere Aufgabe und die Aufgabe, von der Gleichung (4) eine Lösung zu finden, nur verschiedene Formen einer und derselben Aufgabe sind.

Jedem System Funktionen $p_1, \cdots, p_n, \mu_1, \cdots, \mu_r$ von $x, y_1, \cdots, y_n$, für die der Ausdruck (28) ein vollständiger Differentialquotient wird, und die zugleich den Gleichungen (29) identisch genügen, kann man nämlich vermöge einer bloßen Quadratur eine solche Funktion V derselben Variabeln hinzufügen, daß die betrachteten Funktionen identisch auch der Gleichung genügen:

$$\bar{\Omega} + \sum_{1}^{n} {}_i (y_i' - p_i) \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_i} = \frac{dV}{dx}. \tag{30}$$

Dann aber erfüllen diese Funktionen identisch die Gleichungen:

$$\bar{\Omega} - \sum_{1}^{n} {}_i p_i \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial y_i} = \frac{\partial V}{\partial x}$$

und:

$$\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_i} = \frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad \bar{f}_\varrho = 0, \tag{31}$$

und daher ist die Funktion V eine Lösung derjenigen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, welche entsteht, wenn man mittelst der $n+r$ letzten Gleichungen die $n+r$ Größen p_i und μ_ϱ aus der vorhergehenden Gleichung eliminiert, d. h. sie ist eben eine Lösung der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung (4) (daher denn, was übrigens auch unmittelbar einleuchtet, auch unsere Funktion $\{W-W_0\}$ eine solche ist). Und umgekehrt erhält man aus jeder Lösung V dieser Gleichung ein Funktionensystem $p_1, \cdots, p_n, \mu_1, \cdots \mu_r$, das die Gleichungen (29) und (30) identisch erfüllt, indem man die $n+r$ Gleichungen (31) nach diesen $n+r$ Unbekannten auflöst.

Damit aber die p und μ solche Funktionen von $x, y_1, \cdots, y_n$ seien, welche den Ausdruck:

$$\bar{\Omega} + \sum_1^n{}^h (y'_h - p_h)\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial p_h} \equiv B + \sum_1^n{}^h B_h y'_h$$

zu einem vollständigen Differentialquotienten machen, müssen dieselben den $n + \frac{n(n-1)}{2}$ Integrabilitätsbedingungen identisch genügen:

$$\frac{\partial B_i}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y_i} = 0, \quad \frac{\partial B_i}{\partial y_h} - \frac{\partial B_h}{\partial y_i} = 0.$$

Von diesen kann man infolge der letzten die n ersten ersetzen durch die:

$$\frac{\partial B_i}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y_i} + \sum_1^n{}^h p_h\left(\frac{\partial B_i}{\partial y_h} - \frac{\partial B_h}{\partial y_i}\right) = 0.$$

Überdies ist, weil die partiellen Differentialquotienten der p_h sich von selbst wegheben:

$$\frac{\partial B}{\partial y_i} \equiv \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\bar{\Omega} - \sum_1^n{}^h p_h \frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial p_h}\right) \equiv \frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial y_i} + \sum_1^r{}^\varrho \frac{\partial\mu_\varrho}{\partial y_i}\bar{f}_\varrho - \sum_1^n{}^h p_h \frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial p_h};$$

wegen

$$B_h \equiv \frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial p_h}$$

lassen sich daher die Integrabilitätsbedingungen so schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial p_i} + \sum_1^n{}^h p_h \frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial p_i} - \frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial y_i} = \sum_1^r{}^\varrho \bar{f}_\varrho \frac{\partial\mu_\varrho}{\partial y_i}, \tag{32}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_h}\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial p_h} = 0, \tag{33}$$

wo erst bei den zweiten partiellen Differentiationen die Abhängigkeit der p und μ von $x, y_1, \cdots, y_n$ zu berücksichtigen ist.

Nach dem eben Bemerkten liefert also jede Lösung V der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung (4) ein solches System von Lösungen $p_1, \cdots, p_n, \mu_1, \cdots, \mu_r$ dieser $n + \frac{n(n-1)}{2}$ partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, welches gleichzeitig den r endlichen Gleichungen (29) genügt, und das allgemeinste System Lösungen dieser Art wird durch die Gleichungen (31) definiert, wenn man in diesen unter V die allgemeine Lösung der Gleichung (4) versteht.

Sind endlich die p_i und μ_ϱ solche Funktionen von $x, y_1, \cdots, y_n$, welche die Gleichungen (29) und (32) identisch erfüllen, und bildet man mit diesen Funktionen die n Differentialgleichungen erster Ordnung und die r endlichen Gleichungen:

$$(34) \qquad y_i' = p_i(x, y_1, \cdots, y_n), \quad \lambda_\varrho = \mu_\varrho(x, y_1, \cdots, y_n),$$

so erkennt man aus der Form der Gleichungen (32) sofort, daß die vollständigen Lösungen der Gleichungen (34) gleichzeitig auch Lösungen der Differentialgleichungen (2) und (3) sind. Nach dem Vorhergehenden gibt es daher neben unseren früheren Gleichungen (24) noch unendlich viele andere Systeme von Gleichungen (34), welche die doppelte Eigenschaft besitzen, daß ihre vollständige Integration Lösungen auch der Differentialgleichungen (2) und (3) liefert, und daß für ihre rechten Seiten zugleich der Ausdruck (28) ein vollständiger Differentialquotient wird, was unmittelbar den bekannten Satz enthält, daß jeder Lösung ihrer Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung Lösungen der Differentialgleichungen (2) und (3) mit n neuen willkürlichen Konstanten zugehören.

Dagegen sind die Integrabilitätsbedingungen (33) keine bloßen Folgen der Bedingungen (32) und der Gleichungen (29). Daher gilt nicht mehr, wie im Falle $n = 1$, der Satz, daß bereits in jedem System Gleichungen (34), dessen vollständige Lösungen zugleich den Differentialgleichungen (2) und (3) genügen, die rechten Seiten solche Funktionen wären, welche den Ausdruck (28) zu einem vollständigen Differentialquotienten machen. —

§ 3.

Allgemeiner Ausdruck des Hilbertschen Unabhängigkeitssatzes.

Mit dem in (26) enthaltenen Resultate, daß der Ausdruck:

$$\bar{f} + \sum_1^n {}_i (y_i' - p_i) \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_i}$$

für die durch (23) definierten Funktionen p_i und μ_ϱ ein vollständiger Differentialquotient wird, ist die Ausdehnnng des Hilbertschen Unab-

hängigkeitssatzes auf das vorgelegte Problem gewonnen und bewiesen, zunächst freilich nur unter der Voraussetzung, daß man in den vollständigen Lösungen:

$$y_i = \varphi_i(\alpha, a_1, \cdots, a_n, \quad \alpha_1, \cdots, \alpha_n),$$
$$\lambda_i = \pi_\varrho(\alpha, a_1, \cdots, a_n, \quad \alpha_1, \cdots, \alpha_n),$$

der Differentialgleichungen des Problems kanonische Konstanten $a_1, \cdots, a_n$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ eingeführt habe. Da aber unsere Funktionen:

$$Y_i, \quad \frac{\partial Y_i}{\partial x} \quad \text{und} \quad L_\varrho$$

respektive aus den Funktionen:

$$\varphi_i, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \quad \text{und} \quad \pi_\varrho$$

hervorgehen müssen, wenn man darin die Auflösungen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ der n Gleichungen (17) einsetzt, so kann man kurz sagen: Man erhält die in (23) definierten Funktionen p_i und λ_ϱ, indem man mit Hülfe der $2n$ Gleichungen:

$$\varphi_i(x_0, a_1, \cdots, a_n, \quad \alpha_1, \cdots, \alpha_n) = y_{i0},$$
$$\varphi_i(x, \ a_1, \cdots, a_n, \quad \alpha_1, \cdots, \alpha_n) = y_i$$

die $2n$ kanonischen Konstanten $a_1, \cdots, a_n$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ aus den Gleichungen eliminiert:

$$p_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, \quad \mu_\varrho = \pi_\varrho.$$

Stellen nun die Gleichungen:

$$(35) \qquad y_i = \theta_i(x, c_1, \cdots, c_{2n}), \quad \lambda_\varrho = X_\varrho(x, c_1, \cdots, c_{2n})$$

irgend ein System vollständiger Lösungen der Differentialgleichungen (2) und (3) dar, so muß es notwendig $2n$, von x freie Substitutionen von der Form:

$$(36) \qquad c_h = C_h(a_1, \cdots, a_n, \quad \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

geben, welche

$$\theta_i \equiv \varphi_i, \quad X_\varrho \equiv \pi_\varrho$$

und damit auch

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial x} \equiv \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}$$

machen, und man kann dann also unsere Funktionen p_i und μ_ϱ dadurch erhalten, daß man mittelst der $4n$ Gleichungen (36) und

$$(37) \qquad \theta_i(x_0, c_1, \cdots, c_{2n}) = y_{i0}, \quad \theta_i(x, c_1, \cdots, c_{2n}) = y_i$$

die $4n$ Konstanten

$$c_1, \cdots, c_{2n}, \quad a_1, \cdots, a_n, \quad \alpha_1, \cdots, \alpha_n$$

aus den Formeln:

(38) $$p_i = \frac{\partial \theta_i}{\partial x}, \quad \mu_\varrho = X_\varrho$$

eliminiert. Die Konstanten a und α eliminieren sich aber dadurch von selber, daß man einfach die Transformationsformeln (36) ganz wegläßt, und man braucht somit nur die $2n$ Integrationskonstanten c vermöge der $2n$ Gleichungen (37) aus (38) zu eliminieren. Führen wir diese Elimination nicht auf einmal, sondern wieder in zwei Absätzen aus, so können wir hiernach unser Resultat allgemein so aussprechen:

Hat man von den, mit der Funktion:

$$\Omega \equiv f(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n') + \sum_1^r{}_\varrho \lambda_\varrho f_\varrho(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n')$$

gebildeten $n + r$ *Differentialgleichungen:*

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i}, \quad f_\varrho = 0$$

irgend ein System vollständiger Lösungen:

$$y_i = \theta_i(x, c_1, \cdots, c_{2n}), \quad \lambda_\varrho = X_\varrho(x, c_1, \cdots, c_{2n})$$

gefunden, so bestimme man aus den n *Gleichungen:*

$$\theta_i(x_0, c_1, \cdots, c_{2n}) = y_{i0}$$

n *von den* $2n$ *Integrationskonstanten* $c_1, \cdots, c_{2n}$ *durch die* n *übrigen. Gehen durch Einsetzung der Auflösungen die vollständigen Lösungen über in die (bei fest gegebenen* $x_0, y_{10}, \cdots, y_{n0}$*) partikulären Lösungen mit nur noch* n *willkürlichen Konstanten* $c_1, \cdots, c_n$*:*

$$y_i = Y_i(x, c_1, \cdots, c_n), \quad \lambda_\varrho = L_\varrho(x, c_1, \cdots, c_n),$$

so braucht man nur mit Hülfe der n *ersten dieser letzten Gleichungen diese Konstanten aus den* $n + r$ *Gleichungen:*

$$y_i' = \frac{\partial Y_i}{\partial x}, \quad \lambda_\varrho = L_\varrho$$

zu eliminieren, um in den rechten Seiten der so entstehenden Gleichungen

(α) $$y_i' = p_i, \quad \lambda_\varrho = \mu_\varrho$$

solche Funktionen von $x, y_1, \cdots, y_n$ *gewonnen zu haben, welche den Ausdruck:*

$$\bar{f} + \sum_1^n{}_h (y_h' - p_h)\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_h}$$

zu einem vollständigen Differentialquotienten machen und überdies den r *Gleichungen:*

$$\bar{f}_\varrho = 0$$

identisch genügen.

Dabei bedeuten $\overline{\Omega}$, $\overline{f}$, $\overline{f}_\varrho$ diejenigen Funktionen von $x, y_1, \cdots, y_n$, $p_1, \cdots, p_n$, $\mu_1, \cdots, \mu_r$, die durch die $n+r$ Substitutionen (α) aus Ω, f, f_ϱ entstehen, und von diesen Substitutionen bilden die n ersten ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung, das durch die n Gleichungen $y_i = Y_i$ vollständig integriert wird. —

Will man diesen Satz unabhängig von der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung beweisen, so muß man zeigen, daß die auf die angegebene Weise erhaltenen Funktionen $p_1, \cdots, p_n$, $\mu_1, \cdots, \mu_r$ den $n + \frac{n(n-1)}{2}$ partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (32) und (33) genügen. Das leuchtet nun zwar für die Gleichungen (32) sofort ein und läßt sich im Falle $n = 2$ auch noch ohne allzugroße Rechnung für die eine Gleichung nachweisen, auf welche sich dann das System (33) reduziert; im allgemeinen Falle aber einen solchen direkten Beweis für die Gleichungen (33) zu erbringen, scheint erhebliche Schwierigkeiten darzubieten.

A fundamental theorem in the theory of ruled surfaces.

By

E. J. Wilczynski of Berkeley, Cal.

In previous papers*) I have shown that the general theory of non-developable ruled surfaces may be based upon the consideration of the system of differential equations

$$(1)\qquad \begin{aligned} y'' + p_{11}y' + p_{12}z' + q_{11}y + q_{12}z = 0,\\ z'' + p_{21}y' + p_{22}z' + q_{21}y + q_{22}z = 0, \end{aligned}$$

where

$$y' = \frac{dy}{dx}, \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \text{ etc.}$$

For, if we denote by (y_k, z_k) for $k = 1, 2, 3, 4$, four systems of simultaneous solutions of (1), for which the determinant

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \\ z_1' & z_2' & z_3' & z_4' \end{vmatrix}$$

does not vanish, the general solutions of (1) will be

$$y = \sum_{k=1}^{4} c_k y_k, \qquad z = \sum_{k=1}^{4} c_k z_k.$$

We can interpret $(y_1, \cdots, y_4)$ and $(z_1, \cdots, z_4)$ as the homogeneous coordinates of two points P_y and P_z. As x changes these points describe two curves C_y and C_z. The ruled surface S is obtained by joining corresponding points P_y and P_z by straight lines.

*) In volumes II to IV of the Transactions of the American Mathematical Society.

The transformation

$$(2a)\qquad y=\alpha(x)\bar{y}+\beta(x)\bar{z},\quad z=\gamma(x)\bar{y}+\delta(x)\bar{z},\quad \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0,$$

in which $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are arbitrary functions of x, couverts the curves C_y and C_z into any other two curves $C_{\bar{y}}$ and $C_{\bar{z}}$ upon the surface S. The further transformation

$$(2b)\qquad x=f(\bar{x}),$$

where $f(\bar{x})$ is also an arbitrary function, merely transforms the parameter x.

If we denote by U_k and V_k the coordinates of the planes tangent to S at P_y and P_z respectively, we find that these functions constitute a simultaneous fundamental system of solutions for the system of equations adjoined to (1),

$$(3)\qquad \begin{aligned} &U''+p_{11}U'+p_{12}V'+\left\{q_{11}+\frac{1}{4}(u_{11}-u_{22})\right\}U+\left(q_{12}+\frac{1}{2}u_{12}\right)V=0,\\ &V''+p_{21}U'+p_{22}V'+\left(q_{21}+\frac{1}{2}u_{21}\right)U+\left\{q_{22}+\frac{1}{4}(u_{22}-u_{11})\right\}V=0^{*}), \end{aligned}$$

where the quantities u_{ik} are formed from the p_{ik} and q_{ik} in a way that will be indicated immediately. The relation between (1) and (3) is a reciprocal one. If U_k and V_k are interpreted as point coordinates, the ruled surface of (3) is dualistic to S.

When (1) is transformed by equations (2), a new system of differential equations is obtained of the same form as (1). The functions of p_{ik}, q_{ik}, p'_{ik}, q'_{ik}, etc. which have the same value for the transformed as for the original system are called invariants. There are four relative invariants θ_4, θ_6, θ_9, θ_{10}, which are defined as follows.

Let

$$(4)\qquad \begin{aligned} u_{11}&=2p'_{11}-4q_{11}+p_{11}^2+p_{12}p_{21},\\ u_{12}&=2p'_{12}-4q_{12}+p_{12}(p_{11}+p_{22}),\\ u_{21}&=2p'_{21}-4q_{21}+p_{21}(p_{11}+p_{22}),\\ u_{22}&=2p'_{22}-4q_{22}+p_{22}^2+p_{12}p_{21}, \end{aligned}$$

and

$$(5)\qquad \begin{aligned} v_{11}&=2u'_{11}+p_{12}u_{21}-p_{21}u_{12},\\ v_{12}&=2u'_{12}+(p_{11}-p_{22})u_{12}-p_{12}(u_{11}-u_{22}),\\ v_{21}&=2u'_{21}-(p_{11}-p_{22})u_{21}+p_{21}(u_{11}-u_{22}),\\ v_{22}&=2u'_{22}-p_{12}u_{21}+p_{21}u_{12}. \end{aligned}$$

Moreover let there be a third set of quantities w_{ik} formed from v_{ik}

---

*) Reciprocal Systems of Linear Differential Equations. Trans. Am. Math. Soc. Vol. III, p. 64.

and p_{ik} in the same way as the quantities v_{ik} are formed from u_{ik} and p_{ik}. Then the relative invariants, which we shall consider, are*).

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
\theta_4 &= (u_{11}-u_{22})^2 + 4u_{12}u_{21},\\
\theta_6 &= 2(u_{11}+u_{22})\theta_4 - \tfrac{5}{4}[(v_{11}-v_{22})^2+4v_{12}v_{21}] + (u_{11}-u_{22})(w_{11}-w_{22})\\
&\qquad + 2(w_{12}u_{21}+w_{21}u_{12}),\\
\theta_{10} &= (u_{12}v_{21}-u_{21}v_{12})^2\\
&\qquad - [(u_{11}-u_{22})v_{12}-(v_{11}-v_{22})u_{12}]\,[(u_{11}-u_{22})v_{21}-(v_{11}-v_{22})u_{21}],\\
\theta_9 &= \Delta,
\end{aligned}
$$

where

$$
(7)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} u_{11}-u_{22}, & u_{12}, & u_{21}\\ v_{11}-v_{22}, & v_{12}, & v_{21}\\ w_{11}-w_{22}, & w_{12}, & w_{21}\end{vmatrix} \text{**)}.
$$

If these same invariants be formed for (3) we find that they have the same value, all except Δ, which has the opposite sign.

Now system (1) being given θ_4, θ_6, θ_9, θ_{10} are definite functions of x. We wish to show conversely, that if θ_4, θ_6, θ_9, θ_{10} are given as arbitrary functions of x there essentially exists just one system of differential equations of which they are the invariants. But all ruled surfaces belonging to the same system (1) are projectively equivalent. We shall therefore find the theorem:

If θ_4, θ_6, θ_9, θ_{10} are given as arbitrary functions of x, they determine a ruled surface uniquely, except for projective transformations. If, in the second place one determines a second surface by the invariants $\bar\theta_4$, $\bar\theta_6$, $\bar\theta_9$, $\bar\theta_{10}$, where

$$\bar\theta_4 = \theta_4,\quad \bar\theta_6 = \theta_6,\quad \bar\theta_9 = -\theta_9,\quad \bar\theta_{10} = \theta_{10},$$

this second surface can be obtained from the first by a dualistic transformation. The ruled surface is not determined uniquely if θ_4 or θ_{10} vanish identically.

We proceed now to prove the theorem. Let us assume in the first place that θ_4 is not equal to zero. Then, the flecnode curve on S has two distinct branches, and we may take these as fundamental curves C_y and C_z. Then $u_{12} = u_{21} = 0$***). Moreover, we may take the indepen-

*) Invariants of Systems of Linear Differential Equations. Trans. Am. Math. Soc. Vol. II, pp. 1—24.

**) Geometry of a simultaneous system of two linear homogeneous differential equations of the second order. Trans. Am. Soc. Vol. II, p. 351.

***) Covariants of Systems of linear differential equations and applications to the theory of ruled surfaces. Trans. Am. Math. Soc. Vol. III, p. 435.

dent variable so as to make $\theta_4 = 1$*). Then $u_{11} - u_{22} = \varepsilon$, where $\varepsilon = \pm 1$. Finally, we may assume $p_{11} = p_{22} = 0$. For, if the system (1) be transformed by putting

$$y = \alpha(x)\eta, \qquad z = \delta(x)\zeta,$$

a transformation, which clearly does not affect the previously assumed conditions, one may determine α and δ so as to have p_{11} and p_{22} in the new system equal to zero.

We have therefore

$$(8) \qquad u_{12} = u_{21} = 0, \quad u_{11} - u_{22} = \varepsilon = \pm 1, \quad p_{11} = p_{22} = 0,$$

whence

$$v_{12} = -\varepsilon p_{12}, \quad v_{21} = \varepsilon p_{21}, \quad p'_{12} - 2q_{12} = 0, \quad p'_{21} - 2q_{21} = 0,$$

and therefore

$$(9) \qquad p_{12} = -\varepsilon v_{12}, \quad p_{21} = \varepsilon v_{21}, \quad q_{12} = -\frac{1}{2}\varepsilon v'_{12}, \quad q_{21} = \frac{1}{2}\varepsilon v'_{21}.$$

We have further

$$(10) \qquad \begin{aligned} \theta_6 &= 2(u_{11} + u_{22}) - 9v_{12}v_{21}, \\ \theta_{10} &= -v_{12}v_{21}, \\ \theta_9 &= \varepsilon(v_{12}w_{21} - v_{21}w_{12}) = 2\varepsilon(v_{12}v'_{21} - v_{21}v'_{12}). \end{aligned}$$

Therefore we find

$$\frac{v'_{12}}{v_{12}} - \frac{v'_{21}}{v_{21}} = \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\theta_9}{\theta_{10}},$$

or integrating

$$\frac{v_{12}}{v_{21}} = Ce^{\frac{1}{2}\varepsilon\int\frac{\theta_9}{\theta_{10}}dx}.$$

But

$$v_{12}v_{21} = -\theta_{10},$$

whence

$$v_{12} = \pm\sqrt{-C\theta_{10}}\,e^{\frac{1}{4}\varepsilon\int\frac{\theta_9}{\theta_{10}}dx},$$

$$v_{21} = \mp\sqrt{\frac{\theta_{10}}{-C}}\,e^{-\frac{1}{4}\varepsilon\int\frac{\theta_9}{\theta_{10}}dx}.$$

The constant C is quite immaterial. For, if we transform (1) by putting $y = k\eta$, $z = l\xi$, where k and l are constants, we merely multiply v_{12} by $\frac{l}{k}$ and v_{21} by $\frac{k}{l}$. If then we put

$$\frac{l}{k} = \frac{1}{\sqrt{-C}},$$

we shall have

$$(11) \qquad v_{12} = \pm\sqrt{\theta_{10}}\,e^{\frac{1}{4}\varepsilon\int\frac{\theta_9}{\theta_{10}}dx}, \qquad v_{21} = \mp\sqrt{\theta_{10}}\,e^{-\frac{1}{4}\varepsilon\int\frac{\theta_9}{\theta_{10}}dx}.$$

*) ibid. p. 448.

We also find

$$u_{11} = \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{4}\theta_6 - \frac{9}{4}\theta_{10},$$

$$u_{22} = -\frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{4}\theta_6 - \frac{9}{4}\theta_{10},$$

so that we have finally

$$(12)\quad \begin{aligned} & p_{11} = p_{22} = 0, \\ & p_{12} = \mp\varepsilon\sqrt{\theta_{10}}\, e^{\frac{1}{4}\varepsilon\int\frac{\theta_9}{\theta_{10}}dx}, \qquad p_{21} = \mp\varepsilon\sqrt{\theta_{10}}\, e^{-\frac{1}{4}\varepsilon\int\frac{\theta_9}{\theta_{10}}dx}, \\ & q_{11} = -\frac{1}{8}\varepsilon - \frac{1}{16}\theta_6 + \frac{13}{16}\theta_{10}, \quad q_{12} = \frac{1}{2}p_{12}', \\ & q_{22} = +\frac{1}{8}\varepsilon - \frac{1}{16}\theta_6 + \frac{13}{16}\theta_{10}, \quad q_{21} = \frac{1}{2}p_{21}'. \end{aligned}$$

If we distinguish the systems with $\varepsilon = \pm 1$ from each other by writing p_{ik} and q_{ik} for one, and $\overline{p}_{ik}$ and $\overline{q}_{ik}$ for the other, we shall have

$$\begin{aligned} & \overline{p}_{11} = p_{11} = 0, \quad \overline{p}_{22} = p_{22} = 0, \quad \overline{p}_{12} = -p_{21}, \quad \overline{p}_{21} = -p_{12}, \\ & \overline{q}_{11} = q_{22}, \qquad \overline{q}_{22} = q_{11} \qquad \overline{q}_{12} = -q_{21}, \quad \overline{q}_{21} = -q_{12}. \end{aligned}$$

But two such systems can be transformed into each other by putting

$$\overline{y} = -z, \quad \overline{z} = y.$$

We may therefore assume $\varepsilon = +1$. We still have two systems of coefficients according as we take the other ambiguous sign in (12) to be plus or minus. Again denoting one system by p_{ik}, q_{ik} and the other by $\overline{p}_{ik}$, $\overline{q}_{ik}$, we have

$$\begin{aligned} & \overline{p}_{11} = p_{11} = 0, \quad \overline{p}_{22} = p_{22} = 0, \quad \overline{p}_{12} = -p_{12}, \quad \overline{p}_{21} = -p_{21}, \\ & \overline{q}_{11} = q_{11}, \qquad \overline{q}_{22} = q_{22}, \qquad \overline{q}_{12} = -q_{12}, \quad \overline{q}_{21} = -q_{21}; \end{aligned}$$

but the two systems are again easily transformed into each other by putting

$$\overline{y} = -y, \quad \overline{z} = z.$$

If finally θ_9 be changed into $-\theta_9$, we obtain a system of equations which is easily seen to be equivalent to (3).

The equations (12) are valid only if θ_4 and θ_{10} are different from zero. Let us again assume $\theta_4 \neq 0$, but $\theta_{10} = 0$. We may again take $u_{12} = u_{21} = 0$, $u_{11} - u_{22} = 1$, $p_{11} = p_{22} = 0$. From $\theta_{10} = 0$ then follows either $v_{12} = 0$ or $v_{21} = 0$. Let us assume $v_{12} = 0$. We shall then find

$$(13)\quad \begin{aligned} & p_{11} = 0, \quad p_{12} = 0, \quad q_{11} = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\theta_6, \quad q_{12} = 0, \\ & p_{21} = f(x), \quad p_{22} = 0, \quad q_{21} = \frac{1}{2}p_{21}', \qquad q_{22} = +\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\theta_6, \end{aligned}$$

where $f(x)$ remains arbitrary. To complete the determination of the surface, an additional equation is therefore necessary in this case. We notice incidentally that $\theta_4 \neq 0$, $\theta_{10} = 0$ are the conditions under which S has a straight line directrix.

If $\theta_4 = 0$, we may put $u_{12} = 0$, and therefore $u_{11} - u_{22} = 0$. The independent variable may be so chosen as to make $u_{11} + u_{22} = 0$*). Unless S is a quadric we shall have $u_{21} \neq 0$. We find that θ_{10} must vanish. Assuming further $p_{11} = p_{22} = 0$ as before, and also $p_{21} = 0$ which amounts to taking for C_2 an asymptotic curve on S, we have.

$$
(14) \quad \begin{array}{llll} p_{11} = 0, \; p_{12} = f(x), & q_{11} = 0, & q_{12} = \frac{1}{2} p_{12}', & \\ & & & p_{12} u_{21} = \frac{9}{4} \frac{\theta_9}{\theta_6}, \\ p_{21} = 0, \; p_{22} = 0, & -\frac{1}{4} u_{21} = q_{21} = g(x), & q_{22} = 0, & \end{array}
$$

where, of the two functions $f(x)$ and $g(x)$, one remains arbitrary. Again, therefore a further condition is necessary to determine the surface. If $\theta_6 = 0$, we have either $u_{21} = 0$, i. e. a quadric surface, or $p_{12} = q_{12} = 0$, i. e. a surface belonging to a linear congruence with coincident directrices. $g(x)$ remains arbitrary. We have seen that in general the invariants determine the surface, while in the exceptional cases a further condition is necessary. This is the theorem we wished to prove.

We wish to make a few further remarks. *We have seen that the conditions $\theta_4 \neq 0$, $\theta_{10} = 0$ characterize a ruled surface with a straight line directrix.* This is a much simpler criterion than that given in a former paper. Further, *if all of the invariants vanish, the surface is either a quadric or belongs to a linear congruence with coincident directrices, according as the simultaneous equations*

$$u_{11} - u_{22} = u_{12} = u_{21} = 0,$$

are satisfied or not.

Let us assume $\theta_9 = \theta_4 = 0$. Then we may put $u_{12} = u_{11} - u_{22} = 0$, and assume $u_{21} \neq 0$. One easily deduces this consequence: *If the two branches of the flecnode curve of a ruled surface belonging to a linear complex coincide, it is a straight line.* This theorem is due to Voss**).

Systems (1) and (3) are referred to the same independent variable. If they are equivalent, it must therefore possible be to transform (1) into (3) by a transformation of the dependent variables alone. But such a transformation leaves the invariants *absolutely* unchanged. Therefore (1) and (3) can be equivalent only if

$$\theta_9 = \Delta = 0,$$

---

*) On a certain congruence associated with a given ruled surface. Trans. Am. Math. Soc. vol. IV, p. 197.

**) Voss, Math. Ann. Bd. VIII, p. 92.

i. e. if S belongs to a linear complex. Moreover if $\theta_9 = 0$, equations (12) show that (1) and (3) actually become equivalent, if θ_4 and θ_{10} do not vanish.

If $\theta_4 \neq 0$, $\theta_{10} = 0$, we have seen that our system may be written

$$
\begin{aligned}
&y'' + q_{11} y = 0, \\
&z'' + p_{21} y' + \frac{1}{2} p'_{21} y + q_{22} z = 0, \qquad p_{21} = f(x),
\end{aligned}
\tag{15}
$$

to which belongs the adjoined system

$$
\begin{aligned}
&U'' + q_{22} U = 0, \\
&V'' + p_{21} U' + \frac{1}{2} p'_{21} U + q_{11} V = 0.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

The independent variable is the same for both systems. Moreover both systems are referred to their flecnode curves, so that the only transformations which could couvert (15) in to (16) are of the form either

$$y = \alpha U, \quad z = \delta V;$$

or

$$y = \alpha V, \quad z = \delta U.$$

Moreover α and δ must be constants, so as to preserve the conditions $p_{11} = p_{22} = 0$. Since we have $q_{22} \neq q_{11}$, the first transformation can never accomplish this. The second, however, can do this, if and only if $p_{21} = 0$, i. e. if there exists upon S a second straight line directrix.

Consider now the case $\theta_4 = \theta_{10} = 0$. In order that the system may be equivalent to its adjoined system we must of course have $\theta_9 = 0$. This gives either $p_{12} = 0$ or else $u_{21} = 0$. In either case θ_6 also would vanish, and S would be either a quadric or a surface contained in a linear congruence with coincident directrices. In the former case the adjoined system is identical with the original. In the latter case our system becomes

$$y'' = 0, \qquad z'' + g(x) y = 0, \tag{17}$$

to which belongs the adjoined system

$$U'' = 0, \quad V'' - g(x) U = 0. \tag{18}$$

But if we put in (17)

$$y = U, \qquad z = -V$$

we obtain (18).

But whenever it is possible to transform a system (1) into its adjoined system by a transformation of the form

$$y = \alpha U + \beta V. \qquad z = \gamma U + \delta V,$$

the corresponding ruled surface remains invariant under a certain dualistic transformation.

We have therefore the following theorem.

If a ruled surface is self-dual, it must belong to a linear complex. If however, this complex is special, the surface must belong to still another linear complex, i. e. it must have two straight line directrices, which may or may not coincide. All such surfaces are self-dual.

Göttingen, July 29th, 1903.

Elementare Theorie der ganzen transcendenten Funktionen von endlicher Ordnung.

Von

Alfred Pringsheim in München.

In einigen kleineren Aufsätzen, welche im Laufe der letzten zwei Jahre in den Münchener Sitzungsberichten erschienen sind*), habe ich den Versuch gemacht, gewisse Hauptsätze aus der Theorie der *ganzen transcendenten Funktionen von endlicher Ordnung* in vollkommen *elementarer* Weise zu begründen. Dem aus diesem Anlaß von verschiedenen Seiten, so auch von der Redaktion dieser Zeitschrift geäußerten Wunsche nach einer elementaren, möglichst vollständigen und systematischen Darstellung dieser ganzen Theorie komme ich um so lieber nach, als es hierzu lediglich der Überarbeitung einer im Sommer 1902 von mir gehaltenen Vorlesung bedurfte. Von einer derartigen Darstellung wird man selbstverständlich nicht erwarten dürfen, daß sie wesentlich neue *Resultate* zu Tage fördert. Liegt es ja doch vielmehr auf der Hand, daß die Benützung des Infinitesimalkalküls und der komplexen Integration in mancher Hinsicht weiter trägt, als die hier angewendeten rein elementaren Methoden. Nichtsdestoweniger wird man, wie ich hoffe, ganz abgesehen von der Einfachheit der aufgewendeten Beweismittel, auch in der Fassung und Präzisierung der Resultate manches neue finden. Im übrigen verweise ich bezüglich der Auswahl und Gruppierung des hier verarbeiteten Stoffes auf die folgende ausführliche Inhaltsübersicht**).

---

*) Bd. 32 (1902), p. 163. 295; Bd. 33 (1903), p. 295.

**) *Literatur:* H. Poincaré, Sur les fonctions entières, Bull. de la soc. math. de France, T. 11 (1883), p. 142.

J. Hadamard, Études sur les propriétés des fonctions entières etc., Journ. de math. (4), T. 9 (1893), p. 171.

H. von Schaper, Über die Theorie der Hadamardschen Funktionen etc. Dissertat. Göttingen 1898.

E. Borel, Leçons sur les fonctions entières (Paris 1900).

Inhaltsübersicht.

I. Koeffizienteneigenschaften der ganzen Funktionen von endlicher Ordnung.

Seite.

§ 1. Definition der ganzen Funktionen $G(x)$ von endlicher Ordnung, — Ordnungszahl und Spezialtypus 259

§ 2. Eine Koeffizienteneigenschaft von $G(x)$, welche aus der Existenz einer *oberen* Schranke für $|G(x)|$ folgt 266

§ 3. Eine Koeffizienteneigenschaft von $G(x)$, welche aus der Existenz einer *unteren* Schranke für gewisse $|G(x)|$ folgt. 267

§ 4. Umkehrbare Beziehungen zwischen der Ordnungszahl von $G(x)$ und dem infinitären Verhalten der Koeffizienten 273

II. Ganze Funktionen, welche gar keine oder endlich viele Nullstellen besitzen.

§ 5. Ordnung und Spezialtypus von $e^{\sum_0^q{}_\nu a_\nu x^\nu}$ 281

§ 6. Allgemeine Form aller ganzen Funktionen ohne Nullstellen und von endlicher Ordnung. — Ganze Funktionen mit endlich vielen Nullstellen . . . 282

§ 7. Einfluß jedes einzelnen Koeffizienten auf die Existenz bezw. Nichtexistenz unendlich vieler Nullstellen. — Der Picardsche Satz 287

III. Ganze Funktionen mit unendlich vielen Nullstellen, insbesondere primitive ganze Funktionen von endlichem Range.

§ 8. Definitionen: Rang und Grenzexponent. Primitive ganze Funktionen . . 291

§ 9. Endlichkeit des Ranges jeder ganzen Funktion von endlicher Ordnung. — Die Ordnungszahl als obere Schranke des Grenzexponenten. 295

§ 10. Eine vorläufige obere Schranke für das Anwachsen einer primitiven Funktion 299

§ 11. Bestimmung einer exakteren oberen Schranke für das Anwachsen einer primitiven Funktion. 302

§ 12. Zusammenhang zwischen Ordnung, Rang und Grenzexponent einer primitiven Funktion 315

IV. Ganze Funktionen von endlicher Höhe.

§ 13. Definition der ganzen Funktion von endlicher Höhe. Endlichkeit ihrer Ordnung 318

§ 14. Existenz einer auf beliebig großen Kreisen gültigen oberen Schranke für den reziproken Wert einer primitiven Funktion 320

§ 15. Allgemeinste ganze Funktion von endlicher Ordnung. Zusammenhang zwischen Ordnung, Grad, Grenzexponent und Höhe. Vervollständigung des Picardschen Satzes. 326

Nachtrag 337

Ernst Lindelöf, Mémoire sur les fonctions entières de genre fini, Acta soc. scient. Fennicar, T. 31 (1902), p. 1.

(NB. Es sind hier nur die *wesentlichsten* Arbeiten über den vorliegenden Gegenstand angeführt; einige andere werden noch gelegentlich im Laufe der folgenden Untersuchung zitiert.)

I. Koeffizienteneigenschaften der ganzen Funktionen $G(x)$ von endlicher Ordnung.

§ 1.

Definition der ganzen Funktionen $G(x)$ von endlicher Ordnung. — Ordnungszahl und Spezialtypus.

1. Für eine ganze *rationale* Funktion n^{ten} Grades: $g(x) = \sum_0^n c_\nu x^\nu$ besteht bekanntlich die Beziehung:

$$\lim_{|x|=\infty} |g(x)| = \infty, \tag{1}$$

und zwar kann das Verhalten von $g(x)$ in der Nähe der „Stelle" $x = \infty$ des näheren in folgender Weise charakterisiert werden: Jedem $\varepsilon > 0$ läßt sich eine positive Zahl R_ε so zuordnen, daß:

$$|G(x)| \begin{Bmatrix} < |x|^{n+\varepsilon} \\ > |x|^{n-\varepsilon} \end{Bmatrix} \text{ für } \textit{alle } x, \text{ deren } |x| > R_\varepsilon. \tag{2}$$

Diese beiden Ungleichungen in Verbindung mit dem durchweg *regulären* Verhalten *im Endlichen* sind dann für $g(x)$ in *der* Weise *charakteristisch*, daß dadurch $g(x)$ unzweideutig als eine *ganze rationale Funktion n^{ten} Grades* gekennzeichnet wird.

Aus dieser Erkenntnis erwächst naturgemäß die Frage: Läßt sich nicht auch für ganze *transcendente* Funktionen eine genauere Differenzierung des *Verhaltens im Unendlichen* benützen, um bestimmte *Funktionsklassen* mit besonderen, wohldefinierten Eigenschaften eindeutig zu charakterisieren? Dabei wird man von vornherein festzuhalten haben, daß für eine ganze *transcendente* Funktion $G(x) = \sum_0^\infty c_\nu x^\nu$ an die Stelle der Beziehung (1) lediglich die folgende tritt:

$$\overline{\lim_{|x|=\infty}} |G(x)| = \infty \qquad (\text{dagegen: } \underline{\lim_{|x|=\infty}} |G(x)| = 0). \tag{3}$$

Versteht man also unter $M_1(r) > M_2(r)$ zwei je nach Umständen passend zu wählende und einander zu nähernde, monoton ins Unendliche wachsende Funktionen der positiven Veränderlichen r, so können hier die den Ungleichungen (2) entsprechenden Beziehungen nur in dem folgenden Umfange bestehen:

$$|G(x)| \begin{cases} < M_1(|x|) \text{ für } \textit{alle hinlänglich großen } x, \\ > M_2(|x|) \text{ für } \textit{gewisse } x, \text{ unter denen auch } \textit{beliebig große} \end{cases} \tag{4}$$

vorkommen. Zugleich erscheint die mögliche Auswahl von $M_1(r)$, $M_2(r)$

nach unten hin durch die Überlegung beschränkt, daß nach dem Cauchyschen Koeffizientensatze:

$$\operatorname*{Max}_{|x|=r} |G(x)| > c_{m_\nu} r^{m_\nu},$$

wenn c_{m_ν} *irgend einen* von Null verschiedenen unter den Koeffizienten c_ν bezeichnet. Daraus folgt also, daß $M_1(r)$ jedenfalls *stärker* ins Unendliche wachsen muß, als *jede noch so hohe Potenz von r.* Andererseits zeigt ein Blick auf einfache Beispiele, wie: e^{x^n}, $x^{-\frac{1}{2}} \sin\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$, daß es sicher ganze Funktionen $G(x)$ gibt, welche für *alle hinlänglich großen* x einer Ungleichung von der Form genügen:

$$\text{(A)} \qquad |G(x)| < e^{|x|^a},$$

unter a irgend eine *positive* Zahl verstanden (welche, wie das zweite der oben genannten Beispiele zeigt, eventuell auch < 1 sein kann). Wir führen nun die folgende *Definition* ein:

Jede ganze transcendente Funktion, welche einer Relation von der Form (A) genügt, soll eine ganze (transcendente) Funktion *von endlicher Ordnung* heißen.

Es wird sich dann zunächst darum handeln, aus der vorausgesetzten Existenz von Ungleichung (A) für *irgend ein* (endliches) $a > 0$ bestimmte Schlüsse auf die genauere Präzisierung der oben mit $M_1(|x|)$, $M_2(|x|)$ bezeichneten Funktionen zu ziehen. Dabei wollen wir im folgenden den Umfang zweier Aussagen von der Form (4) ein für allemal durch den etwas kürzeren Ausdruck bezeichnen:

$$\text{(4a)} \qquad |G(x)| \begin{cases} < M_1(|x|) \text{ für } \textit{alle } |x| > R, \\ > M_2(|x|) \text{ für } \textit{gewisse beliebig große } x. \end{cases}$$

2. Angenommen nun, es gibt irgend eine positive Zahl a_1, derart, daß Ungl. (A) erfüllt ist für $a = a_1$ und alle x, deren absoluter Betrag eine bestimmte positive Zahl R_1 übersteigt. Möglicherweise ist dann dieses a_1 schon die *kleinste* Zahl, welche die Existenz der fraglichen Relation nach sich zieht. Wenn *nicht*, so steht es frei, a_1 noch zu *verkleinern*. In jedem Falle wird man sagen können, daß die durch Ungl. (A) mit dem Zusatze $|x| > R_1$ charakterisierten Zahlen a_1 eine bestimmte *untere Grenze* α_1 besitzen, d. h. es gibt eine bestimmte, dem Intervall $0 \leqq \alpha_1 \leqq a_1$ angehörige Zahl α_1 von *der* Beschaffenheit, daß bei *beliebig kleinem* $\varepsilon > 0$:

$$\text{(5)} \qquad |G(x)| \begin{cases} < e^{|x|^{\alpha_1+\varepsilon}} \text{ für } \textit{alle } |x| > R_1, \\ > e^{|x|^{\alpha_1-\varepsilon}} \text{ für } \textit{mindestens ein } x \text{ des Bereiches } |x| > R_1. \end{cases}$$

Wird jetzt $R_2 > R_1$ angenommen, so gehört analog zu R_2 eine Zahl $\alpha_2 \geqq 0$, derart, daß bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$:

$$|G(x)| \begin{cases} < e^{|x|^{\alpha_2+\varepsilon}} & \text{für } \textit{alle } |x| > R_2, \\ > e^{|x|^{\alpha_2-\varepsilon}} & \text{für } \textit{mindestens ein } x \text{ des Bereiches } |x| > R_2. \end{cases}$$

Dabei kann nur $\alpha_2 \leqq \alpha_1$ sein, da die *erste* dieser Ungleichungen wegen $R_2 > R_1$ infolge der *ersten* Ungl. 5 *sicher* besteht, wenn $\alpha_2 = \alpha_1$ angenommen wird, die *zweite* aus dem nämlichen Grunde *niemals* bestehen kann, wenn $\alpha_2 > \alpha_1$. Bedeutet also

$$R_1,\ R_2 \cdots R_\nu \cdots$$

eine beliebige Folge *positiver, monoton ins Unendliche wachsender* Zahlen, so entspricht derselben eine *niemals zunehmende* Folge *nicht-negativer* Zahlen:

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_\nu \geqq \cdots$$

von *der* Beschaffenheit, daß bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$:

$$(6)\qquad |G(x)| \begin{cases} < e^{|x|^{\alpha_\nu+\varepsilon}} & \text{für } \textit{alle } |x| > R_\nu, \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots), \\ > e^{|x|^{\alpha_\nu-\varepsilon}} & \text{für } \textit{mindestens ein } x \text{ des Bereiches } |x| > R_\nu. \end{cases}$$

Die Folge der α_ν besitzt alsdann einen bestimmten *Grenzwert*, etwa:

$$(7)\qquad \lim_{\nu=\infty} \alpha_\nu = \alpha \geqq 0,$$

welcher offenbar von der besonderen Wahl der Folge (R_ν) völlig *unabhängig* ist. Denn läßt man an die Stelle der Folge (R_ν) irgend eine andere monoton ins Unendliche wachsende Folge (R'_μ) treten, so gehört zu jedem μ ein ν, derart, daß:

$$R_\nu \leqq R'_\mu < R_{\nu+1}.$$

Wird also die nach Art der (α_ν) gebildete Folge, welche der Folge (R'_μ) zugehört, mit (α'_μ) bezeichnet, so hat man nach dem oben gesagten:

$$\alpha_\nu \leqq \alpha'_\mu \leqq \alpha_{\nu+1}, \quad \text{also auch: } \lim_{\mu=\infty} \alpha'_\mu = \alpha.$$

Die Zahl α erscheint also als eine für die betrachtete Funktion $G(x)$ *charakteristische*, deren endgültige Bedeutung sich in folgender Weise angeben läßt. Wird $\delta > 0$ *beliebig klein* vorgeschrieben, so läßt sich eine natürliche Zahl n_δ so fixieren, daß:

$$\alpha_{n_\delta} \leqq \alpha + \frac{\delta}{2}, \quad \text{also: } \alpha_{n_\delta} + \frac{\delta}{2} \leqq \alpha + \delta,$$

und es besteht demnach, wenn man in der *ersten* Ungleichung (6) $\nu = n_\delta$, $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ setzt, die Beziehung:

$$(8)\qquad |G(x)| < e^{|x|^{\alpha+\delta}} \quad \text{für } \textit{alle } |x| > R_{n_\delta}.$$

Andererseits hat man für *jedes* ν:

$$\alpha_\nu > \alpha - \frac{\delta}{2}, \quad \text{also: } \alpha_\nu - \frac{\delta}{2} > \alpha + \delta,$$

sodaß aus der *zweiten* Ungleichung (6) vermittelst der Annahme $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ sich ergibt:

(9) $\quad |G(x)| > e^{|x|^{\alpha-\delta}}$ für *mindestens ein* x des Bereiches $|x| > R_\nu$.

Da hier ν jede der Zahlen 1, 2, 3, $\cdots$ bedeuten kann und $\lim\limits_{\nu=\infty} R_\nu = \infty$ ist, so besteht also die letzte Ungleichung für *unendlich viele* x, unter denen auch *beliebig große* vorkommen.

Schreibt man schließlich noch R_δ statt R_{n_δ} oder, noch etwas prägnanter, bezeichnet man mit R_δ die *untere Grenze* aller möglichen R_{n_δ}, so läßt sich das in Ungl. (8) und (9) enthaltene Resultat in folgender Weise formulieren:

Jede ganze Funktion von endlicher Ordnung ist von ganz bestimmter Ordnung α*); *d. h. genügt* $G(x)$ *einer Relation von der Form (A), so existiert eine***) *bestimmte Zahl* $\alpha \geqq 0$ *von der Beschaffenheit, daß bei beliebig kleinem* $\delta > 0$ *stets:*

$$\text{(B)} \qquad |G(x)| \begin{cases} < e^{|x|^{\alpha+\delta}} & \textit{für alle } |x| > R_\delta, \\ > e^{|x|^{\alpha-\delta}} & \textit{für gewisse beliebig große } x. \end{cases}$$

3. In dem besonderen Falle $\alpha = 0$, dessen Möglichkeit nach dem bisher gesagten keineswegs ausgeschlossen erscheint***), wird der Wert der *zweiten* Ungleichung (B) offenbar illusorisch: dieselbe enthält dann lediglich die triviale Aussage, daß für *gewisse beliebig große* x $|G(x)| > 1$ ausfällt. Will man hier eine wirklich *brauchbare*, d. h. mit $|x|$ noch *ins Unendliche* wachsende und daher zur Charakterisierung des *Unendlichwerdens* von $|G(x)|$ geeignete *untere* Schranke für $|G(x)|$ erhalten, so muß man von vornherein statt des Exponenten $|x|^\alpha$ eine Funktion einführen, die *langsamer* wächst, als jede *noch so niedrige* Potenz $|x|^\alpha$, dagegen immerhin *schneller* als jedes *noch so große* Multiplum von $\lg|x|$ (wegen $e^{n \cdot \lg|x|} = |x|^n$), und die dann eventuell auch zur Herabminderung der *oberen* Schranke $e^{|x|^\delta}$ dienen kann. Es wird hiernach zweckmäßig er-

*) Französische Autoren bezeichnen nach dem Vorgange von Borel das, was hier schlechthin „*Ordnung*" genannt wird, (wie mir scheint, nicht sehr glücklich) als „*ordre apparent*", während dann „*ordre réel*" als gleichbedeutend mit der weiter unten (s. § 8, Nr. 2, p. 293) einzuführenden Bezeichnung „*Grenzexponent*" gebraucht wird.

**) Daß es *nur eine* Zahl α geben kann, für welche die *beiden* Ungleichungen (B) in dem angegebenen Umfange bestehen, ist unmittelbar einleuchtend.

***) Beispiele für das wirkliche Vorkommen dieses Falles s. p. 316, Fußn. 1. Vgl. auch p. 328, Fußn. 4.

scheinen, den Begriff der Funktionen *endlicher* Ordnung noch dahin einzuschränken, daß man darunter nur Funktionen von *endlicher, nicht verschwindender* Ordnung versteht. Dabei wird aber festzuhalten sein, daß alle Resultate, welche von der in (B) auftretenden *oberen* Schranke herrühren, auch noch für den Fall $\alpha = 0$, also für die Funktionen *nullter* Ordnung gültig und brauchbar bleiben, während dagegen die auf der Existenz der *unteren* Schranke (B) beruhenden illusorisch werden*)

Im übrigen wird offenbar die soeben angedeutete *Einengung* der Schranken (B), welche bei den Funktionen *nullter* Ordnung für eine genauere Charakterisierung des infinitären Verhaltens sich geradezu als *notwendig* erwies, auch bei den Funktionen von (nicht verschwindender) *endlicher* Ordnung *möglich* und zur Verschärfung gewisser Resultate auch *wünschenswert* erscheinen. Bei der Herstellung solcher *engerer* Schranken hätte man offenbar in ganz analoger Weise zu verfahren, wie bei der successiven Verschärfung der Kriterien für die absolute Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen. Doch soll von der Durchführung dieses Prinzips hier vollständig abgesehen**) und lediglich noch die *folgende* besonders einfache und, wie sich zeigen wird, auch nützliche Verschärfung der Grenzbedingungen (B) in Betracht gezogen werden.

4. Es sei $G(x)$ *von der Ordnung* α. Dann ist offenbar der Fall denkbar und, wie die oben schon erwähnten einfachen Beispiele

$$e^{x^n}, \qquad x^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$$

unmittelbar erkennen lassen, auch tatsächlich vorhanden, daß für alle hinlänglich großen x nicht nur, wie die erste Ungleichung (B) es verlangt:

$$|G(x)| < e^{|x|^{\alpha+\delta}},$$

sondern sogar für irgend ein $c > 0$:

$$\text{(C)} \qquad |G(x)| < e^{c \cdot |x|^{\alpha}}.$$

Hat man sodann speziell:

$$\text{(10)} \qquad |G(x)| < e^{c_1 \cdot |x|^{\alpha}}, \quad \text{für } |x| > R_1,$$

so haben wiederum bei festgehaltenem R_1 die Zahlen c_1, für welche diese Ungleichung möglich ist, eine bestimmte *untere Grenze* γ_1, die sich *keinesfalls erhöhen* kann, wenn man R_1 successive durch *größere* Zahlen $R_2, R_3, \cdots$ ersetzt. Man gelangt auf diese Weise durch Benützung der

---

*) Analoge Bemerkungen gelten natürlich für ganze Funktionen von der Ordnung ∞, d. h. solche, welche für gewisse beliebig große x stärker anwachsen, als $e^{|x|^{\beta}}$ für *jedes noch so große* $\beta > 0$.

**) Derartige Untersuchungen findet man bei E. Lindelöf, a. a. O.; vgl. insbesondere p. 25. 45.

nämlichen Schlüsse, wie in Nr. 2, zunächst zu einer Folge *niemals zunehmender, nicht-negativer* Zahlen γ_ν $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$ von *der* Beschaffenheit, daß bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ (vgl. Ungl. (6)):

$$(11)\quad |G(x)| \begin{cases} < e^{(\gamma_\nu + \varepsilon)\cdot|x|^\alpha} \text{ für } \textit{alle } |x| > R_\nu, & (\nu = 1, 2, 3, \cdots) \\ > e^{(\gamma_\nu - \varepsilon)\cdot|x|^\alpha} \text{ für } \textit{mindestens ein } x \text{ des Bereiches } |x| > R_\nu, \end{cases}$$

und schließlich zu einer durch die Gleichung:

$$(12)\qquad \gamma = \lim_{\nu=\infty} \gamma_\nu$$

definierten, übrigens von der Wahl der R_ν durchaus *unabhängigen* und für die Funktion $G(x)$ *charakteristischen* nicht-negativen Zahl γ, welche die Eigenschaft besitzt, daß bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ (vgl. Ungl. (B)):

$$(\mathrm{D})\qquad |G(x)| \begin{cases} < e^{(\gamma+\varepsilon)\cdot|x|^\alpha} \textit{ für alle } |x| > R_\varepsilon, \\ > e^{(\gamma-\varepsilon)\cdot|x|^\alpha} \textit{ für gewisse beliebig große } x. \end{cases}$$

Ist hierbei $\gamma > 0$, in welchem Falle man den Ungleichungen (D) durch Substitution von $\gamma\varepsilon$ für γ auch die Form geben kann:

$$(\mathrm{D}')\qquad |G(x)| \begin{cases} < e^{(1+\varepsilon)\cdot\gamma\cdot|x|^\alpha}, \\ > e^{(1-\varepsilon)\cdot\gamma\cdot|x|^\alpha}, \end{cases}$$

so soll gesagt werden, es gehöre $G(x)$ dem *Normaltypus* γ der *Ordnung* α, kürzer: dem *Normaltypus* (α, γ) an.

Ist dagegen speziell $\gamma = 0$, in welchem Falle die *erste* der Ungleichungen (D) die Form annimmt:

$$(\mathrm{E}_1)\qquad |G(x)| < e^{\varepsilon\cdot|x|^\alpha} \textit{ für jedes } \varepsilon > 0 \textit{ und alle } |x| > R_\varepsilon,$$

während die Brauchbarkeit der *zweiten* illusorisch wird und an ihre Stelle lediglich die ursprüngliche zweite Ungleichung (B) tritt, d. h.:

$$(\mathrm{E}_2)\qquad |G(x)| > e^{|x|^{\alpha-\delta}} \textit{ für jedes } \delta > 0 \textit{ und gewisse beliebig große } x,$$

so soll gesagt werden, es gehöre $G(x)$ dem *Minimaltypus* der *Ordnung* α, kürzer: dem *Minimaltypus* (α) an.

Hierzu sei noch ausdrücklich bemerkt, daß die Existenz von Ungl. (E_1) für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ *keineswegs* diejenige von Ungl. (E_2) für jedes noch so kleine $\delta > 0$ *ausschließt.* Denn, wie klein auch $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ angenommen werden mögen, so hat man stets:

$$(13)\qquad \varepsilon\cdot|x|^\delta > 1, \quad \text{wenn: } |x| > R = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}},$$

und sodann durch Multiplikation mit $|x|^{\alpha-\delta}$:

$$(14)\qquad \varepsilon\cdot|x|^\alpha > |x|^{\alpha-\delta} \text{ für } |x| > R,$$

sodaß die *gleichzeitige* Existenz der Ungleichungen (E_1) und (E_2) keinen Widerspruch enthält.

Als Resultat dieser letzten Betrachtung ergibt sich also:

Genügt eine ganze Funktion $G(x)$ von der Ordnung α einer Relation von der Form (C): $|G(x)| < e^{c\cdot|x|^\alpha}$ *für* $|x| > R$, *so gehört* $G(x)$ *entweder dem Normal- oder dem Minimaltypus an; d. h.: Es gibt entweder eine bestimmte positive Zahl* γ, *welche gestattet, die beiden definierenden Ungleichungen* (B) *durch die präziseren Ungleichungen* (D) *oder* (D′) *zu ersetzen;* oder es läßt sich die *erste* Ungleichung (B) durch die *sehr viel stärkere* (E_1) *ersetzen.*

Es bleibt noch als *zweite*, ausschließlich vorhandene Möglichkeit der Fall zu untersuchen, daß $G(x)$ *keiner* Relation von der Form (C) genügt. Dann müssen offenbar, *wie groß* auch die positive Zahl c angenommen wird, unter *beliebig großen* Werten von x immer wieder solche vorkommen, für welche:

$$|G(x)| > e^{c\cdot|x|^\alpha} \tag{15}$$

ausfällt. In diesem Falle läßt sich also die *zweite* Ungleichung (B) durch die *sehr viel stärkere* (15) in *dem* Sinne ersetzen, daß es freisteht c *unbegrenzt zu vergrößern.* Für jedes *nicht* dem *Normal-* oder *Minimal*typus angehörige $G(x)$ von der Ordnung α bestehen demnach die charakteristischen Ungleichungen:

$$\text{(F)}\qquad |G(x)| \begin{cases} < e^{|x|^{\alpha+\delta}} & \text{für } jedes\ \delta > 0 \text{ und } alle\ |x| > R_\delta, \\ > e^{\frac{1}{\varepsilon}\cdot|x|^\alpha} & \textit{für jedes } \varepsilon > 0 \textit{ und gewisse beliebig große } x. \end{cases}$$

Alsdann soll gesagt werden, es gehöre $G(x)$ dem *Maximaltypus* der Ordnung α, kürzer: dem *Maximaltypus* (α) an.

Hiernach lassen sich die Hauptergebnisse dieses Paragraphen schließlich in folgender Weise zusammenfassen:

Ist eine ganze Funktion $G(x)$ überhaupt von endlicher Ordnung, so ist sie nicht nur von bestimmter Ordnung α, sondern sie gehört, sofern nur $\alpha > 0$, einem bestimmten von drei wohldefinierten Haupttypen an. Mit anderen Worten: Steht von vornherein nur fest, daß für $G(x)$ eine Relation von der Form (A) *existiert, so genügt $G(x)$ nicht nur den beiden Ungleichungen* (B), *sondern einem der drei spezielleren Ungleichungspaare* (D), (E), (F).

§ 2.

Eine Koeffizienteneigenschaft von $G(x)$, welche aus der Existenz einer *oberen* Schranke für $|G(x)|$ folgt.

Hauptsatz I. *Genügt die beständig konvergierende Reihe* $\sum_0^\infty {}_\nu\, c_\nu x^\nu$ *für alle* x, *deren absoluter Betrag eine gewisse positive Zahl übersteigt, einer Relation von der Form:*

(G) $$\left|\sum_0^\infty {}_\nu\, c_\nu x^\nu\right| \leqq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha} \quad (A > 0,\ \gamma > 0,\ \alpha > 0),$$

so hat man:

(g) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} \leqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Beweis. Aus (F) folgt auf Grund des Cauchyschen Koeffizientensatzes:

(1) $$|c_\nu x^\nu| \leqq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots;\ |x| > R).$$

Setzt man:

$$|x| = \left(\frac{\nu}{\alpha\gamma}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > R, \text{ d. h. } \nu > \alpha\gamma \cdot R^\alpha,$$

so wird:

(2) $$|c_\nu| \cdot \left(\frac{\nu}{\alpha\gamma}\right)^{\frac{\nu}{\alpha}} \leqq A \cdot e^{\frac{\nu}{\alpha}},$$

anders geschrieben:

(3) $$\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{\nu}{\alpha}} \cdot |c_\nu| \leqq A \cdot (\alpha\gamma)^{\frac{\nu}{\alpha}}.$$

Erhebt man in die $\left(\frac{1}{\nu}\right)^{te}$ Potenz, so folgt durch Übergang zur Grenze $\nu = \infty$:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} \leqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}},$$

d. h. man erhält die *erste* Form der unter (f) behaupteten Koeffizientenrelation. Um auch die *zweite* zu gewinnen, könnte man sich der Stirlingschen Formel:

$$\nu! = \sqrt{2\pi} \cdot \nu^{\nu + \frac{1}{2}} \cdot e^{-\nu + \frac{\vartheta_\nu}{12\nu}} \qquad (0 < \vartheta_\nu < 1)$$

bedienen, welche ja für $\nu = \infty$ die Beziehung liefert:

(4) $$\sqrt[\nu]{\nu!} \cong \frac{\nu}{e} \cdot$$

Man kann aber diese letztere Beziehung und somit das gewünschte Resultat auch *ohne* dieses relativ komplizierte Hilfsmittel in folgender, äußerst elementaren Weise herleiten. Man hat:

$$(5)\qquad e^{\nu} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} \frac{\nu^{\lambda}}{\lambda!} > \frac{\nu^{\nu}}{\nu!}, \quad \text{also:} \quad \nu! > \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\nu}.$$

Andererseits ist:

$$\nu! = \frac{1^2 \cdot 2^3 \cdot 3^4 \cdots (\nu-1)^{\nu} \cdot \nu^{\nu+1}}{2^2 \cdot 3^3 \cdots (\nu-1)^{\nu-1} \cdot \nu^{\nu}}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^{\nu} \cdot \nu^{\nu+1} = \nu^{\nu+1} \cdot \prod_{1}^{\nu-1}{}_{\lambda} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^{\lambda+1}}$$

und daher mit Benützung der bekannten Beziehung: $\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^{\lambda+1} > e$:

$$(6)\qquad \nu! < \nu^{\nu+1} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{\nu-1} = \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\nu} \cdot \nu e.$$

Durch Zusammenfassung von (5) und (6) ergibt sich also die doppelte Ungleichung:

$$(7)\qquad \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\nu} < \nu! < \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\nu} \cdot \nu e,$$

aus welcher dann unmittelbar die Beziehung (4) resultiert.

Im übrigen findet man auch durch direkte Benützung der *zweiten* Ungleichung (7) und Gleichung (3):

$$(8)\qquad (\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_{\nu}| < A \cdot (\nu e)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot (\alpha\gamma)^{\frac{\nu}{\alpha}}$$

und hieraus durch Erhebung in die $\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\text{te}}$ Potenz und Übergang zur Grenze $\nu = \infty$ die *zweite* Form der Behauptung (f):

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_{\nu}|} \leqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

§ 3.

Eine Koeffizienteneigenschaft von $G(x)$, welche aus der Existenz einer *unteren* Schranke für gewisse $|G(x)|$ folgt.

1. Dem Beweise des weiter unten zu formulierenden *Hauptsatzes* II, welcher das Analogon und die Ergänzung zu dem zuvor abgeleiteten *Hauptsatze* I bildet, schicken wir zunächst zwei Hilfssätze*) voran.

*) Die Verwertung des *Hilfssatzes* I zur Abkürzung eines früher von mir gegebenen elementaren Beweises für den *Hauptsatz* II (Münch. Ber. 32 [1902] p. 165)

Hilfssatz I. *Bedeutet* $\sum_0^\infty {}_\nu\, a_\nu r^\nu$ *eine beständig konvergierende Reihe mit reellen Koeffizienten und ist für unendlich viele positive r, unter denen auch beliebig große vorkommen:*

$$\sum_0^\infty {}_\nu\, a_\nu r^\nu \geqq 0, \tag{1}$$

so gibt es unendlich viele Indices m_ν, *für welche:*

$$a_{m_\nu} \geqq 0. \tag{2}$$

Beweis. Angenommen, die Behauptung wäre unrichtig, so müßte von einer bestimmten Stelle ab, etwa $\nu \geqq n$, beständig

$$a_\nu < 0 \tag{3}$$

sein. Andererseits könnte man eine positive Zahl R so fixieren, daß für $r > R$:

$$|a_n| \cdot r^n > \left| \sum_0^{n-1} {}_\nu\, a_\nu r^\nu \right|, \tag{4}$$

und daher, wegen: $a_n r^n < 0$:

$$\sum_0^n {}_\nu\, a_\nu r^\nu < 0 \quad (\text{für: } r > R). \tag{5}$$

Da überdies für *jedes* positive r

$$\sum_{n+1}^\infty {}_\nu\, a_\nu r^\nu < 0 \tag{6}$$

ausfallen müßte, so hätte man schließlich:

$$\sum_0^\infty {}_\nu\, a_\nu r^\nu < 0 \quad \text{für } jedes\ r > R, \tag{7}$$

was der Voraussetzung widerspricht. —

Hilfssatz II. *Ist* $\sum_0^\infty b_\nu^\varkappa$, *wo* $\varkappa > 0$, *eine konvergente Reihe mit nicht-negativen Gliedern,* δ *eine beliebig anzunehmende positive Zahl, so hat man:*

(a) Für $\varkappa > 1$: $\displaystyle\sum_0^\infty {}_\nu\, b_\nu^\varkappa < \left(\sum_0^\infty {}_\nu\, b_\nu\right)^\varkappa$,

(b) Für $\varkappa < 1$: $\displaystyle\sum_0^\infty {}_\nu\, b_\nu^\varkappa < \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^\infty {}_\nu\, (1+\delta)^{\left(\frac{1}{\varkappa}-1\right)\cdot\nu} . b_\nu\right)^\varkappa$.

---

verdanke ich Herrn Lüroth (vgl. ebendas. p. 295), von dem auch der Grundgedanke zur Abkürzung des von mir ursprünglich gegebenen Beweises von *Hilfssatz* II herrührt.

Beweis. Setzt man:

$$\sum_0^\infty b_\nu = B\ *),$$

so besteht für jedes ν die Beziehung:

$$\frac{b_\nu}{B} < 1, \tag{8}$$

und daher auch, falls $\varkappa > 1$, die folgende:

$$\left(\frac{b_\nu}{B}\right)^{\varkappa - 1} < 1,$$

also:

$$\left(\frac{b_\nu}{B}\right)^{\varkappa} < \frac{b_\nu}{B}. \tag{9}$$

Substituiert man hier $\nu = 0, 1, 2, \cdots, n$, so folgt durch Summation und Übergang zur Grenze $n = \infty$:

$$\frac{1}{B^\varkappa} \cdot \sum_0^\infty b_\nu^\varkappa < \frac{1}{B} \cdot \sum_0^\infty b_\nu = 1, \tag{10}$$

also in der Tat, wie unter (a) behauptet:

$$\sum_0^\infty b_\nu^\varkappa < \left(\sum_0^\infty b_\nu\right)^\varkappa \qquad (\varkappa > 1). \tag{a}$$

Um die Richtigkeit von (b) zu beweisen, werde gesetzt:

$$\sum_0^\infty a_\nu = A, \quad \sum_0^\infty a_\nu c_\nu = S, \tag{11}$$

wobei vorläufig Σa_ν, $\Sigma a_\nu c_\nu$ *irgend zwei konvergente* Reihen mit nichtnegativen Gliedern bedeuten sollen. Ist sodann für $\varkappa < 1$ auch noch die Reihe $\Sigma a_\nu c_\nu^\varkappa$ *konvergent*, so besteht die Identität:

$$\sum_0^\infty a_\nu c_\nu^\varkappa = \left(\frac{S}{A}\right)^\varkappa \cdot \sum_0^\infty a_\nu \cdot \left(\frac{A}{S} \cdot c_\nu\right)^\varkappa. \tag{12}$$

---

*) Hiermit wird also Σb_ν ohne weiteres als *konvergent* angesehen. Die Richtigkeit dieser Annahme folgt in der Tat unmittelbar aus der vorausgesetzten Konvergenz von $\Sigma b_\nu^\varkappa$, falls $\varkappa < 1$. Ist dagegen $\varkappa > 1$, so *könnte* Σb_ν immerhin *divergieren*. In diesem Falle würde offenbar Ungleichung (a) etwas allemal *richtiges*, aber *wertloses* aussagen: es kommt also auch hier lediglich der Fall der *Konvergenz* von Σb_ν ernstlich in Betracht.

Nun gilt aber für jedes $a > 0$, $\varkappa < 1$ die bekannte Beziehung*):

$$a^\varkappa < 1 + \varkappa(a-1),$$

also:

(13) $$\left(\frac{A}{S}\cdot c_\nu\right)^\varkappa < 1 + \varkappa\cdot\left(\frac{A}{S}\cdot c_\nu - 1\right).$$

Durch Multiplikation mit a_ν, Substitution von $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ und Summation ergibt sich hieraus:

(14) $$\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu\cdot\left(\frac{A}{S}\cdot c_\nu\right)^\varkappa < \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu + \varkappa\left(\frac{A}{S}\cdot\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu c_\nu - \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu\right) = \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu,$$

und daher mit Benützung der Identität (12):

$$\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu c_\nu^\varkappa < \left(\frac{S}{A}\right)^\varkappa\cdot\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu = \left(\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu\right)^{1-\varkappa}\cdot\left(\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu c_\nu\right)^\varkappa.$$

Setzt man jetzt noch:

(15) $$a_\nu = \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^\nu, \quad a_\nu c_\nu^\varkappa = b_\nu^\varkappa,$$

also:

$$\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu = \frac{1+\delta}{\delta}, \qquad c_\nu = a_\nu^{-\frac{1}{\varkappa}}\cdot b_\nu = (1+\delta)^{\frac{\nu}{\varkappa}}\cdot b_\nu,$$

so folgt, wie unter (b) behauptet wurde:

(b) $$\sum_0^\infty{}_\nu\, b_\nu^\varkappa < \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{1-\varkappa}\cdot\left(\sum_0^\infty{}_\nu\,(1+\delta)^{\left(\frac{1}{\varkappa}-1\right)\nu}\cdot b_\nu\right)^\varkappa \quad (\varkappa < 1).$$

2. Hauptsatz II. *Genügt die beständig konvergierende Reihe* $\sum_0^\infty{}_\nu\, C_\nu x^\nu$ *für unendlich viele x, unter denen auch beliebig große vorkommen, einer Relation von der Form:*

(H) $$\left|\sum_0^\infty{}_\nu\, C_\nu x^\nu\right| \geqq A\cdot e^{\gamma\cdot|x|^\alpha} \quad (A>0,\ \gamma>0,\ \alpha>0),$$

so hat man:

(h) $$\varlimsup_{\nu=\infty}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\sqrt[\nu]{|C_\nu|} = \varlimsup_{\nu=\infty}\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot|C_\nu|} \geqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Beweis. Es werde zunächst $\alpha = 1$ angenommen. Setzt man sodann $|x| = r$, so resultiert aus der Voraussetzung (G) *a fortiori* die folgende:

*) Eine völlig elementare Herleitung dieser Ungleichung s. Münch. Ber. 32 (1902) p. 176, 300.

(16) $$\sum_0^\infty |C_\nu| \cdot r^\nu \geqq A \cdot e^{\gamma r} = A \cdot \sum_0^\infty \frac{\gamma^\nu r^\nu}{\nu!},$$

sodaß also für unendlich viele r, unter denen auch beliebig große vorkommen, die Beziehung besteht:

(17) $$\sum_0^\infty \frac{1}{\nu!}(\nu!\,|C_\nu| - A\gamma^\nu) \cdot r^\nu \geqq 0.$$

Man hat somit nach Hilfssatz I für *unendlich viele* m_ν:

(18) $$m_\nu!\,|C_{m_\nu}| \geqq A \cdot \gamma^{m_\nu}$$

und, mit Benützung der aus Ungl. (7), p. 267 entspringenden Beziehung:

$$\left(\frac{m_\nu}{e}\right)^{m_\nu} > \frac{1}{m_\nu e} \cdot m_\nu!$$

auch:

(19) $$\left(\frac{m_\nu}{e}\right)^{m_\nu} \cdot |C_{m_\nu}| > A \cdot \frac{1}{m_\nu e}\,\gamma^{m_\nu}.$$

Erhebt man die beiden Ungleichungen (18), (19) in die $\left(\frac{1}{m_\nu}\right)^{\text{te}}$ Potenz, so liefern sie durch Übergang zur Grenze die Beziehung:

(20) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \frac{\nu}{e} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \sqrt[\nu]{\nu!\,|C_\nu|} \geqq \gamma,$$

welche mit der unter (g) behaupteten für den Fall $\alpha = 1$ zusammenfällt.

Ist jetzt α von 1 verschieden, so bringe man die auf Grund der Voraussetzung (G) *a fortiori* bestehende Ungleichung:

(21) $$\sum_0^\infty |C_\nu x^\nu| \geqq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha} \quad \text{(für *gewisse beliebig große* } x)$$

durch die Substitution

$$|x| = r^{\frac{1}{\alpha}}$$

auf die Form:

(22) $$\sum_0^\infty |C_\nu| \cdot r^{\frac{\nu}{\alpha}} \equiv \sum_0^\infty (|C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu)^{\frac{1}{\alpha}} \geqq A \cdot e^{\gamma r}.$$

Man hat sodann im Falle $\alpha < 1$ nach Ungl. (a) des Hilfssatzes II (indem man dort $\varkappa = \frac{1}{\alpha}$, $b_\nu = |C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu$ setzt):

(23) $$\sum_0^\infty (|C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(\sum_0^\infty |C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

und daher, wenn man diese Ungleichung in die α^{te} Potenz erhebt, mit Berücksichtigung von Ungl. (22):

$$\sum_0^\infty |C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu > A^\alpha \cdot e^{\alpha\gamma r} \quad \text{(für *gewisse beliebig große* } r), \tag{24}$$

sodaß sich mit Benützung des bereits gefundenen, in Ungl. (20) enthaltenen Spezialresultates ergibt:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \frac{\nu}{e} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|^\alpha} = \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \sqrt[\nu]{\nu!\,|C_\nu|^\alpha} \geqq \alpha\gamma \qquad (\alpha < 1). \tag{25}$$

Im Falle $\alpha > 1$ hat man analog nach Ungl. (b) des Hilfssatzes II:

$$\sum_0^\infty (|C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{1-\frac{1}{\alpha}} \cdot \left(\sum_0^\infty (1+\delta)^{(\alpha-1)\cdot\nu} \cdot |C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{26}$$

folglich, wenn man diese Ungleichung wiederum in die α^{te} Potenz erhebt, mit Berücksichtigung von Ungl. (22):

$$\begin{aligned} \sum_0^\infty (1+\delta)^{(\alpha-1)\cdot\nu} \cdot |C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu &> \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{\alpha-1} \cdot \left(\sum_0^\infty (|C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha \\ &\geqq \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{\alpha-1} \cdot A^\alpha \cdot e^{\alpha\gamma r}, \end{aligned} \tag{27}$$

und, wenn man noch r durch $(1+\delta)^{1-\alpha} \cdot r$ ersetzt:

$$\sum_0^\infty |C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu > \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{\alpha-1} \cdot A^\alpha \cdot e^{\alpha\gamma(1+\delta)^{1-\alpha}\cdot r}, \tag{28}$$

Hieraus würde sich mit Hilfe von Ungl. (20) zunächst ergeben:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \frac{\nu}{e} \sqrt[\nu]{|C_\nu|^\alpha} = \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \sqrt[\nu]{\nu!\,|C_\nu|^\alpha} \geqq (1+\delta)^{1-\alpha} \cdot \alpha\gamma. \tag{29}$$

Da aber $\delta > 0$ unbegrenzt verkleinert werden darf, so folgt schließlich:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \frac{\nu}{e} \sqrt[\nu]{|C_\nu|^\alpha} = \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \sqrt[\nu]{\nu!\,|C_\nu|^\alpha} \geqq \alpha\gamma \qquad (\alpha > 1). \tag{30}$$

Durch Erhebung der Relationen (25), (30) in die $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{te}$ Potenz und Zusammenfassung mit Ungl. (20) ergibt sich also, wie behauptet:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \sqrt[\nu]{|C_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |C_\nu|} \geqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{h}$$

für *jedes* positive α.

§ 4.

Umkehrbare Beziehungen zwischen der Ordnungszahl von $G(x)$ und dem infinitären Verhalten der Koeffizienten.

1. Die in § 2, § 3 bewiesenen Hauptsätze sind in der gegebenen Form *nicht* ohne weiteres *umkehrbar*. Dagegen lassen sich die betreffenden Voraussetzungen in verschiedener Art so *erweitern*, daß die entsprechenden Sätze *umkehrbar* werden.

Satz I. *Ist bei beliebig kleinen* $\varepsilon > 0$:

$$(\mathrm{I}_1)\qquad \left|\sum_0^\infty{}^{\nu}\, c_\nu x^\nu\right| < e^{(1+\varepsilon)\cdot\gamma\cdot|x|^\alpha} \quad \textit{für alle } |x| > R_\varepsilon,$$

$$(\mathrm{I}_2)\qquad \left|\sum_0^\infty{}^{\nu}\, C_\nu x^\nu\right| > e^{(1-\varepsilon)\cdot\gamma\cdot|x|^\alpha} \quad \textit{für gewisse beliebig große } x,$$

so bestehen die Beziehungen:

$$(\mathrm{i}_1)\qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} \leqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$(\mathrm{i}_2)\qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |C_\nu|} \geqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}},$$

und umgekehrt)*.

---

*) Setzt man:

$$(\alpha\gamma e)^{\frac{1}{\alpha}} = \varkappa, \quad \text{also:} \quad \gamma = \frac{\varkappa^\alpha}{\alpha e},$$

so nimmt die fragliche Umkehrung die folgende Form an:

Aus den Voraussetzungen:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} \leqq \varkappa,$$

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|} \geqq \varkappa$$

folgt allemal:

$$\left|\sum_0^\infty{}^{\nu}\, c_\nu x^\nu\right| < e^{\frac{1+\varepsilon}{\alpha e}\cdot|\varkappa x|^\alpha},$$

$$\left|\sum_0^\infty{}^{\nu}\, C_\nu x^\nu\right| > e^{\frac{1-\varepsilon}{\alpha e}\cdot|\varkappa x|^\alpha}$$

in dem oben näher bezeichneten Umfange.

Eine sehr kurze und verhältnismäßig elementare Herleitung dieser Beziehungen gibt Herr E. Lindelöf in einer Note, welche mir während der Drucklegung dieser Abhandlung zuging: „Sur la détermination de la croissance des fonctions entières etc." Bull. des sc. math. (2) T. 27 (1903). Eine *vollkommen* elementare Modifikation der

Beweis. Aus der Voraussetzung (I_1) würde auf Grund des Hauptsatzes I (Ungl. (G), (g), p. 266) zunächst folgen, daß für jedes $\varepsilon > 0$:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} \leqq ((1+\varepsilon)\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Da aber diese Grenzwerte, wenn sie überhaupt unter einer endlichen Schranke liegen, eindeutig bestimmte Zahlen vorstellen und andererseits ε unbegrenzt verkleinert werden darf, so ergibt sich unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung (i_1).

Das analoge gilt bezüglich der Herleitung von Ungl. (i_2).

Die *Umkehrbarkeit* dieser Resultate läßt sich sodann in folgender Weise *indirekt* beweisen. Angenommen, es bestehe die Voraussetzung (i_1) und es sei *nicht* möglich, *jedem beliebig kleinen* $\varepsilon > 0$ ein R_ε so zuzuordnen, daß Ungl. (I_1) für $|x| > R_\varepsilon$ *beständig* erfüllt ist: alsdann müßte ein bestimmtes $\varepsilon' > 0$ existieren, derart daß unter *beliebig großen* x immer wieder solche vorkommen, für welche:

$$\left|\sum_0^\infty c_\nu x^\nu\right| \geqq e^{(1+\varepsilon')\cdot\gamma\cdot|x|^\alpha}.$$

Hieraus würde aber nach dem Hauptsatze II (Formel (H), (h) p. 270) folgen, daß:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} \geqq ((1+\varepsilon')\cdot\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}},$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Analog würde die Annahme, daß die Beziehung (I_2) *nicht* allemal aus der Voraussetzung (i_2) resultiere, die Existenz einer Ungleichung von der Form:

$$\left|\sum_0^\infty C_\nu x^\nu\right| \leqq e^{(1-\varepsilon')\cdot\gamma\cdot|x|^\alpha}$$

nach sich ziehen und somit schließlich im Widerspruche mit der Voraussetzung auf die Relation:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |C_\nu|} \leqq ((1-\varepsilon')\cdot\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}$$

führen.

Lindelöfschen Methode findet man in einem *Nachtrage* am Schlusse der vorliegenden Abhandlung.

2. Satz II. *Ist bei beliebig kleinem* $\varepsilon > 0$:

$$(\mathrm{K}_1)\qquad \left|\sum_0^\infty c_\nu x^\nu\right| < e^{\varepsilon\cdot|x|^\alpha} \quad \textit{für alle } |x| > R_\varepsilon,$$

$$(\mathrm{K}_2)\qquad \left|\sum_0^\infty C_\nu x^\nu\right| > e^{\frac{1}{\varepsilon}\cdot|x|^\alpha} \quad \textit{für gewisse beliebig große } x,$$

so bestehen die Beziehungen:

$$(\mathrm{k}_1)\qquad \lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \lim_{\nu=\infty}\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot|c_\nu|} = 0,$$

$$(\mathrm{k}_2)\qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\sqrt[\nu]{|C_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}}\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot|C_\nu|} = \infty,$$

und umgekehrt.

Beweis. Aus den Voraussetzungen (K_1), (K_2) würde auf Grund der Hauptsätze I, II zunächst folgen, daß:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}}\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot|c_\nu|} \leqq (\alpha\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\sqrt[\nu]{|C_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}}\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot|C_\nu|} \geqq \left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Da es aber freisteht, $\varepsilon > 0$ unbegrenzt zu verkleinern, so müssen die fraglichen Grenzwerte geradezu $= 0$ bezw. $= \infty$ ausfallen. Infolgedessen ist es auch gestattet, im ersten Gliede *beider* Relationen den Faktor $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ einfach wegzulassen, außerdem in der *ersten* Relation das Zeichen $\overline{\lim}$ durch lim zu ersetzen, sodaß sich in der Tat die Ungleichungen (k_1), (k_2) ergeben.

Die Umkehrbarkeit dieser Resultate erkennt man dann wiederum unmittelbar auf indirektem Wege, ganz analog wie bei Satz I. —

3. Satz III. *Ist bei beliebig kleinem* $\delta > 0$;

$$(\mathrm{L}_1)\qquad \left|\sum_0^\infty c_\nu x^\nu\right| < e^{|x|^{\alpha+\delta}} \quad \textit{für alle } |x| > R_\delta,$$

$$(\mathrm{L}_2)\qquad \left|\sum_0^\infty C_\nu x^\nu\right| > e^{|x|^{\alpha-\delta}} \quad \textit{für gewisse beliebig große } x,$$

so bestehen für jedes beliebig kleine $\delta > 0$ die Beziehungen:

$$(\mathrm{l}_1) \qquad \lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot |c_\nu|} = 0,$$

$$(\mathrm{l}_2) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot |C_\nu|} = \infty,$$

und umgekehrt.

Beweis. Denkt man sich δ beliebig klein fixiert, so besteht auf Grund der Voraussetzung (L_1) für alle hinlänglich großen x (nämlich für $|x| > R_{\frac{1}{2}\delta}$) die Beziehung:

$$\left|\sum_0^\infty{}_\nu\, c_\nu x^\nu\right| < e^{|x|^{\alpha+\frac{\delta}{2}}} = e^{\left|\frac{1}{x}\right|^{\frac{\delta}{2}} \cdot |x|^{\alpha+\delta}}.$$

Wie klein jetzt auch $\varepsilon > 0$ vorgeschrieben werden möge, so kann man durch hinlängliche Vergrößerung von $|x|$ stets erzielen, daß $\left|\frac{1}{x}\right|^{\frac{\delta}{2}} < \varepsilon$ ausfällt. Dann ergibt sich aber aus Satz II (Ungl. (k_1)), daß für *dieses* und somit schließlich für *jedes* $\delta > 0$:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot |c_\nu|} = 0,$$

wie unter (l_1) behauptet wurde. Das analoge gilt bezüglich der Behauptung (l_2).

Auch hier erkennt man die Umkehrbarkeit der betreffenden Resultate mit Hilfe des in Satz I benützten indirekten Beweisverfahrens. —

4. Ersetzt man in den vorstehenden Sätzen I, II, III die mit C_ν bezeichneten Koeffizienten durch c_ν, so ergibt sich mit Benützung der in § 1 gegebenen Definitionen das folgende *Hauptresultat**):

Ist $G(x) = \sum_0^\infty{}_\nu\, c_\nu x^\nu$ von der Ordnung $\alpha > 0$, so bestehen bei beliebig kleinem $\delta > 0$ die Beziehungen:

$$(\mathrm{Ia}) \qquad \lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot |c_\nu|} = 0,$$

$$(\mathrm{Ib}) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{\alpha-\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha-\delta}} \cdot |c_\nu|} = \infty,$$

---

*) Literaturangaben s. Münch. Ber. 32 (1902), p. 163, 164.

Gehört $G(x)$ dem Minimal- bezw. Maximaltypus (α) an, so darf man in der ersten bezw. zweiten Relation geradezu $\delta = 0$ setzen, sodaß also:

$$\text{(IIa)}\quad \lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} = 0 \quad \textit{für den Minimaltypus},$$

$$\text{(IIb)}\quad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} = \infty \quad \textit{für den Maximaltypus}.$$

Gehört $G(x)$ dem Normaltypus (α, γ) an, so wird:

$$\text{(III)}\quad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} = (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \textit{(d. h. endlich und von Null verschieden)}.$$

Alle diese Beziehungen sind umkehrbar).*

Man kann den wesentlichen Inhalt dieser Aussagen in folgender Weise zusammenfassen:

Die Ordnung (einschließlich des besonderen Typus) von $G(x) = \sum_0^\infty c_\nu x^\nu$ d. h. das infinitäre Anwachsen der Maxima von $|G(x)|$ ist umkehrbar-eindeutig mit der infinitären Abnahme der $|c_\nu|$ verknüpft.

Auch sei noch ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß also *Ordnung* und *Spezialtypus* von $G(x)$ lediglich von den *Absolutwerten* der c_ν, noch präciser ausgedrückt, von dem infinitären Verhalten dieser Absolutwerte abhängig ist. Im übrigen läßt sich selbstverständlich das infinitäre

*) Dabei bestimmt sich also, wenn:

$$\left.\begin{matrix} \overline{\lim\limits_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} \\ \overline{\lim\limits_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} |c_\nu|} \end{matrix}\right\} = \lambda,$$

der „Typus" γ aus der Gleichung:

$$(\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}} = \lambda, \quad \text{also:} \quad \gamma = \frac{\lambda^\alpha}{\alpha}.$$

Man bemerke noch, daß die drei Gleichungen (IIa), (IIb) und (III) *alle* Möglichkeiten erschöpfen, welche das Verhalten von $\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{\alpha}} \sqrt[\nu]{|c_\nu|}$ darbieten kann. Damit ist also zugleich ein neuer Beweis dafür geliefert, daß jedes $G(x)$ von der Ordnung α *einem* jener drei *Spezialtypen* angehören muß.

Verhalten der $|c_\nu|$ statt durch die oben angegebenen *Grenzgleichungen* auch durch entsprechende *Ungleichungen* für *endliche* ν charakterisieren. Setzt man der bequemeren Schreibweise halber durchweg:

$$\alpha = \frac{1}{\alpha'}$$

und sodann in (Ia):

$$\frac{1}{\alpha+\delta} = \frac{1}{\alpha} - \frac{\delta}{\alpha(\alpha+\delta)} = \alpha' - \delta' \quad \left(\text{also: } \delta' = \frac{\delta}{\alpha(\alpha+\delta)}\right),$$

desgl. in (Ib):

$$\frac{1}{\alpha-\delta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha(\alpha-\delta)} = \alpha' + \delta' \quad \left(\text{also: } \delta' = \frac{\delta}{\alpha(\alpha-\delta)}\right),$$

sodaß also in beiden Fällen δ' *gleichzeitig* mit δ *beliebig klein* wird, so nimmt der zweite Teil der Gleichungen (Ia), (Ib) die Form an:

$$(\mathrm{K}') \quad \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\nu!^{\alpha'-\delta'} \cdot |c_\nu|} = 0, \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu!^{\alpha'+\delta'} \cdot |c_\nu|} = \infty \quad (\text{für jedes } \delta' > 0).$$

Hieraus ergibt sich, daß zum mindesten:

$$\begin{array}{ll} (1\mathrm{a}) \\ \\ (1\mathrm{b}) \end{array} \quad |c_\nu| \begin{cases} < \left(\frac{1}{\nu!}\right)^{\alpha'-\delta'} & \text{für } \textit{alle hinlänglich großen } \nu, \text{ etwa } \nu > n_{\delta'}, \\ > \left(\frac{1}{\nu!}\right)^{\alpha'+\delta'} & \text{für } \textit{gewisse beliebig große } \nu. \end{cases}$$

Es läßt sich aber leicht zeigen, daß auch umgekehrt diese letzteren Ungleichungen stets die Existenz der Gleichungen (K′) nach sich ziehen.*) Aus (1a), (1b) folgt nämlich, daß auch:

$$|c_\nu| \begin{cases} < \left(\frac{1}{\nu!}\right)^{\alpha'-\frac{\delta'}{2}} = \left(\frac{1}{\nu!}\right)^{\frac{\delta'}{2}} \cdot \left(\frac{1}{\nu!}\right)^{\alpha'-\delta'} & \text{für } \textit{alle } \nu > n_{\frac{\delta'}{2}}, \\ > \left(\frac{1}{\nu!}\right)^{\alpha'+\frac{\delta'}{2}} = (\nu!)^{\frac{\delta'}{2}} \cdot \left(\frac{1}{\nu!}\right)^{\alpha'+\delta'} & \text{für } \textit{gewisse beliebig große } \nu, \end{cases}$$

also:

$$(\nu!)^{\alpha'-\delta'} \cdot |c_\nu| < \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\delta'}{2}}, \quad (\nu!)^{\alpha'+\delta'} \cdot |c_\nu| > (\nu!)^{\frac{\delta'}{2}} \quad (\text{in dem angegebenen Umfange}),$$

woraus dann unmittelbar die Grenzbeziehungen (K′) hervorgehen.

---

*) Mit anderen Worten: Die Ungleichungen (1a), (1b) sagen infolge der Möglichkeit, δ' beliebig zu verkleinern, *nicht weniger* aus, als die folgenden offenbar gleichfalls aus (K′) resultierenden:

$$|c_\nu| \begin{cases} < \dfrac{\varepsilon^\nu}{(\nu!)^{\alpha'-\delta'}} \\ > \dfrac{1}{\varepsilon^\nu \cdot (\nu!)^{\alpha'+\delta'}} \end{cases}$$

(wo $\varepsilon > 0$ *beliebig klein*).

Gehört $G(x)$ dem *Minimal-* bezw. *Maximal*typus an, so ergibt sich aus (IIa) bezw. (IIb) als Ersatz für Ungl. (1a) bezw. (1b) die folgende Ungleichung:

$$\left.\begin{array}{lll}(2\text{a}) & |c_\nu| < \dfrac{\varepsilon^\nu}{(\nu!)^{\alpha'}} & \text{für } \textit{alle } \nu > n_\varepsilon \\ (2\text{b}) & |c_\nu| > \dfrac{1}{\varepsilon^\nu \cdot (\nu!)^{\alpha'}} & \text{für } \textit{gewisse beliebig große } \nu\end{array}\right\} (\varepsilon > 0 \textit{ beliebig klein}).$$

Gehört endlich $G(x)$ dem *Normal*typus (α, γ) an und setzt man (wie p. 277, Fußn.) $(\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}} = \lambda$, so läßt sich Gl. (III) durch die folgenden Ungleichungen ersetzen:

$$(3) \quad |c_\nu| \left\{\begin{array}{ll} < \dfrac{(\lambda+\varepsilon)^\nu}{(\nu!)^{\alpha'}} & \text{für } \textit{alle } \nu > n_\varepsilon \\ > \dfrac{(\lambda-\varepsilon)^\nu}{(\nu!)^{\alpha'}} & \text{für } \textit{gewisse beliebig große } \nu \end{array}\right\} (\varepsilon > 0 \textit{ beliebig klein}).$$

Legt man den Zahlen $\frac{1}{\nu!}$ (als den Koeffizienten der *einfachsten* ganzen transcendenten Funktion e^x) die *Ordnungszahl* 1, also den Zahlen $\left(\frac{1}{\nu!}\right)^{\alpha'}$ und etwas allgemeiner einer Folge schließlich stets *unterhalb* $\left(\frac{1}{\nu!}\right)^{\alpha'-\delta'}$, aber mindestens zum Teil *oberhalb* $\left(\frac{1}{\nu!}\right)^{\alpha'+\delta'}$ bleibender Zahlen die *Ordnungszahl* α' bei, so wird man die vorliegende Funktion $G(x)$ auch durch die Aussage charakterisieren können: sie sei von der *Koeffizientenordnung* α'. Alsdann läßt sich das oben ausgesprochene Hauptresultat auch folgendermaßen formulieren:

*Eine ganze Funktion von der Ordnung α ist von der Koeffizientenordnung $\alpha' = \frac{1}{\alpha}$ und umgekehrt.**)

Zugleich ergeben sich im Anschlusse an die Ungleichungen (2a), (2b), (3) auch für die *Koeffizientenordnung* α' noch die drei *besonderen Typen*, welche eindeutig-umkehrbar den betreffenden *Typen* der *Funktionsordnung* α entsprechen und, wie der Inhalt der Ungleichungen (2a), (2b), (3) zeigt, auch sinngemäß mit den nämlichen Ausdrücken bezeichnet werden können.**)

---

*) Funktions- und Koeffizientenordnung sind also immer *gleichzeitig* endlich und von Null verschieden.

**) Daher entspricht also dem „*Normal*"-Typus (α', λ) der *Koeffizientenordnung* der spezielle *Funktionsordnungs*-Typus (α, γ), wo $\gamma = \frac{\lambda^\alpha}{\alpha}$ (s. Ungl. (3)).

Ferner sei noch hervorgehoben, daß die *Koeffizientenordnung* (einschließlich des besonderen *Typus*) *erhalten* bleibt, wenn man die Mac Laurinsche Entwickelung $G(x) = \sum_0^\infty {}_\nu c_\nu x^\nu$ durch eine beliebige Taylorsche $G(x) = \sum_0^\infty {}_\nu c_\nu'(x-x_0)^\nu$ ersetzt.*) Denn man hat für alle hinlänglich großen x:

$$e^{|x|^\alpha} = e^{\left|\frac{x}{x-x_0}\right|^\alpha \cdot |x-x_0|^\alpha} \begin{cases} < e^{(1+\varepsilon)\cdot|x-x_0|^\alpha} \\ > e^{(1-\varepsilon)\cdot|x-x_0|^\alpha} \end{cases}$$

$\left(\text{wegen } \lim\limits_{x=\infty} \left|\frac{x}{x-x_0}\right|^\alpha = 1\right)$, und daraus folgt, daß die *Ordnung* von $G(x)$ (einschließlich des etwa vorhandenen besonderen *Typus*) unverändert bleibt, wenn man $G(x)$ als ganze Funktion von $(x-x_0)$ auffaßt. Infolgedessen müssen aber die c_ν' *genau denselben* Grenzbeziehungen genügen, wie die ursprünglichen c_ν.

Wurde in dem eben betrachteten Zusammenhange die unmittelbar ersichtliche Unveränderlichkeit der *Funktions*ordnung benützt, um die gleiche Eigenschaft für die *Koeffizienten*ordnung festzustellen**), so führt die *umgekehrte* Schlußweise unmittelbar zum Beweise des folgenden Satzes:

> *Die Funktionsordnung α von $G(x)$ kommt (einschließlich des besonderen Typus) auch der Ableitung $G'(x)$, und somit schließlich allen möglichen Ableitungen von $G(x)$ zu.*

Ist nämlich $G(x) = \sum_0^\infty {}_\nu c_\nu x^\nu$, so folgt: $x \cdot G'(x) = \sum_1^\infty {}_\nu \nu \cdot c_\nu x^\nu$. Da aber $\lim\limits_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\nu} = 1$, so genügt $\sqrt[\nu]{\nu \cdot |c_\nu|}$ genau denselben Grenzbeziehungen, wie $\sqrt[\nu]{|c_\nu|}$, sodaß also $x \cdot G'(x)$ und daher auch $G'(x)$ von derselben *Koeffizienten*ordnung, mithin auch von derselben *Funktions*ordnung wie $G(x)$ ist. Das nämliche gilt dann offenbar für $G''(x)$ usf. — schließlich für jedes beliebige $G^{(\nu)}(x)$.

---

*) Vgl. v. Schaper, a. a. O. p. 14.

**) *Direkter* Beweis für die Invarianz der *Koeffizienten*ordnung bei G. Vivanti: Rend. Ist. Lomb. (2), Vol. 36 (1903), p. 1000.

II. Ganze Funktionen, welche gar keine oder endlich viele Nullstellen besitzen.

§ 5.

Ordnung und Spezialtypus von $e^{\sum_0^q a_\nu x^\nu}$.

Eine ganze transcendente Funktion *ohne* Nullstelle ist stets von der Form $e^{g(x)}$, wo $g(x)$ eine *rationale* oder *transcendente* ganze Funktion bedeutet. Ist zunächst $g(x)$ *rational*, etwa vom Grade q, so hat man für alle hinlänglich großen x: $|g(x)| < |x|^{q+\varepsilon}$ und daher:

(1) $$|e^{g(x)}| \leqq e^{|g(x)|} < e^{|x|^{q+\varepsilon}},$$

sodaß $e^{g(x)}$ jedenfalls von *endlicher* Ordnung und zwar *höchstens* von der Ordnung q ist. Eine genauere Untersuchung führt zu folgendem Resultat:

Ist $g(x) = \sum_0^q a_\nu x^\nu$, so ist $e^{g(x)}$ von der Ordnung q und zwar vom Normaltypus $(q, |a_q|)$, d. h. man hat bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$:

(A) $$|e^{g(x)}| \begin{cases} < e^{(1+\varepsilon)\cdot|a_q|\cdot|x|^q} & \textit{für alle } |x| > R_\varepsilon, \\ > e^{(1-\varepsilon)\cdot|a_q|\cdot|x|^q} & \textit{für gewisse beliebig große } x. \end{cases}$$

Beweis. Bezeichnet man den *reellen Teil* von $g(x)$ mit $\Re(g(x))$, so hat man:

(2) $$|e^{g(x)}| = e^{\Re(g(x))},$$

sodas also zur Abschätzung von $|e^{g(x)}|$ eine genauere Untersuchung von $\Re(g(x))$ erforderlich ist. Bringt man $g(x)$ auf die Form:

(3) $$g(x) = (1+\varphi(x))\cdot a_q x^q, \quad \text{wo also: } \varphi(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_{q-1}x^{q-1}}{a_q x^q},$$

so läßt sich zunächst zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ ein R_ε so fixieren, daß:

(4) $$|\varphi(x)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |x| > R_\varepsilon,$$

und somit:

(5) $$\Re(g(x)) \leqq |\Re(g(x))| \leqq |g(x)| < (1+\varepsilon)\cdot|a_q x^q| \quad \text{für} \quad |x| > R_\varepsilon.$$

Um auch eine passende, für *gewisse beliebig große* x geltende *untere* Schranke für $\Re(g(x))$ festzustellen, werde gesetzt:

(6) $$x = |x|\cdot e^{\vartheta i}, \qquad a_q = |a_q|\cdot e^{\alpha i}.$$

sodaß also Gl. (3) in die folgende übergeht:

(7) $$g(x) = (1+\varphi(x))\cdot e^{(\alpha+q\vartheta)i}\cdot|a_q x^q|.$$

Wird jetzt $\vartheta = \vartheta_\varkappa$ in der Weise *fixiert*, daß:

(8) $\alpha + q\vartheta_\varkappa = 2\varkappa\pi$ (wo $\varkappa$ irgend eine der Zahlen $0, 1, \cdots, (q-1)$ bedeutet),

so hat man:

(9) $$g(x) = (1+\varphi(x)) \cdot |a_q x^q|$$

und daher mit Berücksichtigung von Ungl. (4):

(10) $$\Re(g(x) > (1-\varepsilon) \cdot |a_q x^q| \quad \text{für} \quad x = |x| \cdot e^{\vartheta_x i}, \quad |x| > R_\varepsilon.$$

Durch Zusammenfassung der Ungleichungen (5) und (10) mit Gl. (2) ergeben sich also schließlich die gesuchten Beziehungen:

(11) $$|e^{g(x)}| \begin{cases} < e^{(1+\varepsilon)\cdot|a_q|\cdot|x|^q} & \text{für } alle\ |x| > R_\varepsilon, \\ > e^{(1-\varepsilon)\cdot|a_q|\cdot|x|^q} & \text{für } gewisse\ beliebig\ gro\beta e\ x \end{cases}$$

(nämlich für *alle* $x = |x| \cdot e^{\vartheta_x i}$, wo $|x| > R_\varepsilon$).

§ 6.

Allgemeine Form aller ganzen Funktionen ohne Nullstellen und von endlicher Ordnung. — Ganze Funktionen mit endlich vielen Nullstellen.

1. Zur Vervollständigung des soeben gefundenen Resultats bleibt noch die Frage zu beantworten: Ist die Gesamtheit der ganzen Funktionen *ohne* Nullstellen und von *endlicher* Ordnung durch die soeben untersuchte Kategorie vollständig erschöpft? Mit anderen Worten: Kann $e^{g(x)}$ von *endlicher* Ordnung sein, wenn $g(x)$ eine *transcendente* ganze Funktion ist? Zur Beantwortung dieser Frage, welche wiederum lediglich auf eine zweckentsprechende Abschätzung von $\Re(g(x))$ hinausläuft, schicken wir den folgenden Hilfssatz voraus.

Hilfssatz. *Ist (zum mindesten für* $|x| \equiv r < R$*):*

(1) $$f(x) = \sum_0^\infty{}^{\lambda}\, a_\lambda x^\lambda, \quad a_\lambda = \alpha_\lambda + \beta_\lambda i,$$

also:

(2) $$f(re^{\varphi i}) = \sum_0^\infty{}^{\lambda}\, (\alpha_\lambda \cos\lambda\varphi - \beta_\lambda \sin\lambda\varphi)\cdot r^\lambda + \sum_0^\infty{}^{\lambda}\, (\beta_\lambda \cos\lambda\varphi + \alpha_\lambda \sin\lambda\varphi)\cdot r^\lambda$$
$$= f_1(r,\varphi) + i\cdot f_2(r,\varphi),$$

so gelten außer der bekannten), für* $\lambda = 0, 1, 2, \cdots$ *bestehenden Koeffizientendarstellung:*

*) Vgl. Math. Ann. 47 (1896), p. 137. Daselbst steht an Stelle von n durchweg $N = 2^n$, da aus methodischen Rücksichten die Benützung von Exponential- und trigonometrischen Funktionen vermieden werden sollte. Fällt, wie hier, dieser Grund fort, so erscheint es natürlicher und bietet selbstverständlich auch nicht die geringste Schwierigkeit, die fraglichen Mittelwerte auf den Fall eines *beliebigen* $N = n$ auszudehnen.

(3) $a_\lambda = \underset{x=|r|}{\mathfrak{M}} (x^{-\lambda} \cdot f(x)) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n {}_\nu f(r \cdot e^{\nu\varphi_n i}) \cdot r^{-\lambda} \cdot e^{-\nu\lambda\varphi_n i} \left(wo\colon \varphi_n = \frac{2\pi}{n}\right)$,

für $\lambda \geqq 1$ *auch die beiden folgenden:*

$$(4) \qquad a_\lambda \begin{cases} = 2 \lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_1^n {}_\nu f_1(r, \nu\varphi_n) \cdot r^{-\lambda} \cdot e^{-\nu\lambda\varphi_n i}, \\ = 2i \cdot \lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_1^n {}_\nu f_2(r, \nu\varphi_n) \cdot r^{-\lambda} \cdot e^{-\nu\lambda\varphi_n i}. \end{cases}$$

Beweis. Aus Gl. (3) folgt durch Multiplikation mit r^λ:

$$(5) \qquad a_\lambda r^\lambda = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n {}_\nu f(r \cdot e^{\nu\varphi_n i}) \cdot e^{-\nu\lambda\varphi_n i}.$$

Andererseits hat man*) für $\lambda = 1, 2, 3, \cdots$:

$$0 = \underset{|x|=r}{\mathfrak{M}} (x^\lambda \cdot f(x)) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n {}_\nu f(r^\nu \cdot e^{\nu\varphi_n i}) \cdot r^\lambda \cdot e^{\nu\lambda\varphi_n i},$$

also durch Multiplikation mit $r^{-\lambda}$:

$$(6) \qquad 0 = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n {}_\nu f(r \cdot e^{\nu\varphi_n i}) \cdot e^{\nu\lambda\varphi_n i}.$$

Wenn man diese Gleichung einmal zu Gl. (5) addiert, das andere Mal davon subtrahiert, so folgt (mit Berücksichtigung von $e^{-\varphi i} + e^{\varphi i} = 2\cos\varphi$, $e^{-\varphi i} - e^{\varphi i} = -2i\sin\varphi$):

$$(7) \qquad a_\lambda r^\lambda \begin{cases} = \quad 2 \lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_1^n {}_\nu f(r \cdot e^{\nu\varphi_n i}) \cdot \cos \nu\lambda\varphi_n, \\ = -2i \lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_1^n {}_\nu f(r \cdot e^{\nu\varphi_n i}) \cdot \sin \nu\lambda\varphi_n, \end{cases} \qquad (\lambda \geqq 1),$$

und daher durch Trennung des Reellen und Imaginären:

$$(8) \qquad \begin{cases} \alpha_\lambda r^\lambda = \quad 2 \lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_1^n {}_\nu f_1(r, \nu\varphi_n) \cdot \cos \nu\lambda\varphi_n, \\ \qquad\quad = \quad 2 \lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_1^n {}_\nu f_2(r, \nu\varphi_n) \cdot \sin \nu\lambda\varphi_n, \\ \beta_\lambda i r^\lambda = -2i \lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_1^n {}_\nu f_1(r, \nu\varphi_n) \cdot \sin \nu\lambda\varphi_n, \\ \qquad\quad = \quad 2i \lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_1^n {}_\nu f_2(r, \nu\varphi_n) \cdot \cos \nu\lambda\varphi_n. \end{cases}$$

*) Vgl. a. a. O. p. 138, Gl. (4).

Durch entsprechende Addition dieser Ausdrücke ergeben sich schließlich die Beziehungen:

$$(9)\quad \begin{cases} \text{(a)} & a_\lambda r^\lambda = 2 \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \sum\limits_1^n{}^{\nu} f_1(r, \nu\varphi_n) \cdot e^{-\nu\lambda\varphi_n i}, \\ \text{(b)} & = 2i \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \sum\limits_1^n{}^{\nu} f_2(r, \nu\varphi_n) \cdot e^{-\nu\lambda\varphi_n i}, \end{cases} \qquad (\lambda \geqq 1),$$

welche durch Multiplikation mit $r^{-\lambda}$ in die behaupteten Koeffizientendarstellungen (4) übergehen.

2. Mit Benutzung der *ersten* dieser Beziehungen beweisen wir jetzt den folgenden Satz*):

Genügt der reelle Teil $g_1(r, \varphi)$ *der ganzen Funktion* $g(x) \equiv g(r \cdot e^{\varphi i})$ *für unendlich viele beliebig große* r *und alle möglichen* φ *(also, geometrisch gesprochen, auf unendlich vielen Kreisen mit beliebig großem Radius) einer Ungleichung von der Form**):*

$$(10)\qquad g_1(r, \varphi) < A \cdot r^\sigma \quad (A > 0,\ \sigma > 0),$$

so ist $g(x)$ *eine rationale ganze Funktion vom Grade* $q \leqq \sigma$.

Ist die Beziehung (10) *für jedes noch so kleine* $A = \varepsilon > 0$ *erfüllt, so hat man allemal* $q < \sigma$***).

Beweis. Ist $g(x) = \sum\limits_0^\infty{}^{\lambda} a_\lambda x^\lambda$, so folgt aus Gl. (9a), daß *für jedes noch so große* r:

$$(11)\qquad |a_\lambda| \cdot r^\lambda \leqq 2 \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n{}^{\nu} |g_1(r, \nu\varphi_n)|, \qquad (\lambda \geqq 1).$$

---

*) Der Satz rührt von Hadamard her (a. a. O. p. 186). Der dort mit Hülfe der Fourierschen *Integralform* der Koeffizienten gegebene Beweis wird hier mit Beibehaltung des eigentlichen Grundgedankens auf die elementare *Mittelwert*darstellung übertragen.

**) Es wird also den Zahlen $g_1(r, \varphi)$ lediglich nach der *positiven* Seite hin eine Schranke gesetzt. Dabei *könnten* zunächst unter den *negativen* Werten von $g_1(r, \varphi)$ immerhin solche vorkommen, deren *absoluter Betrag* jene Schranke $A \cdot r^\sigma$ beliebig übersteigt. Der vorliegende Satz lehrt dann eben, daß aus der Voraussetzung:

$$g_1(r, \varphi) < A \cdot r^\sigma$$

(in dem gegebenen Umfange) geradezu folgt:

$$|g_1(r, \varphi)| < A \cdot r^\sigma$$

(und zwar sogar für *alle* hinlänglich großen r und beliebiges φ).

***) Diese Bemerkung findet sich bei E. Lindelöf, a. a. O. p. 15.

Andererseits ergibt sich aus (3) für $\lambda = 0$:

$$a_0 = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n{}^{\nu} g(r \cdot e^{\nu \varphi_n i}) = \lim \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n{}^{\nu} (g_1(r, \nu\varphi_n) + i \cdot g_2(r, \nu\varphi)),$$

und daher:

$$(12) \qquad \alpha_0 = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n{}^{\nu} g_1(r, \nu\varphi_n), \text{ wenn: } a_0 = \alpha_0 + \beta_0 i,$$

folglich, wenn man diese Gleichung mit 2 multipliziert und zu Gl. (11) addiert:

$$(13) \qquad |a_\lambda| \cdot r^\lambda + 2\alpha_0 = 2 \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n{}^{\nu} (|g_1(r, \nu\varphi_n)| + g_1(r, \nu\varphi_n)).$$

Nun ist aber:

$$(14) \qquad |g_1(r, \nu\varphi_n| + g_1(r, \nu\varphi_n) \begin{cases} = 2 g_1(r, \nu\varphi_n), & \text{wenn } g_1(r, \nu\varphi_n) > 0, \\ = 0 & , \text{ wenn } g_1(r, \nu\varphi_n) < 0. \end{cases}$$

Bedeutet jetzt r einen jener Werte, für welche die Voraussetzung (10) gilt, so hat man unter allen Umständen:

$$(15) \qquad |g_1(r, \nu\varphi_n)| + g_1(r, \nu\varphi_n) < 2 A r^\sigma,$$

sodaß also Gl. (13) die folgende Beziehung liefert:

$$(16) \qquad |a_\lambda| \cdot r^\lambda + 2\alpha_0 < 4 A \cdot r^\sigma,$$

d. h. man hat:

$$(17) \qquad |a_\lambda| < 4 A \cdot \frac{1}{r^{\lambda - \sigma}} - \frac{2\alpha_0}{r^\lambda}$$

für unendlich viele r, unter denen auch *beliebig große* vorkommen. Mithin ergibt sich, da es freisteht, r unbegrenzt zu vergrößern:

$$(18) \qquad |a_\lambda| = 0, \text{ falls } \lambda > \sigma.$$

Es *fehlen* also in der Reihe $g(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\lambda x^\lambda$ alle Potenzen, deren Grad λ die Zahl σ übersteigt, sodaß die *höchste* in $g(x)$ vorkommende Potenz x^q einen Grad $q \leqq \sigma$ besitzt: dabei kann offenbar nur dann $q = \sigma$ werden, wenn σ eine *ganze* Zahl, anderenfalls müßte immer $q < \sigma$ sein.

Diese letztere Beziehung gilt aber auch im Falle eines *ganzzahligen* σ, wenn die Voraussetzung (10) für *jedes noch so kleine* positive $A = \varepsilon$ besteht. Denn aus Ungl. (17), welche nunmehr die Form annimmt:

$$(19) \qquad |a_\lambda| < 4\varepsilon \cdot \frac{1}{r^{\lambda - \sigma}} - \frac{2\alpha_0}{r^\lambda},$$

ergibt sich alsdann für $\lambda = \sigma$:

(20) $$|a_\sigma| < 4\varepsilon + \frac{2|\alpha_0|}{r^\sigma}, \quad \text{d. h.} = 0^*).$$

3. Aus dem eben bewiesenen Satze folgt, daß $g(x)$ stets eine *rationale* ganze Funktion sein muß, wenn $e^{g(x)}$ *überhaupt* von *endlicher* Ordnung sein soll. Faßt man dieses Resultat mit dem in § 5 gefundenen zusammen, so ergibt sich also der folgende Satz:

Ist die Funktion $e^{g(x)}$ überhaupt von endlicher Ordnung, so ist sie stets von ganzzahliger Ordnung q und überdies vom Normaltypus (q, γ), d. h. es gibt eine bestimmte Zahl $\gamma > 0$, derart, daß:

(21) $$|e^{g(x)}| \begin{cases} < e^{(1+\varepsilon)\cdot\gamma\cdot|x|^q} & \textit{für alle } |x| > R_\varepsilon, \\ > e^{(1-\varepsilon)\cdot\gamma\cdot|x|^q} & \textit{für gewisse beliebig große } x. \end{cases}$$

Zugleich hat man alsdann $g(x) = \sum_0^q{}_\nu\, a_\nu x^\nu$, *wo* $|a_q| = \gamma$.

Im übrigen kommen die eben genannten Eigenschaften, wie leicht zu sehen, auch jeder ganzen Funktion von *endlicher* Ordnung zu, welche nur eine *endliche* Anzahl von Nullstellen besitzt und somit von der Form ist: $g_0(x) \cdot e^{g(x)}$, wo $g_0(x)$ wiederum eine ganze *rationale* Funktion bedeutet. Da nämlich bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ und jedem bestimmten $q > 0$:

(22) $$g_0(x) \begin{Bmatrix} < e^{\varepsilon\cdot|x|^q} \\ > 1 \end{Bmatrix} \text{ für } \textit{alle hinlänglich großen } x,$$

so erkennt man ohne weiteres, daß *ganz allgemein* das Hinzutreten eines Faktors von der Form $g_0(x)$ die *Ordnung* und den etwa vorhandenen besonderen *Typus* einer ganzen Funktion $G(x)$ *in keiner Weise alteriert*. Wendet man diese Bemerkung speziell auf Funktionen von der Form $g_0(x) \cdot e^{g(x)}$ an, so folgt, daß der oben für Funktionen *ohne* Nullstellen ausgesprochene Satz auch für solche mit einer *endlichen* Anzahl von Nullstellen *ohne jeden weiteren Zusatz gültig* bleibt und daher auch in folgender Weise formuliert werden kann:

Ist die Funktion $G(x)$ von nicht-ganzzahliger oder, zwar von ganzzahliger, aber nicht dem Spezialtypus angehöriger Ordnung, so besitzt sie allemal unendlich viele Nullstellen.

Beispiel: Ist $0 < \overline{\lim\limits_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|b_\nu|} < \infty$, $m > 1$, so ist $\sum b_\nu \cdot \frac{x^\nu}{(m\nu)!}$, wie leicht mit Hülfe von Ungl. (7), p. 267 erkannt wird, von der Koeffizienten-

*) Selbstverständlich gilt ein ganz analoger Satz für den *imaginären* Teil von $g(x)$ (als reellen Teil von $-i \cdot g(x)$ oder auch unmittelbar auf Grund der Relation (9b)).

ordnung m, also von der Funktionsordnung $\frac{1}{m}$, muß somit stets unendlich viele Nullstellen besitzen. Das nämliche gilt dann offenbar auch von $\sum b_\nu \cdot \frac{x^{m\nu}}{(m\nu)!}$ $\left(\text{z. B. } \cos x = \sum_0^\infty (-1)^\nu \cdot \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}, \quad \operatorname{cos\,hyp} x = \sum_0^\infty \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}\right)$

§ 7.

Einfluß jedes einzelnen Koeffizienten auf die Existenz bezw. Nichtexistenz unendlich vieler Nullstellen. — Der Picardsche Satz.

1. Nach dem Satze von Art. 3 des vorigen Paragraphen erscheinen die *Ganzzahligkeit* der Funktionsordnung und die Zugehörigkeit zum *Normaltypus* als *notwendige* Bedingungen dafür, daß eine im übrigen beliebig vorgelegte beständig konvergierende Reihe $\Sigma c_\nu x^\nu$ von *endlicher* Ordnung *höchstens eine endliche* Anzahl von Nullstellen besitzt. Daß jene Bedingungen aber *keine hinreichenden* sein können, folgt schon aus dem Umstande, daß dieselben, wie oben (§ 4, Art. 4) ausdrücklich hervorgehoben wurde, lediglich von den *Absolutwerten* der c_ν abhängen, während für die Existenz bezw. Nichtexistenz von *Nullstellen* offenbar die *wirklichen Werte* der c_ν wesentlich in Betracht kommen. So unterscheiden sich z. B. die Koeffizienten von $G_1(x) = e^{x^q}$ und $G_2(x) = \cos(x^q) - \sin(x^q)$ lediglich durch das *Vorzeichen*: beide Funktionen sind von der Ordnung q und zwar vom Spezialtypus $(q, 1)$. Nichtsdestoweniger hat nur die erste *keine*, die zweite *unendlich viele* Nullstellen (nämlich $x = \sqrt[q]{(\pm \nu + \frac{1}{4})\pi}$).

Es hängen aber ferner jene zwei Bedingungen sogar nur von dem *infinitären* Verhalten der $|c_\nu|$ ab, während andererseits für die Existenz bezw. Nichtexistenz von Nullstellen die *Gesamtheit* der c_ν, ja sogar *jedes einzelne* c_ν maßgebend ist. Es gilt nämlich der folgende Satz:

> *Ist $G(x) = \Sigma c_\nu x^\nu$ von endlicher Ordnung und höchstens mit einer endlichen Anzahl von Nullstellen versehen, so genügt jede Abänderung irgend einer endlichen Anzahl von Koeffizienten, um eine Funktion mit unendlich vielen Nullstellen zu erzeugen.*

Beweis. Ändert man eine beliebige endliche Anzahl von Koeffizienten in irgend welcher Weise ab, so wird $G(x)$ übergeführt in $G(x) + \mathfrak{g}(x)$, wo $\mathfrak{g}(x)$ eine *rationale* ganze Funktion bedeutet, die sich eventuell auch auf eine einzelne Potenz von x oder eine *von Null verschiedene* Konstante reduzieren kann.

Andererseits hat man auf Grund der Voraussetzung: $G(x) = g_0(x) \cdot e^{g(x)}$, wo $g_0(x)$, $g(x)$ ebenfalls *rationale* ganze Funktionen, $g_0(x)$ von beliebigem (d. h. eventuell auch nullten) Grade, $g(x)$ vom Grade $q \geqq 1$ und, wie man ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen darf, *ohne* konstantes

Glied, da man ja einen Faktor von der Form e^{α_0} allemal zu $g_0(x)$ ziehen kann. Die Behauptung besagt dann, daß $g_0(x) \cdot e^{g(x)} + \mathfrak{g}(x)$ stets *unendlich viele* Nullstellen besitzt.

Angenommen, dies wäre *nicht* der Fall, so hätte man:

$$(1) \qquad g_0(x) \cdot e^{g(x)} + \mathfrak{g}(x) = \gamma_0(x) \cdot e^{\gamma(x)},$$

wo $\gamma_0(x)$ eine ganze rationale Funktion, eventuell eine *von Null verschiedene* Konstante, $\gamma(x)$ wiederum eine ganze Funktion vom Grade q (da ja $g_0(x) \cdot e^{g(x)}$ von der *Ordnung* q) *ohne* konstantes Glied.

Bringt man diese Gleichung auf die Form:

$$(2) \qquad \frac{g_0(x)}{\mathfrak{g}(x)} \cdot e^{g(x)} - \frac{\gamma_0(x)}{\mathfrak{g}(x)} \cdot e^{\gamma(x)} = -1,$$

so folgt durch Derivation und Multiplikation mit $\mathfrak{g}(x)^2$:

$$(3) \qquad g_1(x) \cdot e^{g(x)} - \gamma_1(x) \cdot e^{\gamma(x)} = 0,$$

wo $g_1(x)$, $\gamma_1(x)$ die folgenden zwei ganzen Funktionen bedeuten:

$$(4) \qquad \begin{cases} g_1(x) = \mathfrak{g}(x) \cdot g_0'(x) - g_0(x)\,(\mathfrak{g}'(x) - \mathfrak{g}(x) \cdot g'(x)) \\ \gamma_1(x) = \mathfrak{g}(x) \cdot \gamma_0'(x) - \gamma_0(x)\,(\mathfrak{g}'(x) - \mathfrak{g}(x) \cdot \gamma'(x)), \end{cases}$$

welche, wie leicht zu sehen, keinesfalls identisch verschwinden können. Denn wäre z. B. $g_1(x) \equiv 0$, so hätte man:

$$D_x\left(\frac{g_0(x)}{\mathfrak{g}(x)} \cdot e^{g(x)}\right) \equiv 0, \quad \text{also:} \quad \frac{g_0(x)}{\mathfrak{g}(x)} \cdot e^{g(x)} \equiv \text{Konst.},$$

woraus mit Notwendigkeit $g(x) \equiv 0$ folgen würde.

Aus Gl. (3) ergibt sich sodann:

$$(5) \qquad e^{g(x) - \gamma(x)} = \frac{\gamma_1(x)}{g_1(x)},$$

was wiederum nur möglich erscheint, wenn:

$$(6) \qquad g(x) - \gamma(x) \equiv 0, \quad \text{also:} \quad \gamma(x) \equiv g(x).$$

Infolgedessen würde aber Gl. (1) die Beziehung liefern:

$$(7) \qquad (g_0(x) - \gamma_0(x)) \cdot e^{g(x)} = -\mathfrak{g}(x),$$

d. h. es müßte sein *entweder:* $g_0(x) - \gamma_0(x) = -\mathfrak{g}(x) \equiv 0$,

oder: $g(x) \equiv 0$,

was beides der Voraussetzung widerspricht. Damit ist also der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

2. Als ein spezieller Fall des soeben abgeleiteten Resultates erscheint der bekannte „Picardsche *Satz*"*) (*hier* freilich mit der Beschränkung auf ganze Funktionen von *endlicher* Ordnung), nämlich:

*) Ann. de l'École Normale, (2) T. 9 (1880), p. 146. Traité d'Analyse, II, p. 231. (Beweis mit Hülfe von Sätzen aus der Theorie der Modulfunktionen. Direkterer Beweis von Borel a. a. O. p. 103 [auch: Par. C. R. 122 (1896), p. 1045; Acta math. 20 (1897), p. 382]. Vollständigere und schärfere Fassung des Borelschen Beweises bei A. Kraft. Über ganze transcendente Funktionen von unendlicher Ordnung. Dissertat. Goettingen 1903).

Eine ganze Funktion von endlicher Ordnung nimmt jeden bestimmten Wert unendlich oft an, mit eventueller Ausnahme eines einzigen Wertes a (den sie gar nicht oder nur n mal anzunehmen braucht).

Denn bedeutet a eine beliebig angenommene Zahl, $(G(x)-a)$ eine ganze transzendente Funktion *ohne* bezw. *mit nur n* Nullstellen (sodaß also $G(x)$ von der Form $g_0(x)\cdot e^{g(x)}+a$), so besitzt nach dem obigen Satze die Funktion: $(G(x)-a)+(b-a)$, d. h. $(G(x)-b)$ für *jedes* von a verschiedene b *unendlich viele* Nullstellen, sodaß also $G(x)$ in der Tat *jeden* von a verschiedenen Wert b *unendlich oft* annimmt.

Hieran knüpft sich naturgemäß die Frage, ob ein solcher *Ausnahmewert a immer* oder wenigstens „*in der Regel*" existieren müsse. Daß dieselbe, auch in der zweiten, beschränkteren Form zu *verneinen* ist, lehrt indessen schon der Satz von Nr. 1. Denn bedeutet $G_a(x)$ *irgend eine* ganze Funktion, welche den Wert *a gar nicht* oder *nur n mal* annimmt, sodaß also: $G_a(x)=g_0(x)\cdot e^{g(x)}+a$, so folgt aus dem angeführten Satze, daß $G_a(x)+\mathfrak{g}(x)-b$ für *jedes b unendlich viele Nullstellen* besitzt, falls $\mathfrak{g}(x)-b$ für *kein* b identisch verschwindet, d. h. falls $\mathfrak{g}(x)$ sich nicht auf eine Konstante reduziert. Jedes $G_a(x)$ wird also durch Addition *jedes beliebigen nicht konstanten* $\mathfrak{g}(x)$ in eine solche ganze Funktion übergeführt, die *jeden* bestimmten Wert ohne Ausnahme *unendlich oft* annimmt.

Weiter läßt sich aber zeigen, daß auch die Addition zweier oder beliebig vieler Funktionen $G_a(x)$ — mit Ausnahme des *einzigen* Falles, daß alle $G_a(x)$ den *nämlichen* Exponentialfaktor $e^{g(x)}$ besitzen — stets eine Funktion erzeugt, welche *alle* Werte unendlich oft annimmt. Zum Beweise dient der folgende Hilfssatz.

3. Hilfssatz. *Versteht man unter $g_\nu(x)$ $(\nu=1,2,\cdots n)$ lauter verschiedene ganze rationale Funktionen ohne konstantes Glied, unter $g_{\nu 0}(x)$ $(\nu=1,2,\cdots n)$ ganze rationale Funktionen, die sich teilweise oder sämtlich auch auf Konstanten reduzieren dürfen, so kann eine Identität von der Form:*

$$\sum_1^n{}_\nu\, g_{\nu 0}(x)\cdot e^{g_\nu(x)}\equiv 0 \tag{8}$$

nur bestehen, wenn:

$$g_{\nu 0}(x)\equiv 0, \qquad (\nu=1,2,\cdots n). \tag{9}$$

Beweis. Angenommen die $g_{\nu 0}(x)$ wären sämtlich*) von Null verschieden. Bringt man dann Gl. (8) auf die Form:

*) Wäre für *gewisse* $\nu: g_{\nu 0}(x)\equiv 0$, so könnte man ja die betreffenden Glieder aus der Relation (8) von vornherein weglassen, sodaß man immer nur mit der im Text gemachten Annahme zu operieren hat.

(10) $$\sum_{1}^{n-1} {}_{\nu} \frac{g_{\nu 0}(x)}{g_{n0}(x)} \cdot e^{g_\nu(x) - g_n(x)} + 1 \equiv 0,$$

so folgt durch Derivation und Multiplikation mit $g_{n0}(x)^2$:

(11) $$\sum_{1}^{n-1} {}_{\nu}\, g_{\nu 1}(x) \cdot e^{g_\nu(x) - g_n(x)} \equiv 0,$$

wo die $g_{\nu 1}(x)$ $(\nu = 1, 2, \cdots (n-1))$ ganze Funktionen, nämlich:

(12) $$\begin{aligned} g_{\nu 1}(x) &= g_{\nu 0}(x) \cdot g'_{\nu 0}(x) - g_{\nu 0}(x) \cdot g'_{n0}(x) \\ &\quad + g_{n0}(x) \cdot g_{\nu 0}(x)\, (g'_\nu(x) - g'_n(x)), \end{aligned}$$

bedeuten, welche für *kein* ν identisch verschwinden können. Denn wäre für irgend ein $\nu < n : g_{\nu,1}(x) \equiv 0$, so hätte man:

$$D_x \left(\frac{g_{\nu 0}(x)}{g_{n0}(x)} \cdot e^{g_\nu(x) - g_n(x)} \right) \equiv \frac{g_{\nu 1}(x)}{g_{n0}(x)^2} \cdot e^{g_\nu(x) - g_n(x)} \equiv 0,$$

also:

$$\frac{g_{\nu 0}(x)}{g_{n0}(x)} \cdot e^{g_\nu(x) - g_n(x)} \equiv \text{Konst.},$$

d. h.

$$g_\nu(x) - g_n(x) \equiv 0 \qquad (\nu < n),$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Wendet man dasselbe Verfahren, welches von Gl. (8) zu Gl. (11) führte, auf Gl. (11) an, so ergibt sich analog:

(13) $$\sum_{1}^{n-2} {}_{\nu}\, g_{\nu,2}(x) \cdot e^{g_\nu(x) - g_{n-1}(x)} \equiv 0,$$

und, so fortfahrend, schließlich:

(14) $$g_{\nu,n-1}(x) \cdot e^{g_1(x) - g_2(x)} \equiv 0,$$

wo $g_{\nu,n-1}(x)$ *nicht identisch verschwinden könnte.* In diesem Falle ist aber offenbar eine Relation von der Form (14) *unmöglich,* die gemachte Annahme somit unzulässig und der fragliche Hilfssatz bewiesen.

4. Nunmehr ergibt sich unmittelbar das folgende Resultat:

Sind die $g_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \cdots n)$ lauter verschiedene ganze rationale Funktionen ohne konstantes Glied, während die $g_{\nu 0}(x)$ nur der Bedingung zu genügen haben, nicht identisch zu verschwinden, und setzt man:

(15) $$G(x) = \sum_{1}^{n} {}_{\nu}\, g_{\nu 0}(x) \cdot e^{g_\nu(x)}, \qquad (n \geqq 2),$$

so nimmt $G(x)$ jeden bestimmten Wert ohne Ausnahme unendlich oft an.

Denn nähme $G(x)$ einen gewissen Wert *a gar nicht* oder nur *n mal* an, so hätte man:

$$\sum_{1}^{n} g_{\nu 0}(x) \cdot e^{g_\nu(x)} - a = \gamma_0(x) \cdot e^{\gamma(x)}, \tag{16}$$

wo $\gamma_0(x)$, $\gamma(x)$ ganze rationale Funktionen sind*). Hieraus würde sich aber durch einmalige Derivation eine Beziehung von jener Form ergeben, deren Möglichkeit auf Grund des oben bewiesenen Hülfssatzes ausgeschlossen erscheint.

Hiernach wird man sagen können, daß schon innerhalb des Gebietes der Funktionen von *ganzzahliger* Ordnung diejenigen, welche irgend einen bestimmten Wert *gar nicht* oder nur *n mal* annehmen, eine *sehr spezielle* Klasse bilden. Fügt man hinzu, daß jede Funktion von *nicht ganzzahliger* Ordnung sicher *alle* Werte *unendlich oft* annimmt, da sie ja *niemals* von der Form $g_0(x) \cdot e^{g(x)}$ (das hieße nämlich: von *ganzzahliger* Ordnung) sein kann, so läßt sich der Inhalt des Picardschen Satzes, etwas ausführlicher als in Art. 2, etwa folgendermaßen formulieren:

Eine ganze Funktion von endlicher Ordnung nimmt im allgemeinen jeden bestimmten Wert unendlich oft an, in besonderen Fällen einen und nur einen speziellen Wert gar nicht oder nur n mal.

In § 15 wird gezeigt werden, daß sich dieses Ergebnis noch erheblich präzisieren läßt.

III. Ganze Funktionen mit unendlich vielen Nullstellen, insbesondere primitive ganze Funktionen von endlichem Range.

§ 8.

Definition: Rang und Grenzexponent. Primitive ganze Funktionen.

1. Es bedeute a_ν $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$ im folgenden ein für allemal eine Folge verschiedener oder auch zum Teil unter sich gleicher Zahlen von der Beschaffenheit, daß:

$$0 < |a_\nu| \leqq |a_{\nu+1}|, \quad \lim_{\nu=\infty} |a_\nu| = \infty. \tag{1}$$

*) Die *Rationalität* von $\gamma(x)$ folgt daraus, daß $G(x)$ als Summe einer endlichen Anzahl von Funktionen endlicher Ordnung offenbar selbst von endlicher Ordnung ist.

Dann lassen sich bekanntlich*) stets Folgen niemals abnehmender natürlicher Zahlen m_ν angeben, derart, daß die Reihe $\sum \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu+1}$ beständig konvergiert, und es liefert sodann das für jeden endlichen Bereich absolut und gleichmäßig konvergente Produkt:

$$\mathfrak{P}(x) = x^k \cdot \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{g_\nu(x, m_\nu)},$$

(2)

$$\text{wo: } \begin{cases} k \text{ eine nat. Zahl bezw. } = 0 \\ g_\nu(x, m_\nu) = \sum_1^{m_\nu}{}_k \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^k & (m_\nu \geqq 1) \\ g_\nu(x, 0) \equiv 0 \end{cases}$$

eine ganze transcendente Funktion mit den Nullstellen a_ν und der k-fachen Nullstelle $x = 0$ (d. h. im Falle $k = 0$: *ohne* die Nullstelle $x = 0$), während *alle möglichen* ganzen Funktionen mit den nämlichen Nullstellen in der Form enthalten sind:

(3) $$G(x) = C \cdot e^{g(x)} \cdot x^k \cdot \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{g_\nu(x, m_\nu)},$$

unter $g(x)$ eine beliebige rationale oder transcendente ganze Funktion ohne konstantes Glied verstanden (eventuell auch $g(x) \equiv 0$).

Sind nun die Zahlen a_ν so beschaffen, daß für irgend ein $\sigma > 0$ die Reihe $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma$ *konvergiert*, und ist $\sigma = p + 1$ die *kleinste ganze* Zahl, für welche dies stattfindet (also $p \geqq 0$), so steht es frei, $m_\nu = p$ zu setzen (für *jedes* ν), und es soll dann

$$G(x) = C \cdot e^{g(x)} \cdot x^k \cdot \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{g_\nu(x, p)},$$

(4)

$$\text{wo: } \begin{cases} g_\nu(x, p) = \sum_1^{p}{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa & (p \geqq 1), \\ g_\nu(x, 0) \equiv 0 \end{cases}$$

eine ganze Funktion vom *Range p*, generell von *endlichem Range* heißen (wobei also hier die Bezeichnung „*endlich*" den Fall $p = 0$ mit einschließt); während die *einfachste* Funktion mit den betreffenden Nullstellen, nämlich:

(5) $$\mathfrak{P}(x) = x^k \cdot \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{g_\nu(x, p)}$$

als *primitive* (ganze) Funktion vom *Range p* bezeichnet werden soll.

---

*) Weierstraß, Abh. zur Funktionenlehre, p. 16 = Werke, Bd. 2, p. 92.

Durch den *Rang* p wird offenbar das schließliche *Anwachsen* der $|a_\nu|$ und damit die *Dichtigkeit* der Nullstellen bis zu einem gewissen Grade charakterisiert. Aus der *Konvergenz* von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1}$ und der Monotonie der $|a_\nu|$ folgt nämlich, daß:

$$(6) \qquad \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1} = 0, \quad \text{d. h.} \quad |a_\nu| > \nu^{\frac{1}{p+1}}.$$

Da aber andererseits $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p}$ *divergent*, so folgt, daß *nicht* von irgend einer bestimmten Stelle ν ab *beständig:*

$$\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p} \leqq \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1+p\varepsilon}, \quad \text{also:} \quad a_\nu \geqq \nu^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$$

sein kann, d. h. man hat bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$:

$$(7) \qquad |a_\nu| < \nu^{\frac{1}{p}+\varepsilon} \quad \text{für } \textit{unendlich viele } \nu.\text{*)}$$

2. Bei dem überaus großen Spielraum, welchen die in (6) und (7) angegebenen Schranken für das infinitäre Wachstum der $|a_\nu|$ noch zulassen, erscheint es zweckmäßig, zur Herstellung *engerer* Schranken an Stelle des Ranges p eine andere, dem Intervalle $(p, p+1)$ angehörige charakteristische Zahl einzuführen und zwar in folgender Weise:

Da $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1}$ *konvergiert*, $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p}$ *divergiert*, so haben die Exponenten σ, für welche $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\sigma}$ *konvergiert*, eine bestimmte *untere* Grenze ϱ, welche offenbar dem Intervalle $p \leqq \varrho \leqq p+1$ angehört; d. h. es ist alsdann für jedes $\varepsilon > 0$ zwar $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho+\varepsilon}$ *konvergent*, $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho-\varepsilon}$ *divergent*, während $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho}$ *konvergieren* oder *divergieren* kann. Diese Zahl ϱ soll der *Grenzexponent* der *Folge* (a_ν) oder auch *der Funktion* $G(x)$ bezw. $\mathfrak{L}(x)$ mit den Nullstellen a_ν heißen und nach Bedarf spezieller als *Konvergenz-* bezw. *Divergenz*exponent bezeichnet werden, je nachdem $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho}$ *konvergiert* oder *divergiert*.**)

---

*) Diese Bedingung hat offenbar nur einen Sinn für $p > 0$; für $p = 0$ versagt sie: vgl. die analoge Erscheinung § 1, Nr. 3.

**) Man hat also:

$$p < \varrho \leqq p+1,$$

wenn ϱ *Konvergenz*exponent; dagegen

$$p \leqq \varrho < p+1,$$

wenn ϱ *Divergenz*exponent.

Mit Hilfe des Grenzexponenten ϱ lassen sich dann die Schranken, innerhalb deren sich die $|a_\nu|$ für hinlänglich große ν bewegen, in folgender Weise fixieren. Aus der *Konvergenz* von $\sum\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho+\varepsilon}$ für jedes $\varepsilon > 0$, folgt einerseits, daß:

(8) $$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho+\varepsilon} = 0, \quad \text{anders geschrieben:} \quad |a_\nu| > \nu^{\frac{1}{\varrho+\varepsilon}}.$$

Andererseits folgt aus der *Divergenz* von $\sum\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho-\varepsilon}$, daß für jedes $\varepsilon>0$:

(9) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho-\varepsilon} = \infty, \quad \text{also für } \textit{unendlich viele } m_\nu\text{:} \quad |a_{m_\nu}| < \nu^{\frac{1}{\varrho-\varepsilon}}.\text{*)}$$

Denn hätte man für irgend ein $\varepsilon > 0$:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho-\varepsilon} < g \quad \text{(d. h. endlich),}$$

Beispiele:

$$|a_\nu| = \sqrt{\nu}, \quad \text{also:} \quad \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^2 = \nu^{-1}, \quad \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{2+\varepsilon} = \nu^{-\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)},$$

d. h. $\varrho = 2$, auch $p = 2$, ϱ *Divergenz*exponent. Dagegen:

$$|a_\nu| = \sqrt{\nu} \cdot \lg \nu, \quad \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^2 = \nu^{-1}(\lg \nu)^{-2}, \quad \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{2-\varepsilon} = \nu^{-\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)} \cdot (\lg \nu)^{-(2-\varepsilon)},$$

d. h. $\varrho = 2$, $p + 1 = 2$, ϱ *Konvergenz*exponent. Ferner:

$$|a_\nu| = \nu^{\frac{2}{3}}, \quad \text{also:} \quad \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\frac{3}{2}} = \nu^{-1}, \quad \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\frac{3}{2}+\varepsilon} = \nu^{-\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

d. h. $\varrho = \frac{3}{2}$ *Divergenz*exponent, $p = 1$.

$$a = \nu^{\frac{2}{3}} \cdot \lg \nu, \quad \text{also:} \quad \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\frac{3}{2}} = \nu^{-1} \cdot (\lg \nu)^{-\frac{3}{2}}, \quad \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\frac{3}{2}-\varepsilon} = \nu^{-\left(1-\frac{2}{3}\varepsilon\right)} \cdot (\lg \nu)^{-\left(\frac{3}{2}-\varepsilon\right)},$$

d. h. $\varrho = \frac{3}{2}$ *Konvergenz*exponent, $p = 1$.

Ist endlich:

$$|a_\nu| = 2^\nu, \quad \text{also:} \quad \left|\frac{1}{a_\nu}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^\nu, \quad \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varepsilon = \left(\frac{1}{2^\varepsilon}\right)^\nu,$$

so hat man:

$$\varrho = 0 \ \textit{Divergenz}\text{exponent}, \ p = 0.$$

Der Fall $\varrho = 0$: *Konvergenz*exponent ist offenbar ein für allemal ausgeschlossen, sofern die Anzahl der a_ν überhaupt unendlich ist.

*) Die letzte Umformung ist offenbar nur erlaubt, wenn $\varrho > \varepsilon > 0$: in der Tat wird im Falle $\varrho = 0$ schon die Bedingung, daß $\sum\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho-\varepsilon} \equiv \sum |a_\nu|^\varepsilon$ divergieren solle, *wertlos*. Der Fall $\varrho = 0$ wird daher im folgenden auszuschließen sein: dabei kann immerhin $p = 0$ sein.

so würde durch Erhebung in die Potenz:

$$\frac{\varrho - \frac{\varepsilon}{2}}{\varrho - \varepsilon} \equiv 1 + \frac{1}{2(\varrho - \varepsilon)} = 1 + \varepsilon' \quad (\text{wo } \varepsilon' > 0)$$

sich ergeben:

$$\overline{\lim_{\nu = \infty}}\, \nu^{1+\varepsilon'} \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho - \frac{\varepsilon}{2}} < g^{1+\varepsilon'},$$

woraus sofort die *Konvergenz* von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho - \frac{\varepsilon}{2}}$ folgen würde.

Man kann hiernach auf Grund der Beziehungen (8) und (9) den *Grenzexponenten* ϱ auch geradezu definieren als die *untere Grenze* der (positiven) Zahlen σ, für welche eine Beziehung von der Form:

(10) $$\lim_{\nu = \infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\sigma} = 0$$

besteht.

§ 9.

Endlichkeit des Ranges jeder ganzen Funktion von endlicher Ordnung. — Die Ordnungszahl als obere Schranke des Grenzexponenten.

1. Um den Zusammenhang zwischen der *Ordnung* und dem *Range* bezw. dem *Grenzexponenten* einer ganzen Funktion festzustellen, beweisen wir zunächst den folgenden Satz*):

Ist für alle $|x| > R$:

(A) $$|G(x)| \leqq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^{\alpha}} \quad (A > 0,\ \gamma > 0,\ \alpha > 0)^{**}),$$

so ist, wenn $G(x)$ *überhaupt unendlich viele Nullstellen* a_ν *(wo:* $0 < |a_\nu| \leqq |a_{\nu+1}|$*) besitzt:*

(a) $$\overline{\lim_{\nu = \infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha} \leqq \gamma \cdot (e+1)^{\alpha}.$$

Beweis. Da $G(x)$ die Nullstellen a_ν besitzen soll, überdies noch die Stelle $x = 0$ zur k-fachen Nullstelle haben kann, so muß $G(x)$ jedenfalls in der Form (3) des vorigen Paragraphen enthalten sein***). Man hat also, wenn n eine beliebige natürliche Zahl bedeutet:

---

*) Modifikation eines bekannten Satzes von E. Schou (Par. C. R., T. 125 [1897], p. 763) und elementarere Darstellung der von jenem benützten Beweismethode.

**) Man bemerke die *vollständige* Übereinstimmung dieser Voraussetzung mit der Voraussetzung (F) des Satzes § 2, p. 266.

***) Über die Beschaffenheit der m_ν wird hierbei *keinerlei Voraussetzung* gemacht: dieselben *könnten* immerhin mit ν ins Unendliche wachsen. Daß dies lediglich auf Grund der Voraussetzung (A) tatsächlich *nicht* der Fall ist, ergibt sich schließlich als eine *Folgerung* aus dem vorliegenden Satze.

$$(1)\quad G(x) = C\cdot x^k \cdot \prod_1^n{}_\nu \left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)\cdot e^{g(x)+\sum_1^n{}_\nu g_\nu(x,m_\nu)} \cdot \prod_{n+1}^\infty{}_\nu \left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)\cdot e^{g_\nu(x,m_\nu)}$$

$$= \frac{C\cdot x^k}{a_1\cdot a_2\cdots a_n}\cdot \prod_1^n{}_\nu (a_\nu - x)\cdot G_1(x), \qquad (k \geqq 0)$$

wo $G_1(x)$ eine ganze transcendente Funktion, die wegen: $G_1(0) = 1$ durch eine beständig konvergierende Reihe von der Form:

$$G_1(x) = 1 + \sum_1^\infty{}_\nu c_\nu x^\nu$$

darstellbar sein muß. Hiernach ergibt sich:

$$(2)\qquad \frac{G(x)}{C\cdot x^k\cdot \prod_1^n{}_\nu (a_\nu - x)} = \frac{1}{a_1\cdot a_2\cdots a_n}\cdot\left(1+\sum_1^\infty{}_\nu c_\nu x^\nu\right),$$

somit, auf Grund des Cauchyschen Koeffizientensatzes, für jedes $r > 0$:

$$(3)\qquad \left|\frac{1}{a_1\cdot a_2\cdots a_n}\right| \leqq \underset{|x|=r}{\text{Max.}}\left|\frac{G(x)}{C\cdot x^k\cdot \prod_1^n{}_\nu (a_\nu - x)}\right|$$

und für $r > R > 1$, mit Berücksichtigung von $|a_\nu| \leqq a_{\nu+1}$ und Ungl. (A), *a fortiori:*

$$(4)\qquad \left|\frac{1}{a_n}\right|^n \leqq \frac{1}{|C|\cdot \prod_1^n{}_\nu \big|r - |a_\nu|\big|}\cdot \underset{|x|=r}{\text{Max.}}\, G(x) \leqq \frac{A}{|C|}\cdot \frac{1}{\prod_1^n{}_\nu \big|r-|a_\nu|\big|}\cdot e^{\gamma\cdot r^\alpha}.$$

Wird jetzt noch $\varepsilon > 0$ beliebig klein angenommen und sodann $R_\varepsilon > R$ so fixiert, daß:

$$(5)\qquad \frac{A}{|C|} < e^{\varepsilon\cdot r^\alpha} \quad \text{für} \quad r > R_\varepsilon,$$

so folgt weiter:

$$(6)\qquad \left|\frac{1}{a_n}\right|^n < \frac{1}{\prod_1^n{}_\nu \big|r-|a_\nu|\big|}\cdot e^{(\gamma+\varepsilon)\cdot r^\alpha} \quad \text{für} \quad r > R_\varepsilon.$$

Setzt man ferner:

$$(7)\qquad r = (e+1)\cdot |a_n|,$$

also:

$$\prod_1^n{}_\nu \big|r - |a_\nu|\big| \leqq \prod_1^n{}_\nu \big((e+1)|a_n| - |a_n|\big) = e^n\cdot |a_n|^n,$$

und nimmt n groß genug, daß:

(8) $$(e+1)\cdot|a_n| > R_\varepsilon, \quad \text{d. h.} \quad |a_n| > \frac{1}{e+1}\cdot R_\varepsilon,$$

so geht aus Ungl. (6) die folgende hervor:

(9) $$\left|\frac{1}{a_n}\right|^n < \frac{1}{e^n\cdot|a_n|^n}\cdot e^{(\gamma+\varepsilon)\cdot(e+1)^\alpha\cdot|a_n|^\alpha}$$

oder auch:

$$e^n < e^{(\gamma+\varepsilon)\cdot(e+1)^\alpha\cdot|a_n|^\alpha},$$

also:

(10) $$n\cdot\left|\frac{1}{a_n}\right|^\alpha < (\gamma+\varepsilon)\cdot(e+1)^\alpha \quad \text{für} \quad |a_n| > \frac{1}{e+1}\cdot R_\varepsilon.$$

Man hat somit zunächst:

(11) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu\cdot\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\alpha < (\gamma+\varepsilon)\cdot(e+1)^\alpha,$$

und schließlich, da ja ε unbegrenzt verkleinert werden kann, wie behauptet:

(a) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu\cdot\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\alpha \leqq \gamma\cdot(e+1)^\alpha.$$

2. Tritt an die Stelle der Voraussetzung (A) die folgende:

(B) $$|G(x)| < e^{|x|^{\alpha+\delta}} \quad \text{für jedes} \quad \delta > 0 \quad \text{und} \quad |x| > R_\delta,$$

so findet man nach Analogie von Ungl. (10) zunächst:

(12) $$n\cdot\left|\frac{1}{a_n}\right|^{\alpha+\delta} < (e+1)^{\alpha+\delta}.$$

Schreibt man hier $\frac{\delta}{2}$ statt δ und multipliziert die betreffende Ungleichung mit $\left|\frac{1}{a_n}\right|^{\frac{\delta}{2}}$, so folgt durch Übergang zur Grenze:

(b) $$\lim_{\nu=\infty} \nu\cdot\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha+\delta} = 0 \quad \text{für jedes} \quad \delta > 0.$$

Ersetzt man andererseits die Voraussetzung (A) durch die folgende:

(C) $$|G(x)| < e^{\varepsilon\cdot|x|^\alpha} \quad \text{für jedes} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{und} \quad |x| > R_\varepsilon,$$

so gewinnt man nach Analogie von Ungl. (10) zunächst die Beziehung:

(13) $$n\cdot\left|\frac{1}{a_n}\right|^\alpha < \varepsilon\cdot|e+1|^\alpha,$$

und hieraus durch Übergang zur Grenze:

(c) $$\lim_{\nu=\infty} \nu\cdot\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\alpha = 0.$$

Schreibt man in Gl. (b) nochmals $\frac{\delta}{2}$ statt δ und erhebt in die Potenz $\frac{\alpha+\delta}{\alpha+\frac{\delta}{2}} = 1 + \frac{\delta}{2\alpha+\delta} = 1 + \delta'$ so folgt:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu^{1+\delta'} \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha+\delta} = 0,$$

woraus die *Konvergenz* von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha+\delta}$ für *jedes* $\delta > 0$ hervorgeht. Das *gleiche* Resultat (aber auch *kein weiter gehendes*) ergibt sich aus den Grenzbeziehungen (a) und (c).

Im übrigen kann man das Hauptergebnis dieser Untersuchung zunächst generell folgendermaßen aussprechen:

Jede ganze Funktion von endlicher Ordnung ist auch von endlichem Range.

3. Eine speziellere Formulierung der in den Beziehungen (B), (A), (C) und (b), (a), (c) enthaltenen Ergebnisse führt zu den folgenden Aussagen:

Besitzt eine ganze Funktion $G(x)$ von der Ordnung α unendlich viele Nullstellen a_ν, so hat man zum mindesten:

$$\text{(b)} \quad \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha+\delta} = 0 \quad \textit{für jedes} \quad \delta > 0.$$

Gehört insbesondere $G(x)$ dem Normal- bezw. dem Minimaltypus an, so ist schon:

$$\text{(a)} \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha} \leqq g \ (\textit{wo } g \textit{ endlich}) \quad \textit{bezw.} \quad \text{(c)} \quad \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha} = 0.$$

Anders ausgesprochen:

Die Relation:

$$\text{(b)} \quad \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha+\delta} = 0, \quad \textit{bezw.} \quad \text{(a)} \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha} \leqq g,$$

$$\textit{bezw.} \quad \text{(c)} \quad \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha} = 0$$

bildet eine notwendige Bedingung dafür, daß für alle hinlänglich großen x eine Ungleichung von der Form besteht:

$$\text{(B)} \quad |G(x)| < e^{|x|^{\alpha+\delta}}, \quad \textit{bezw.} \quad \text{(A)} \quad |G(x)| < e^{\gamma \cdot |x|^{\alpha}},$$

$$\textit{bezw.} \quad \text{(C)} \quad G(x) < e^{\varepsilon \cdot |x|^{\alpha}}.$$

Auf Grund der erwiesenen *Konvergenz* von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha+\delta}$ ergibt sich schließlich noch:

Ist ϱ der Grenzexponent einer ganzen Funktion von der Ordnung α, so kann nur:

$$\varrho \leqq \alpha$$

sein.

Umgekehrt ist also die Ordnungszahl α einer ganzen Funktion **mindestens** *gleich dem Grenzexponenten.*

Wir gehen nunmehr darauf aus zu zeigen, daß die *Ordnung* einer *primitiven* ganzen Funktion auch nur *höchstens* gleich dem Grenzexponenten sein kann, sodaß sich also schließlich für primitive ganze Funktionen die Beziehung $\varrho = \alpha$ ergeben wird.

§ 10.

Eine vorläufige obere Schranke für das Anwachsen einer primitiven Funktion.

1. Hilfssatz I. *Ist:*

$$E_p(u) = (1-u)\cdot e^{\sum_1^p \frac{1}{\varkappa}\cdot u^\varkappa} \qquad (p \geqq 1), \tag{1}$$

so hat man für **jedes** *von Null verschiedene u und für $0 \leqq \alpha \leqq 1$:*

$$|E_p(u)| < e^{c_{p,\alpha}\cdot|u|^{p+\alpha}}, \tag{2}$$

wo $c_{p,\alpha}$ eine lediglich von p und α abhängige positive Zahl bedeutet.

Beweis. Für $|u| < 1$ ergibt sich zunächst:

$$E_p(u) = e^{-\sum_1^\infty \frac{1}{\varkappa}\cdot u^\varkappa + \sum_1^p \frac{1}{\varkappa}\cdot u^\varkappa} = e^{-\sum_{p+1}^\infty \frac{1}{\varkappa}\cdot u^\varkappa},$$

also für $0 < |u| < 1$:

$$|E_p(u)| < e^{\sum_{p+1}^\infty \frac{1}{\varkappa}\cdot|u|^\varkappa} < e^{\frac{1}{p+1}\sum_{p+1}^\infty |u|^\varkappa} = e^{\frac{1}{p+1}\cdot\frac{|u|^{p+1}}{1-|u|}}.$$

Ist jetzt $|u| \leqq \frac{p}{p+1}$, also $1-|u| \geqq \frac{1}{p+1}$, so wird:

$$|E_p(u)| < e^{|u|^{p+1}}$$

und, wegen $|u| < 1$, *a fortiori:*

$$|E_p(u)| < e^{|u|^{p+\alpha}} \quad \text{für:} \quad 0 \leqq \alpha \leqq 1. \tag{3}$$

Andererseits hat man für *jedes* u:

$$|E_p(u)| < (1+|u|)\cdot e^{\sum_1^p \frac{1}{\varkappa}\cdot|u|^\varkappa} < e^{|u| + \sum_1^p \frac{1}{\varkappa}\cdot|u|^\varkappa}$$

$$= e^{\left\{\left|\frac{1}{u}\right|^{p+\alpha-1} + \sum_1^p \frac{1}{\varkappa}\cdot\left|\frac{1}{u}\right|^{p+\alpha-\varkappa}\right\}\cdot|u|^{p+\alpha}}.$$

Ist jetzt $|u| > \frac{p}{p+1}$, also $\left|\frac{1}{u}\right| < \frac{p+1}{p}$, so wird:

(4) $$|E_p(u)| < e^{c_{p,\alpha}\cdot|u|^{p+\alpha}},$$

wenn gesetzt wird:

(4a) $$c_{p,\alpha} = \left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+\alpha-1} + \sum_1^p{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa}\cdot\left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+\alpha-\varkappa}.$$

Da hiernach stets $c_{p,\alpha} > 1$, so ergibt sich mit Rücksicht auf die für $u \leqq \frac{p}{p+1}$ geltende Ungleichung (3) *a fortiori* die Gültigkeit von Ungl. (4) für *jedes* von Null verschiedene u.

Zusatz. Eine Ungleichung von der Form (2) gilt, wie man sich leicht überzeugt, auch noch für den Fall $p = 0$, d. h. für:

(5) $$E_0(u) = 1 - u,$$

jedoch *mit Ausschluß* des Wertes $\alpha = 0$ (in der Tat wird ja Ungl. (2) für $p = 0$, $\alpha = 0$ hinfällig). Man operiert indessen in diesem Falle einfacher mit den ohne weiteres evidenten Ungleichungen:

(6) $$\begin{cases} \text{(a)} \quad |E_0(u)| \leqq (1+|u|) = e^{\lg(1+|u|)} \\ \text{(b)} \qquad\qquad\qquad\quad < e^{|u|} = e^{c_{0,1}\cdot|u|} \quad \text{(d. h. } c_{0,1} = 1). \end{cases}$$

2. Hilfssatz II. *Ist:*

(7) $$\mathfrak{P}_m(x) = \prod_1^m{}_\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right), \quad \text{wo: } \begin{cases} E_0\left(\frac{x}{a_\nu}\right) = 1 - \frac{x}{a_\nu} \\ E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) = \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)\cdot e^{\sum_1^p{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa}\cdot\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa} \quad \text{für } p \geqq 1, \end{cases}$$

und $0 < \beta \leqq 1$, *so hat man bei beliebig klein vorgeschriebenem* $\delta > 0$:

(8) $$|\mathfrak{P}_m(x)| < e^{\delta\cdot|x|^{p+\beta}} \quad \textit{für} \quad |x| > R_\delta.$$

Beweis. Man hat zunächst im Falle $p = 0$:

$$|\mathfrak{P}_m(x)| \leqq e^{\sum_1^m{}_\nu \lg\left(1+\left|\frac{x}{a_\nu}\right|\right)} \leqq e^{m\cdot\lg\left(1+\left|\frac{x}{a_1}\right|\right)},$$

und im Falle $p \geqq 1$:

$$|\mathfrak{P}_m(x)| < e^{c_{p,0}\sum_1^m{}_\nu\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^p} \leqq e^{c_{p,0}\cdot\frac{m}{|a_1|}\cdot|x|^p}.$$

Wird also R_δ in der Weise fixiert, daß für $|x| > R_\delta$:

$$m\cdot\lg\left(1+\left|\frac{x}{a_1}\right|\right)\cdot|x|^{-\beta} < \delta \quad \text{bezw.} \quad c_{p,0}\cdot\frac{m}{|a_1|}\cdot|x|^{-\beta} < \delta,$$

so ergibt sich (wenn man die Fälle $p=0$ und $p \geqq 1$ wieder zusammenfaßt):

$$|\mathfrak{L}_m(x)| < e^{\delta \cdot |x|^{p+\beta}} \quad \text{für} \quad |x| > R_\delta.$$

3. Die beiden eben bewiesenen Hilfssätze liefern zunächst unmittelbar den folgenden, zuerst von Poincaré*) (in etwas anderer Form) ausgesprochenen Satz:

Ist:

$$\mathfrak{L}(x) = \prod_1^\infty{}_\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \tag{9}$$

eine ganze Funktion vom Range $p \geqq 0$, so hat man für jedes $\varepsilon > 0$ und $|x| > R_\varepsilon$:

$$|\mathfrak{L}(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^{p+1}}.\text{**)} \tag{10}$$

Beweis. Ist $\mathfrak{L}(x)$ vom Range p, also $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1}$ *konvergent,* so läßt sich zu beliebig vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$ ein m so fixieren, daß:

$$\sum_{m+1}^\infty{}_\nu \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1} < \frac{\varepsilon}{2 c_{p,1}},$$

wo $c_{p,1}$ für $p \geqq 1$ durch Gl. (4a) definiert ist, während (s. Ungl. (6b)) $c_{0,1} = 1$ sein soll. Man hat alsdann mit Benützung von Ungl. (2) bezw. (6b):

$$\left|\prod_{m+1}^\infty{}_\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right)\right| < e^{c_{p,1} \cdot \sum_{m+1}^\infty{}_\nu \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{p+1}} < e^{\frac{\varepsilon}{2} \cdot |x|^{p+1}} \tag{11}$$

für jedes von Null verschiedene x. Andererseits kann man nach Hilfssatz II ein R_ε so fixieren, daß:

$$\left|\prod_1^m{}_\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right)\right| < e^{\frac{\varepsilon}{2} \cdot |x|^{p+1}} \quad \text{für:} \quad |x| > R_\varepsilon. \tag{12}$$

Aus der Zusammenfassung der Ungleichungen (10) und (11) resultiert dann unmittelbar die behauptete Beziehung (9).

---

*) A. a. O. p. 142. Der Beweis ist dort nur für die Fälle $p=0$ und $p=1$ durchgeführt.

**) Man erkennt leicht, daß dieser Satz, sowie auch die Ergebnisse der beiden folgenden Paragraphen unverändert gültig bleiben, wenn zu $\mathfrak{L}(x)$ noch ein Faktor von der Form x^k ($k \geqq 1$) hinzutritt (wegen $|x|^k < e^{|x|^\delta}$ für jedes noch so kleine $\delta > 0$ und alle hinlänglich großen x).

§ 11.

Bestimmung einer exakteren oberen Schranke für das Anwachsen einer primitiven Funktion.

1. Um eine Herabminderung der zunächst durch Ungl. (9) des vorigen Paragraphen statuierten oberen Schranke für $|\mathfrak{L}(x)|$ zu erzielen, beweisen wir zunächst den folgenden Satz*):

Ist

(13) $$\mathfrak{L}(x) = \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} E_p(x), \qquad (p \geqq 0)$$

vom Range p, und hat man für irgend eine dem Intervalle $p < \sigma < p + 1$ angehörige Zahl σ:

(14) $$|a_\nu|^\sigma \geqq \nu, \quad \textit{zum mindesten für } \nu > m,$$

so ist für alle hinlänglich großen x:

(15) $$|\mathfrak{L}(x)| < e^{C_\sigma \cdot |x|^\sigma},$$

wo C_σ eine lediglich von σ abhängige positive Zahl bedeutet.

Beweis. Zerlegt man $\mathfrak{L}(x)$ in die beiden Teilprodukte:

$$\mathfrak{L}(x) = \prod_{1}^{m}{}_{\nu} E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{m+1}^{\infty}{}_{\nu} E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right),$$

(16) $$= \mathfrak{L}_m(x) \cdot \mathfrak{R}_m(x),$$

so läßt sich zunächst nach Hilfssatz II des vorigen Paragraphen zu beliebig klein vorgeschriebenem $\delta > 0$ eine positive Zahl fixieren, die wir, um ihre Abhängigkeit von m kenntlich zu machen, mit r_m bezeichnen wollen**), derart, daß:

(17) $$|\mathfrak{L}_m(x)| < e^{\delta \cdot |x|^\sigma}, \quad \text{für } |x| > r_m.$$

Es möge nun n zu beliebig angenommenem x diejenige ganze positive Zahl bedeuten, welche eindeutig durch die Bedingung bestimmt ist:

(18) $$n - 1 < |x|^\sigma \leqq n,$$

und es werde $|x|$ bezw. die soeben mit r_m bezeichnete untere Schranke

*) Bez. der Literatur dieses Satzes s. Münch. Ber. 33 (1903), p. 102 ff. Der Satz erscheint hier in noch etwas allgemeinerer Fassung, als ich ihn a. a. O. p. 111, 117 formuliert habe.

**) r_m hängt natürlich auch von δ und σ ab, doch erscheint es nicht notwendig, dies ausdrücklich in die Bezeichnung aufzunehmen.

der $|x|$ von vornherein so groß angenommen, daß $n > m$*). Setzt man sodann:

$$\mathfrak{R}_m(x) = \prod_{m+1}^{n}{}_\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{n+1}^{\infty}{}_\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right),$$

$$(19) \qquad = \mathfrak{R}_{m,n}(x) \cdot \mathfrak{R}_n(x),$$

so folgt zunächst für $p \geqq 1$:

$$|\mathfrak{R}_{m,n}(x)| \leqq \prod_{m+1}^{n}{}_\nu \left(1 + \left|\frac{x}{a_\nu}\right|\right) \cdot e^{\sum_1^p {}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^\varkappa}$$

$$= e^{\sum_1^p {}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot |x|^\varkappa \cdot \sum_{m+1}^n {}_\nu \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varkappa} \cdot \prod_{m+1}^{n}{}_\nu \left(1 + \left|\frac{x}{a_\nu}\right|\right),$$

während im Falle $p = 0$ der gesamte Exponentialfaktor durch die Einheit zu ersetzen ist. Da sodann nach Voraussetzung (14) und Ungl. (18):

$$\left|\frac{1}{a_\nu}\right| \leqq \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}, \quad (\text{für } \nu > m), \quad |x| \leqq n^{\frac{1}{\sigma}},$$

so folgt weiter:

$$|\mathfrak{R}_{m,n}(x)| \leqq e^{\sum_1^p {}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot n^{\frac{\varkappa}{\sigma}} \cdot \sum_{m+1}^n {}_\nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{\sigma}}} \cdot \prod_{m+1}^{n}{}_\nu \left(1 + \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right),$$

$$(20) \qquad \leqq e^{S_p^{(\sigma)}} \cdot \prod_1^n \left(1 + \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right),$$

wo:

$$(21) \qquad S_p^{(\sigma)} = \sum_1^p {}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot n^{\frac{\varkappa}{\sigma}} \cdot \sum_1^n {}_\nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{\sigma}}, \quad (p \geqq 1), \quad \text{speziell: } S_0^{(\sigma)} = 0.$$

*) Diese Annahme ist durchaus unwesentlich und wurde nur gemacht, um Weitläufigkeiten zu vermeiden. Wären nämlich unter den x, welche der Bedingung $|x| > r_m$ genügen, auch solche, für welche $n \leqq m$ ausfällt, so würde für diese das in Gl. (19) mit $\mathfrak{R}_{m,n}(x)$ bezeichnete Teilprodukt einfach wegfallen, während $\mathfrak{R}_n(x)$ zunächst in $\prod_{m+1}^{\infty}{}_\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right)$ übergehen würde und in der Folge *a fortiori* durch $\prod_{n+1}^{\infty}{}_\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right)$ ersetzt werden könnte.

Nun ist für $0 < \varkappa \leqq p < \sigma$:

$$\sum_1^n \nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{\sigma}} < \frac{1}{1-\frac{\varkappa}{\sigma}} \cdot n^{1-\frac{\varkappa}{\sigma}} \; ^*),$$

also:

$$(22) \qquad S_p^{(\sigma)} < \sum_1^p \varkappa \frac{\sigma}{\varkappa \cdot (\sigma - \varkappa)} \cdot n = s_p^{(\sigma)} \cdot n \qquad (p \geqq 1),$$

wo:

$$(22\text{a}) \qquad s_p^{(\sigma)} = \sum_1^p \varkappa \frac{\sigma}{\varkappa \cdot (\sigma - \varkappa)}, \quad (p \geqq 1)^{**}), \quad \text{speziell: } s_0^{(\sigma)} = 0.$$

Für das in (20) auftretende Produkt ergibt sich:

$$(23) \qquad \prod_1^n \nu \left(1 + \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right) < \prod_1^n \nu \frac{2 n^{\frac{1}{\sigma}}}{\nu^{\frac{1}{\sigma}}} = \left(\frac{(2^\sigma \cdot n)^n}{n!}\right)^{\frac{1}{\sigma}} < e^{\frac{1}{\sigma} \cdot 2^\sigma \cdot n},$$

sodaß mit Benutzung von (22), (23) die Ungleichung (20) in die folgende übergeht:

$$(24) \qquad |\mathfrak{R}_{m,n}(x)| < e^{\left(s_p^{(\sigma)} + \frac{1}{\sigma} \cdot 2^\sigma\right) \cdot n}.$$

---

*) Man hat bekanntlich:

$$\sum_1^n \nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1-\lambda} < \frac{1}{\lambda} \cdot n^\lambda, \qquad (0 < \lambda < 1),$$

wie gewöhnlich mit Hilfe der evidenten Integralbeziehung:

$$\sum_1^n \nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1-\lambda} < \int_0^n \frac{dx}{x^{1-\lambda}}$$

gezeigt wird, aber auch leicht rein elementar erkannt werden kann. Man hat nämlich (s. Münch. Sitz.-Ber. 32 [1902], p. 177):

$$b^\lambda - a^\lambda > \lambda \cdot b^{\lambda-1}(b-a) \qquad (0 < \lambda < 1),$$

und daher:

$$\nu^\lambda - (\nu-1)^\lambda > \lambda \cdot \nu^{\lambda-1} = \lambda \cdot \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1-\lambda},$$

woraus durch Substitution von $\nu = 1, 2, \cdots n$ und Summation die fragliche Beziehung hervorgeht.

**) Man hat übrigens:

$$s_p^{(\sigma)} = \sum_1^p \varkappa \left(\frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\sigma - \varkappa}\right) < \frac{1}{\sigma - p} + \frac{1}{p} + 2 \sum_1^{p-1} \varkappa \frac{1}{\varkappa} < \frac{\sigma}{p(\sigma - p)} + 2 \lg p.$$

Da aber nach Ungl. (18): $n < |x|^\sigma + 1$, so folgt:

$$\left(s_p^{(\sigma)} + \frac{1}{\sigma}\cdot 2^\sigma\right)\cdot n < \left(s_p^{(\sigma)} + \frac{1}{\sigma}\cdot 2^\sigma\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{|x|^\sigma}\right)\cdot |x|^\sigma$$

$$(25) \qquad < \left(s_p^{(\sigma)} + \frac{1}{\sigma}\cdot 2^\sigma + \delta\right)\cdot |x|^\sigma \quad \text{für } |x| > R,$$

wenn R so bestimmt wird, daß:

$$(25\text{a}) \qquad \left(s_p^{(\sigma)} + \frac{1}{\sigma}\cdot 2^\sigma\right)\cdot\frac{1}{R^\sigma} \leqq \delta \quad \text{d. h.} \quad R \geqq \left(\frac{s_p^{(\sigma)} + \frac{1}{\sigma}\cdot 2^\sigma}{\delta}\right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Somit findet man:

$$(26) \qquad |\mathfrak{R}_{m,n}(x)| < e^{\left(s_p^{(\sigma)} + \frac{1}{\sigma}\cdot 2^\sigma + \delta\right)\cdot |x|^\sigma} \quad \text{für } |x| > R.$$

Zur Abschätzung des in Gl. (19) mit $\mathfrak{R}_n(x)$ bezeichneten Restproduktes hat man (mit Benützung von Ungl. (2), p. 299 und (6b) p. 300:

$$|\mathfrak{R}_n(x)| < e^{c_{p,1}\sum_{n+1}^{\infty}{}_\nu \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{p+1}}$$

$$(27) \qquad < e^{c_{p,1}\cdot |x|^{p+1}\cdot \sum_{n+1}^{\infty}{}_\nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{p+1}{\sigma}}} \qquad \text{(nach Ungl. (14))}.$$

Nun ist aber wegen $\sigma < p + 1$:

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}_\nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{p+1}{\sigma}} < \frac{1}{\frac{p+1}{\sigma} - 1}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{p+1}{\sigma} - 1}, ^{*})$$

---

*) Man hat nämlich für $\lambda > 0$:

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}_\nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1+\lambda} < \frac{1}{\lambda}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^\lambda,$$

wie wiederum mit Hilfe der Integralbeziehung:

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}_\nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1+\lambda} < \int_n^\infty \frac{dx}{x^{1+\lambda}}$$

oder auch rein elementar in folgender Weise sich ergibt. Man hat (vgl. Fußn. 1 der vorigen Seite):

$$b^\lambda - a^\lambda \begin{cases} > \lambda\cdot b^{\lambda-1}\cdot(b-a) & (0 < \lambda < 1) \\ > \lambda\cdot a^{\lambda-1}\cdot(b-a) & (\lambda > 1), \end{cases}$$

und daher:

$$\left(\frac{1}{\nu}\right)^\lambda - \left(\frac{1}{\nu+1}\right)^\lambda \begin{cases} > \dfrac{\lambda}{\nu^\lambda\cdot(\nu+1)} & (0 < \lambda < 1) \\ > \dfrac{\lambda}{\nu\cdot(\nu+1)^\lambda} & (\lambda > 1), \end{cases}$$

also:

$$|x|^{p+1} \cdot \sum_{n+1}^{\infty} {}_{\nu} \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{p+1}{\sigma}} < \frac{\sigma}{p+1-\sigma} \cdot \left(\frac{|x|^{\sigma}}{n}\right)^{\frac{p+1}{\sigma}-1} \cdot |x|^{\sigma}$$

$$< \frac{\sigma}{p+1-\sigma} \cdot |x|^{\sigma} \quad \left(\text{wegen: } \frac{|x|^{\sigma}}{n} \leqq 1 \text{ nach Ungl. (18)}\right),$$

und daher:

$$(28) \qquad |\mathfrak{R}_n(x)| < e^{\frac{\sigma}{p+1-\sigma} \cdot c_{p,1} \cdot |x|^{\sigma}} \qquad (\text{für jedes } x).$$

Durch Zusammenfassung der Beziehungen (16), (17), (19), (26), (28) ergibt sich, wenn man noch mit R_m die größere der beiden Zahlen r_m und R bezeichnet, die gesuchte Ungleichung:

$$(29) \qquad |\mathfrak{P}(x)| < e^{\left(s_p^{(\sigma)} + \frac{1}{\sigma} \cdot 2^{\sigma} + \frac{\sigma}{p+1-\sigma} \cdot c_{p,1} + 2\delta\right) \cdot |x|^{\sigma}}$$

$$= e^{C_{\sigma} \cdot |x|^{\sigma}} \qquad \text{für } |x| > R_m.$$

2. Das eben gewonnene Resultat in Verbindung mit dem Satze in Nr. 3 des vorigen Paragraphen (Ungl. (10)) führt nunmehr zu dem folgenden

Hauptsatz: *Ist*

$$\mathfrak{P}(x) = \prod_{1}^{\infty} {}_{\nu} E_p\left(\frac{x}{a_{\nu}}\right) \qquad (p \geqq 0)$$

vom Range p, *und besteht für irgend ein* σ *des Intervalls* $p < \sigma \leqq p + 1$*) *die Beziehung:*

$$(30) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_{\nu}}\right|^{\sigma} \leqq g, \quad \text{wo } g \geqq 0,\text{**)}$$

---

also schließlich für *jedes* $\lambda > 0$:

$$\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\lambda} - \left(\frac{1}{\nu+1}\right)^{\lambda} > \lambda \cdot \left(\frac{1}{\nu+1}\right)^{1+\lambda},$$

woraus durch Substitution von $\nu = n, (n+1), \cdots$ und Summation die fragliche Beziehung resultiert.

*) Man bemerke, daß hier der Wert $\sigma = p + 1$, welcher bei dem zuvor geführten Beweise ausgeschlossen wurde, als zulässig auftritt.

**) In dem Falle $g = 0$ lautet die Voraussetzung (30) zunächst:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_{\nu}}\right|^{\sigma} = 0,$$

d. h. schließlich:

$$(30\text{a}) \qquad \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_{\nu}}\right|^{\sigma} = 0,$$

während die Behauptung (31) dann die Form annimmt:

$$(31\text{a}) \qquad |\mathfrak{P}(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^{\sigma}}.$$

so hat man für jedes $\varepsilon > 0$ *und* $|x| > R_\varepsilon$:

$$(31) \qquad |\mathfrak{L}(x)| < e^{(C_\sigma \cdot g + \varepsilon) \cdot |x|^\sigma},$$

wo C_σ *eine nur von* σ *abhängige positive Zahl bedeutet.*

Beweis. Ist zunächst $\sigma = p + 1$, so fällt der vorliegende Satz mit demjenigen von Nr. 3 des vorigen Paragraphen zusammen. Aus der Konvergenz von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1}$ und der Monotonie der $|a_\nu|$ folgt nämlich allemal:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1} = 0, \quad \text{also:} \quad g = 0,$$

und die Beziehung (31) wird dann identisch mit Ungl. (10), nämlich:

$$|\mathfrak{L}(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\sigma} \quad \text{für} \quad |x| > R_\varepsilon.$$

Es sei jetzt: $p < \sigma < p + 1$. Wird dann $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so läßt sich auf Grund der Voraussetzung (30) eine natürliche Zahl m_ε so fixieren, daß:

$$\nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma < g + \frac{\varepsilon}{C_\sigma} = g + \delta \quad \text{für} \quad \nu > m_\varepsilon,$$

anders geschrieben:

$$(32) \qquad \left((g+\delta)^{\frac{1}{\sigma}} \cdot |a_\nu|\right)^\sigma > \nu \quad \text{für} \quad \nu > m_\varepsilon.$$

Macht man die Substitution:

$$x = \frac{y}{(g+\delta)^{\frac{1}{\sigma}}},$$

so besitzt $\mathfrak{L}\left(\frac{y}{(g+\delta)^{\frac{1}{\sigma}}}\right)$ als Funktion von y aufgefaßt die Nullstellen $y = (g+\delta)^{\frac{1}{\sigma}} \cdot |a_\nu|$. Da aber diese letzteren der Beziehung (32) genügen, so folgt aus dem zuvor bewiesenen Satze, daß:

$$\left|\mathfrak{L}\left(\frac{y}{(g+\delta)^{\frac{1}{\sigma}}}\right)\right| < e^{C_\sigma \cdot |y|^\sigma} \quad \text{für} \quad |y| > R_{m_\varepsilon},$$

sodaß sich durch Rücksubstitution von $y = (g+\delta)^{\frac{1}{\sigma}} \cdot x = \left(g + \frac{\varepsilon}{C_\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \cdot x$ die oben behauptete Relation ergibt:

$$(31) \qquad |\mathfrak{L}(x)| < e^{(C_\sigma \cdot g + \varepsilon) \cdot |x|^\sigma} \quad \text{für} \quad |x| > \frac{R_{m_\varepsilon}}{(g+\delta)^{\frac{1}{\sigma}}} = R_\varepsilon.$$

3. In dem Falle $\sigma = p$, welcher bisher ausgeschlossen wurde, verlieren die Sätze von Nr. 1 und Nr. 2 *im allgemeinen* ihre Gültigkeit. Dies

findet offenbar *bedingungslos* statt, wenn $\sigma = p = 0$, da in diesem Falle die Aussage (15) bezw. (31) sinnlos wird. Ist jedoch $\sigma = p \geqq 1$, so läßt sich eine *hinreichende* Zusatzbedingung angeben, unter welcher jene Sätze noch gültig bleiben. Es besteht hier zunächst der Satz von Nr. 1 in der folgenden Form:

Ist $\mathfrak{L}(x)$ vom Range $p \geqq 1$ und:

$$|a_\nu|^p \geqq \nu \quad \textit{für} \quad \nu > m, \tag{33}$$

außerdem:

$$\frac{1}{p} \cdot \overline{\lim_{n=\infty}} \left| \sum_1^n {}_\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p \right| = A, \qquad (A \geqq 0)^{*}), \tag{34}$$

so ist für alle hinlänglich großen x:

$$|\mathfrak{L}(x)| < e^{(A + C_p)\cdot |x|^p}, \tag{35}$$

wo C_p eine lediglich von p abhängige positive Zahl bedeutet.

Beweis. Infolge der Voraussetzung (34) läßt sich zu beliebig kleinem $\delta > 0$ ein n' so fixieren, daß für $n \geqq n'$:

$$\frac{1}{p} \cdot \left| \sum_1^n {}_\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p \right| < A + \delta. \tag{36}$$

Bedeutet jetzt wiederum n diejenige ganze Zahl, welche durch die Bedingung bestimmt wird (cf. Ungl. (18)):

$$n - 1 < |x|^p \leqq n, \tag{37}$$

wobei von vornherein $|x|$ so groß angenommen werden mag, daß $n \geqq n'$ und zugleich auch $n > m$**), und zerlegt man $\mathfrak{L}(x)$ in die drei Teilprodukte:

$$\mathfrak{L}(x) = \prod_1^m {}_\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{m+1}^n {}_\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{n+1}^\infty {}_\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right),$$

anders geschrieben:

$$\mathfrak{L}(x) = e^{\sum_1^n {}_\nu \frac{1}{p}\cdot\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^p} \cdot \prod_1^m {}_\nu E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{m+1}^n {}_\nu E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{n+1}^\infty {}_\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right), \tag{38}$$

wo:

(38a) $E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) = \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{\sum_1^{p-1} {}_\varkappa \frac{1}{\varkappa}\cdot\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa}$ $(p > 1)$ bezw. $E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) = 1 - \frac{x}{a_\nu}$ $(p = 1)$,

---

*) Da $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|$ auf Grund der Voraussetzung, daß $\mathfrak{L}(x)$ vom Range p sein soll, *divergieren* muß, so besagt die Bedingung (34), daß $\sum \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p$ noch *bedingt konvergiert* oder zum mindesten innerhalb *endlicher* Grenzen *oszilliert*.

**) Vg. Fußn. p. 303.

so folgt zunächst mit Berücksichtigung von Ungl. (36):

$$(39)\qquad \left| e^{\sum_1^n \nu \frac{1}{p}\cdot\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^p} \right| \leqq e^{\frac{1}{p}\cdot\left|\sum_1^n \nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p\right|\cdot|x|^p} < e^{(A+\delta)\cdot|x|^p}.$$

Für das *erste* der in Gl. (38) auftretenden Teilprodukte ergibt sich wiederum nach dem Hilfssatz II des vorigen Paragraphen (Ungl. (8), p. 300: man bemerke, daß *jetzt* $p-1$ an Stelle von p steht):

$$(40)\qquad \left|\prod_1^m \nu\, E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)\right| < e^{\delta\cdot|x|^p} \quad \text{für } |x| > r_m \qquad \text{(cf. Ungl. (17), p. 302).}$$

Für das *zweite* Teilprodukt hat man zunächst mit Benützung von Ungl. (33), (37):

$$(41)\qquad \left|\prod_{m+1}^n \nu\, E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)\right| < \prod_1^n \nu \left(1+\left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\cdot e^{\sum_1^{p-1} \varkappa \frac{1}{\varkappa}\cdot\left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{p}}},$$

wobei im Falle $p=1$ der Exponentialfaktor wegfällt. Man findet nun genau wie früher (s. Ungl. (23), p. 304):

$$(42)\qquad \prod_1^n \nu \left(1+\left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{p}}\right) < e^{\frac{1}{p}\cdot 2^p\cdot n},$$

und andererseits:

$$(43)\qquad \prod_1^n \nu \cdot e^{\sum_1^{p-1} \varkappa \frac{1}{\varkappa}\cdot\left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{p}}} = e^{\sum_1^{p-1} \varkappa \frac{1}{\varkappa}\cdot n^{\frac{\varkappa}{p}}\cdot\sum_1^n \nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{p}}} \qquad (p>1).$$

Nun ist für $\varkappa < p$ (s. p. 304, Fußn. 1):

$$\sum_1^n \nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{p}} < \frac{p}{p-\varkappa}\cdot n^{1-\frac{\varkappa}{p}},$$

also:

$$(44)\qquad \sum_1^{p-1} \nu \frac{1}{\varkappa}\cdot n^{\frac{\varkappa}{p}}\cdot\sum_1^n \nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{p}} < \left(\sum_1^{p-1} \nu \frac{p}{\varkappa\cdot(p-\varkappa)}\right)\cdot n$$

$$= \left(\sum_1^{p-1} \varkappa \left(\frac{1}{\varkappa}+\frac{1}{p-\varkappa}\right)\right)\cdot n < 2\lg p\cdot n,$$

sodaß die Ungleichung (41) mit Benützung von (42)—(44) in die folgende übergeht:

$$(45)\qquad \left|\prod_{m+1}^n \nu\, E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)\right| < e^{\left(2\lg p+\frac{1}{p}\cdot 2^p\right)\cdot n},$$

und zwar gilt diese zunächst unter der Voraussetzung $p > 1$ abgeleitete Beziehung auch noch für $p = 1$, da in diesem Falle $\lg p = 0$ wird, was genau dem Wegfallen des Exponentialfaktors in (41) entspricht.

Wegen $n < |x|^p + 1$ (Ungl. (37)) hat man sodann:

$$(46) \qquad \left(2 \lg p + \frac{1}{p} \cdot 2^p\right) \cdot n < \left(2 \lg p + \frac{1}{p} \cdot 2^p\right) \cdot (1 + |x|^{-p}) \cdot |x|^p$$
$$< \left(2 \lg p + \frac{1}{p} \cdot 2^p + \delta\right) \cdot |x|^p \quad \text{für } |x| > R,$$

wenn R so bestimmt wird, daß:

$$(46\text{a}) \qquad \frac{2p \cdot \lg p + 2^p}{p \cdot R^p} \leqq \delta, \quad \text{d. h.} \quad R \geqq \left(\frac{2p \cdot \lg p + 2^p}{p\delta}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Somit findet sich schließlich:

$$(47) \qquad \left| \prod_{m+1}^{n}{}_{\nu} E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \right| < e^{\left(2 \lg p + \frac{1}{p} \cdot 2^p + \delta\right) \cdot |x|^p}.$$

Auf das *letzte* der in Gleichung (38) auftretenden Teilprodukte, welches kein anderes ist, als das in Nr. 1, Gl. (19), p. 303 mit $\mathfrak{R}_n(x)$ bezeichnete, läßt sich ohne weiteres die zur Abschätzung des letzteren entwickelte Ungleichung (28) anwenden (welche, wie unmittelbar zu sehen, noch für $\sigma = p$ gültig bleibt) sodaß sich also ergibt:

$$(48) \qquad \left| \prod_{n+1}^{\infty}{}_{\nu} E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \right| < e^{p \cdot c_{p,1} \cdot |x|^p}.$$

Durch Einsetzen der Beziehungen (39), (40), (47), (48) geht dann aus Gl. (38) die behauptete Ungleichung hervor:

$$(49) \qquad |\mathfrak{L}(x)| < e^{(A + C_p) \cdot |x|^p} \quad \text{für } |x| > R_m,$$

wenn gesetzt wird:

$$(49\text{a}) \qquad C_p = 2 \lg p + \frac{1}{p} \cdot 2^p + p \cdot c_{p,1} + 3\delta$$

und R_m die größere der beiden Zahlen r_m und R (s. Ungl. (40), (46)) bedeutet.

4. Mit Hilfe der Substitution

$$x = \frac{y}{(g + C_p^{-1} \cdot \varepsilon)^{\frac{1}{p}}}$$

gewinnt man (analog wie den Satz Nr. 2 aus Nr. 1) aus dem eben bewiesenen Satze den folgenden:

Ist $\mathfrak{L}(x)$ vom Range p und besteht außer der Beziehung:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p \leqq g \quad (\text{wo } g \geqq 0) \tag{50}$$

noch die folgende:

$$\frac{1}{p} \cdot \overline{\lim_{n=\infty}} \left| \sum_1^n{}_\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p \right| = A \quad (\text{wo } A \geqq 0), \tag{51}$$

so hat man für jedes $\varepsilon > 0$ und $|x| > R_\varepsilon$:

$$|\mathfrak{L}(x)| < e^{(A + C_p \cdot g + \varepsilon)|x|^p}. \text{*)} \tag{52}$$

5. Faßt man den Inhalt der Sätze von Nr. 2 und Nr. 4 mit den Resultaten von § 9, Nr. 3 p. 298 zusammen, so ergibt sich, daß die Bedingung:

(a) $\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma \leqq g$ (d. h. *nicht unendlich*), bezw. (c) $\lim\limits_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma = 0$,

welche dort als *notwendig* für die Existenz einer Beziehung von der Form:

$$\text{(A)} \quad |\mathfrak{L}(x)| < e^{\gamma \cdot |x|^\sigma}, \quad \text{bezw.} \quad \text{(C)} \quad |\mathfrak{L}(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\sigma}$$

erkannt wurde, *im allgemeinen*, d. h. allemal, wenn $p < \sigma \leqq p + 1$, sich auch als *hinreichend* erweist. Die im Falle $\sigma = p \geqq 1$ noch *hinzutretende* Bedingung (s. Ungl. (51) und Fußn.), nämlich:

(a') $\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}} \left| \sum\limits_1^n{}_\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p \right| = G$ (d. h. *nicht unendlich*), bezw. (c') $\sum\limits_1^\infty{}_\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0$,

ist zwar in Verbindung mit (a) bezw. (c) gleichfalls *hinreichend* für das Zustandekommen der Beziehung (A) bezw. (C): ihre *Notwendigkeit* bleibt indessen zweifelhaft. Immerhin wird man sagen dürfen, daß sie sicherlich *nahezu* den Charakter einer *notwendigen* Bedingung besitzt oder, etwas genauer ausgedrückt, daß zum mindesten eine Bedingung *von ganz ähnlicher Art* zu der jedenfalls *notwendigen* (a) bezw. (c) hinzukommen müsse, wenn Ungl. (A) bezw. (C) für $\sigma = p$ möglich sein soll. Da nämlich

---

*) Man findet also speziell:

$$|\mathfrak{L}(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^p},$$

wenn:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p = 0$$

und:

$$\sum_1^\infty{}_\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0.$$

Vgl. P. Boutroux, Comptes rendus, T. 134 (1902), p. 83.

schon jeder einzelne Primfaktor $E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right)$ einen Beitrag von der Form $e^{\frac{1}{p}\cdot\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^p}$ liefert, so *kann* die Beziehung:

$$(\mathrm{A}') \qquad |\mathfrak{L}(x)| < e^{\gamma\cdot|x|^p}, \quad \text{bezw.} \quad (\mathrm{C}') \quad |\mathfrak{L}(x)| < e^{\varepsilon\cdot|x|^p}$$

nur dadurch zu Stande kommen, daß jene unendlich vielen Beiträge sich entweder *gegenseitig* hinlänglich kompensieren, oder daß sie *durch die Gesamtheit der Faktoren* $E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)$ in entsprechendem Maße kompensiert werden. Das *erstere* wird, da $\sum\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p$ *divergiert, ausschließlich* durch die Bedingung (a') bezw. (c') ermöglicht; ob die *zweite* Eventualität *überhaupt* eintreten kann, ist fraglich, wenn auch kaum wahrscheinlich. Aber auch wenn irgendwelche Bedingungen das Eintreten jener zweiten Eventualität nach sich ziehen könnten, so viel ist klar, daß dieselben, wegen der *Divergenz* von $\sum\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p$, *geradeso wie die Bedingung* (a') bezw. (c') *ganz wesentlich* von den *Argumenten* der a_ν (nicht bloß, wie die im allgemeinen Falle $\sigma > p$ geltenden Bedingungen von den *absoluten Beträgen*) abhängen müßten.

Fassen wir noch insbesondere den Fall der Ungleichung (C') näher ins Auge. Hier muß eine *vollständige* Kompensation der von den einzelnen Primfaktoren herrührende Beträge $e^{\frac{1}{p}\cdot\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^p}$ stattfinden. Eine solche wird, wie ja unmittelbar ersichtlich, in der Tat erzielt, wenn $\sum_1^\infty{}_\nu\left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0$ (Ungl. (a')), ob noch durch irgendwelche andere Bedingungen, bleibe wiederum dahingestellt. Jedenfalls aber müßten derartige Bedingungen, geradeso wie die Bedingung $\sum_1^\infty{}_\nu\left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0$, außer durch die bereits konstatierte Abhängigkeit von den *Argumenten* der a_ν noch durch eine *zweite spezielle Eigenschaft* sich von den gewöhnlichen Bedingungen (a) bezw. (c) unterscheiden. Während diese letzteren nämlich lediglich *infinitärer* Natur sind, also einer beliebig großen *endlichen* Anzahl der a_ν keinerlei Beschränkung auferlegen, so müßten die fraglichen Bedingungen (wie eben die Beziehung $\sum_1^\infty{}_\nu\left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0$) in geeigneter Weise *auf die Gesamtheit aller* a_ν sich erstrecken. Denn offenbar wird hier (im Gegensatze zu dem allgemeinen Fall $\sigma > p$) *jeder einzelne* Primfaktor $E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right)$ auf das Zustandekommen der Beziehung $|\mathfrak{L}(x)| < e^{\varepsilon\cdot|x|^p}$ einen derartigen Einfluß ausüben,

daß schon durch Weglassung oder Abänderung eines einzelnen Primfaktors jene Beziehung *zerstört* werden muß.

6. Wir wollen schließlich das Auftreten der Beziehung $|\mathfrak{P}(x)| < e^{\varepsilon\cdot|x|^p}$ für den Fall, daß $\mathfrak{P}(x)$ vom Range p, durch einige Beispiele illustrieren. Es sei $\sum \left|\frac{1}{b_\nu}\right|^{p+1}$ *konvergent*, $\sum \left|\frac{1}{b_\nu}\right|^p$ *divergent*, immerhin

$$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{b_\nu}\right|^p = 0\text{*})$$

$\left(\text{z. B. } b_\nu = (\nu \cdot \lg \nu)^{\frac{1}{p}} \text{ für } \nu \geqq 2,\ b_1 \text{ beliebig, etwa} = 1\right)$, sodaß also p als *Grenz*exponent (natürlich *Divergenz*exponent) erscheint. Setzt man sodann:

$$a_{2\nu-1} = b_\nu, \quad a_{2\nu} = e^{\frac{\pi i}{p}} \cdot b_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots) \tag{53}$$

oder auch im Falle eines *ungeraden* p:

$$a_{2\nu-1} = b_\nu, \qquad a_{2\nu} = -\,b_\nu, \tag{54}$$

so ist offenbar $\mathfrak{P}(x) = \prod_1^\infty{}_\nu\, E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right)$ eine ganze Funktion p^{ten} Ranges, deren Nullstellen den Bedingungen genügen:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p = 0, \qquad \sum_1^\infty{}_\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0,$$

sodaß also in der Tat für alle hinlänglich großen $|x|$: $|\mathfrak{P}(x)| < e^{\varepsilon\cdot|x|^p}$ ausfallen muß.

Ebendasselbe gilt, wenn man setzt:

$$\left.\begin{array}{llll} a_1 = b_1 & a_2 = \eta^{-1}\cdot b_1 & \cdots & a_{p+1} = \eta^{-p}\cdot b_1 \\ a_{p+2} = b_2 & a_{p+3} = \eta^{-1}\cdot b_2 & \cdots & a_{2p+2} = \eta^{-p}\cdot b_2 \end{array}\right\} \quad \text{wo: } \eta = e^{\frac{2\pi i}{p+1}},$$

allgemein:

$$a_{(p+1)\nu+\lambda+1} = \eta^{-\lambda}\cdot b_{\nu+1} \quad \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, 2, \cdots \textit{in inf.} \\ \lambda = 0, 1, \cdots, p \end{pmatrix}, \tag{55}$$

sodaß also $\left(\text{wegen: } \sum_0^p \eta^{\pm\varkappa\lambda} = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqq \varkappa \leqq p\right)$:

$$\sum_1^\infty{}_\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^\varkappa = 0 \quad \text{für} \quad \varkappa = 1, 2, \cdots, p,$$

---

*) Nimmt man in den folgenden Beispielen die b_ν so an, daß $\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{b_\nu}\right|^p = g > 0$ $\left(\text{z. B. } b_\nu = \nu^{\frac{1}{p}}\right)$, so genügen die betreffenden $\mathfrak{P}(x)$ nach Ungl. (52) nur der Beziehung:

$$|\mathfrak{P}(x)| < e^{(C_p\cdot g+\varepsilon)\cdot|x|^p}.$$

und sodann:

$$(56)\qquad \mathfrak{P}(x) = \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \prod_{0}^{p}{}_{\lambda} \left(1 - \frac{\eta^\lambda x}{b_\nu}\right) \cdot e^{\sum_{1}^{p}{}_{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{\eta^\lambda x}{a_\nu}\right)^\varkappa}$$

$$= \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{x^{p+1}}{b_\nu^{p+1}}\right) \cdot e^{\sum_{1}^{p}{}_{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa \cdot \sum_{0}^{p}{}_{\lambda} \eta^{\varkappa\lambda}}$$

$$= \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{x^{p+1}}{b_\nu^{p+1}}\right).$$

Ein derartiges $\mathfrak{P}(x)$ p^{ten} Ranges mit dem *Divergenz*exponenten p genügt dann *genau derselben* charakteristischen Relation*):

$$(\mathrm{C}') \qquad |\mathfrak{P}(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^p},$$

wie ein $\mathfrak{P}(x)$ $(p-1)^{\text{ten}}$ Ranges mit dem *Konvergenz*exponenten p: in der Tat ist ja auch in dem letzteren Falle p die *kleinste* Zahl, für welche die zur Existenz von Ungl. (C′) *notwendige* (und hier auch hinreichende) Bedingung $\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p = 0$ erfüllt ist (s. p. 295, Gl. (10)), sodaß also jede weitere Erniedrigung des in Ungl. (C′) auftretenden Exponenten p ausgeschlossen erscheint.

Im übrigen läßt gerade das Beispiel (56) deutlich erkennen, wie hier *jede einzelne* Nullstelle für das Zustandekommen der Beziehung (C′) wesentlich ist. Man setze z. B. $p = 2$, also $\eta = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ und somit:

$$(57)\quad \mathfrak{P}(x) = \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \prod_{0}^{2}{}_{\lambda} \left(1 - \frac{\eta^\lambda x}{b_\nu}\right) \cdot e^{\frac{\eta^\lambda x}{b_\nu} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\eta^\lambda x}{b_\nu}\right)^2} = \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{x^3}{b_\nu^3}\right).$$

Entfernt man jetzt aus $\mathfrak{P}(x)$ lediglich die zwei von den Nullstellen $\eta^{-1} \cdot b_1$, $\eta^{-2} \cdot b_1$ herrührenden Faktoren, so entsteht:

---

*) Das erste schon von Poincaré (a. a. O. p. 139) bemerkte und durch direkte Vergleichung mit:

$$\sin i\varepsilon x = i\varepsilon x \cdot \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 + \frac{\varepsilon^2 x^2}{\nu^2 \pi^2}\right)$$

konstatierte Beispiel dieser Art, nämlich:

$$\mathfrak{P}(x) = \prod_{2}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{x^2}{(\nu \lg \nu)^2}\right)$$

gehört offenbar den *drei* durch Gl. (53)—(55) charakterisierten Typen *gleichzeitig* an, da die definierenden Bedingungen für $p = 1$ zusammenfallen.

(58) $$\mathfrak{P}_1(x) = \left(1 - \frac{x}{b_1}\right) \cdot e^{\frac{x}{b_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{b_1}\right)^2} \cdot \prod_2^\infty{}_{\nu} \left(1 - \frac{x^3}{b_\nu^3}\right),$$

und es ergibt sich, falls man $x = -r$ (wo $r > 0$) setzt und die b_ν *reell und positiv* annimmt:

$$\mathfrak{P}_1(-r) = \left(1 + \frac{r}{b_1}\right) \cdot e^{-\frac{r}{b_1} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{r}{b_1}\right)^2} \cdot \prod_2^\infty{}_{\nu} \left(1 + \frac{r^3}{b_\nu^3}\right),$$

(59) $$> e^{\left(\frac{1}{2b_1} - \frac{1}{r}\right)\cdot \frac{1}{b_1}\cdot r^2}, \qquad \text{für } \textit{jedes } r > 0,$$
$$> e^{\left(\frac{1}{2b_1^2} - \varepsilon\right)\cdot r^2}, \qquad \text{für } r > \frac{b_1}{\varepsilon}.$$

§ 12.

Zusammenhang zwischen Ordnung, Rang und Grenzexponent einer primitiven Funktion.

1. Bedeutet wiederum $\varrho \geqq 0$ den *Grenzexponenten* von $\mathfrak{P}(x)$*), sodaß also zum mindesten für jedes noch so kleine $\delta > 0$ die Beziehung besteht:

(60) $$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a}\right|^{\varrho+\delta} = 0, \quad (\text{s. p. 294, Gl. (8)}),$$

so folgt aus dem Hauptsatze § 11, Nr. 2 (p. 306), daß *für alle hinlänglich großen x:*

(61) $$|\mathfrak{P}(x)| < e^{\varepsilon\cdot|x|^{\varrho+\delta}},$$
$$< e^{|x|^{\varrho+\delta}}\text{**)}.$$

*) Dabei mag jetzt unter $\mathfrak{P}(x)$ eine Funktion verstanden werden, die sich von der bisher so bezeichneten eventuell noch um einen Faktor x^k (k eine natürliche Zahl) unterscheidet (vgl. p. 301, Fußn. 2), also allgemein:

$$\mathfrak{P}(x) = x^k \cdot \prod_1^\infty{}_{\nu} E_\nu\left(\frac{x}{a_\nu}\right), \qquad (k \geqq 0).$$

**) Man bemerke, daß die *zweite* dieser Ungleichungen *nicht mehr und nicht weniger* aussagt, als die *erste*. Das erstere ist ohne weiteres klar, denn die *zweite* Ungleichung besteht *a fortiori*, wenn die *erste* erfüllt ist. Aber auch *umgekehrt:* besteht Ungl. (61) für jedes $\delta > 0$, so hat man für hinlänglich große x auch:

$$|\mathfrak{P}(x)| < e^{|x|^{\varrho+\frac{1}{2}\delta}} = e^{\left|\frac{1}{x}\right|^{\frac{\delta}{2}}\cdot|x|^{\varrho+\delta}},$$

und kann sodann bei beliebig klein vorgeschriebenem $\delta > 0$ durch eventuelle Vergrößerung von $|x|$ stets erzielen, daß:

$$\left|\frac{1}{x}\right|^{\frac{\delta}{2}} \leqq \varepsilon, \quad \text{also schließlich: } |\mathfrak{P}(x)| < e^{\varepsilon\cdot|x|^{\varrho+\delta}}.$$

Hieraus ergibt sich aber, daß für die *Ordnung* α von $\mathfrak{P}(x)$ die Beziehung besteht:

(62) $$\alpha \leqq \varrho,$$

wie bereits am Schlusse von § 9 (p. 298) angekündigt wurde. Durch Kombination dieses Resultates mit dem dort abgeleiteten findet man also, daß geradezu:

(63) $$\varrho = \alpha$$

sein muß, in Worten:

Eine primitive Funktion von der Ordnung α ist auch vom Grenzexponenten $\varrho = \alpha$ und umgekehrt).*

Gehört $\mathfrak{P}(x)$ dem *Normal*- bezw. dem *Minimal*typus der Ordnung α an**), so genügen die Nullstellen a_ν nicht nur der Beziehung (60), sondern der engeren (s. p. 298, Gl. (a) und (c)):

(64) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha} \leqq g, \quad (\text{wo } g \textit{ endlich}),$$

(65) bezw. $$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha} = 0.$$

Ist *α keine ganze Zahl*, so läßt sich die Beziehung (64) durch die etwas präzisere:

(64a) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha} = g > 0$$

ersetzen. Denn unter Voraussetzung eines nicht-ganzzahligen α würde aus $g = 0$, d. h. aus der Existenz der Beziehung (65) nach dem Hauptsatze § 11, Nr. 2 (p. 306), allemal folgen, daß $\mathfrak{P}(x)$ dem *Minimal*typus angehört. Man kann dieses Resultat auch folgendermaßen aussprechen:

*Ist $\alpha > 0$ keine ganze Zahl, so bildet die Gleichung (64a) bezw. (65) die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\mathfrak{P}(x)$ dem Normal- bezw. Minimaltypus angehört***).*

---

*) Dies gilt offenbar auch noch für $\alpha = 0$ (vgl. die Bemerkung p. 263, Absatz 1 am Ende). Man gewinnt also Funktionen *nullter* Ordnung, wenn man die a_ν so wählt, daß 0 als Grenzexponent erscheint, d. h. daß $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varepsilon}$ für jedes $\varepsilon > 0$ *konvergiert*, z. B. $\frac{1}{a_\nu} = q^\nu$, wo $|q| < 1$. (Über das Vorkommen derartiger Produkte bei Euler, Jacobi, Cauchy vgl. Encyklop. d. math. Wiss. I, p. 116, 117).

**) Hier ist unter α *stets* eine Zahl > 0 zu verstehen.

***) Daraus folgt noch, daß die Bedingung:

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha} = \infty$$

als *notwendig und hinreichend* erscheint für die Zugehörigkeit von $\mathfrak{P}(x)$ zum *Maximal*typus.

Ist dagegen α *eine ganze Zahl* und $\mathfrak{L}(x)$ gehört dem *Normal*typus an, so hat es bei Ungl. (64) sein Bewenden, d. h. es kann hier der betreffende Grenzwert eventuell auch *verschwinden*, sodaß also schließlich Gl. (65) besteht. Anders ausgesprochen: Ist α *eine ganze Zahl*, so ist die Bedingung (65) noch *keine hinreichende* für die Zugehörigkeit von $\mathfrak{L}(x)$ zum *Minimal*typus. Die letztere findet allemal dann statt, wenn α *Konvergenz*exponent ist (nach § 11, Nr. 2, Hauptsatz); dagegen nur mit der Zusatzbedingung $\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^\alpha = 0$ (§ 11, Nr. 4, p. 311), möglicher-, wenn auch nicht wahrscheinlicherweise noch unter anderen geeigneten Spezialbedingungen (vgl. § 11, Nr. 5 am Ende), wenn α *Divergenz*exponent ist.

Ebensowenig bildet Gl. (64a) oder sogar (65) im Falle eines *ganzzahligen* α eine *hinreichende* Bedingung für die Zugehörigkeit von $\mathfrak{L}(x)$ zum *Normal*typus: hier muß noch die Zusatzbedingung $\overline{\lim_{n=\infty}} \left| \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^\alpha \right| = G$ (und zwar $G \geqq 0$, falls (64a) besteht; $G > 0$, falls (65) besteht) hinzukommen (§ 11, Nr. 4, 5)*).

2. Da zwischen dem *Range* p und dem *Grenzexponenten* ϱ von $\mathfrak{L}(x)$ bezw. der damit nunmehr als identisch erkannten *Ordnung* α die Beziehung besteht:

$$p \leqq \alpha \leqq p + 1, \quad \text{(p. 293, Fußn. 2)},$$

so ergibt sich, falls α weder *Null*, noch *ganzzahlig*, daß:

$$p = [\alpha], \tag{66a}$$

wo $[\alpha]$ die *größte* in α enthaltene *ganze Zahl*, bezw. im Falle $\alpha < 1$ die *Null* bezeichnet. Ist α eine *ganze Zahl* und gehört $\mathfrak{L}(x)$ *nicht* dem *Minimal*typus an, so erscheint die *Konvergenz* von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\alpha$ definitiv *ausgeschlossen*, sodaß also auch noch in diesem Falle:

$$p = \alpha \equiv [\alpha]. \tag{66b}$$

Gehört dagegen (bei *ganzzahligem* α) $\mathfrak{L}(x)$ dem *Minimal*typus an, so wird, nach dem in § 11, Nr. 5 gesagten, *in der Regel* α *Konvergenz*exponent und daher

$$p = [\alpha] - 1 \tag{66c}$$

sein. Nur in *besonderen Fällen*, nämlich bei *ganz spezieller Verteilung* der

---

*) Hieraus erklärt sich z. B., warum $\sin\frac{\pi x}{2}$, $\cos\frac{\pi x}{2}$ dem *Normal*typus der Ordnung 1 angehören, dagegen $(\Gamma(x))^{-1}$ dem *Maximal*typus, obschon für alle drei Funktionen: $\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right| = 1$.

a_ν, ins besondere, wenn $\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left(\frac{1}{a_\nu}\right)^\alpha = 0$, ist die betreffende Voraussetzung mit der *Divergenz* von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\alpha$ vereinbar, sodaß dann also wiederum p durch Gl. (66b) sich bestimmt.

Will man umgekehrt vom *Range* p auf die *Ordnung* bezw. den *Ordnungstypus* von $\mathfrak{P}(x)$ schließen, so läßt sich auf Grund der obigen Resultate folgendes aussagen: Eine primitive Funktion $\mathfrak{P}(x)$ vom *Range* p ist *höchstens* vom *Minimal*typus $(p+1)$, *mindestens* vom *Minimal*typus (p). Dabei gehören dem *Minimal*typus $(p+1)$ tatsächlich *alle* diejenigen $\mathfrak{P}(x)$ an, für welche $p+1$ *Konvergenz*exponent ist; dagegen dem *Minimal*typus (p) überhaupt nur solche $\mathfrak{P}(x)$, für welche p *Divergenz*exponent ist und zugleich die a_ν der *infinitären* Relation $\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p = 0$ (anders geschrieben: $|a_\nu| \succ \nu^{\frac{1}{p}}$), sowie *ganz speziellen, auf jedes einzelne* a_ν *sich erstreckenden Bedingungen* $\left(\text{ins besondere: } \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0\right)$ genügen.

IV. Ganze Funktionen von endlicher Höhe.

§ 13.

Definition der ganzen Funktion von endlicher Höhe. — Endlichkeit ihrer Ordnung.

1. Ist:

(1) $$G(x) = e^{g(x)} \cdot \mathfrak{P}(x),$$

wo $G(x)$ eine ganze rationale Funktion vom *Grade* q*), $\mathfrak{P}(x)$ eine primitive Funktion vom *Range* p, und bedeutet h die *größere* der beiden Zahlen p und q, bezw. *jede* der beiden Zahlen p und q, falls $p = q$, so soll h die *Höhe***) von $G(x)$, $G(x)$ selbst eine ganze Funktion von *end-*

---

*) Zur Abkürzung werde ich gelegentlich diese Zahl q schlechthin als den „*Grad*" von $G(x)$ bezeichnen.

**) Die Bezeichnung „*Höhe*" zur Verdeutschung des von E. Laguerre (Oeuvres compl. 1, p. 167) eingeführten Begriffes „*genre*" wurde von H. von Schaper (a. a. O. p. 24) vorgeschlagen, da die wörtliche Übersetzung „*Geschlecht*" seit Clebsch und Riemann bereits eine andere typische Bedeutung in der Funktionenlehre gewonnen hat. Manche Autoren (z. B. O. Biermann, Theorie der analyt. Funktionen, p. 320) bedienen sich dafür des (von mir in etwas anderem Sinne gebrauchten) Ausdruckes „*Rang*" (analog auch „*rango*" bei G. Vivanti, Teoria delle funzioni analitiche, p. 179).

licher Höhe h heißen. Reduziert sich $g(x)$ auf eine Konstante, bezw. $\mathfrak{L}(x)$ auf die Einheit oder eine rationale ganze Funktion, so fällt also der Begriff der *Höhe* mit demjenigen des *Ranges* p von $\mathfrak{L}(x)$ bezw. des *Grades* q von $g(x)$ zusammen.

Man erkennt leicht, daß jede ganze Funktion von *endlicher Höhe* auch von *endlicher Ordnung* sein muß. Es gilt nämlich offenbar der allgemeine Satz:

*Ist $G_1(x)$ von der Ordnung α_1, $G_2(x)$ von der Ordnung $\alpha_2 \geqq \alpha_1$, so ist $G(x) \equiv G_1(x) \cdot G_2(x)$ **höchstens** von der Ordnung α_2*).*

Denn aus der Voraussetzung folgt, daß für jedes $\delta > 0$ und $|x| > R_\delta$:

$$(2) \qquad |G_1(x)| < e^{|x|^{\alpha_1 + \frac{1}{2}\delta}}, \quad |G_2(x)| < e^{|x|^{\alpha_2 + \frac{1}{2}\delta}},$$

und daher, wegen $\alpha_1 < \alpha_2$:

$$(3) \qquad |G(x)| < e^{2 \cdot |x|^{\alpha_2 + \frac{1}{2}\delta}} < e^{|x|^{\alpha_2 + \delta}},$$

woraus die Richtigkeit der fraglichen Behauptung unmittelbar hervorgeht.

2. Der eben ausgesprochene Satz läßt sich aber noch weiter dahin präzisieren, daß $G_1(x) \cdot G_2(x)$ mit Ausnahme eines *einzigen* ganz speziellen Falles *genau* von der Ordnung α_2 sein muß.

Angenommen, man habe zunächst:

$$(4) \qquad G(x) = e^{g_1(x)} \cdot e^{g_2(x)} = e^{g_1(x) + g_2(x)},$$

wo $g_1(x) = \sum_0^{q_1} a_\nu x^\nu$, $g_2(x) = \sum_0^{q_2} b_\nu x^\nu$ und $q_2 \geqq q_1$, so ist offenbar $g_1(x) + g_2(x)$ allemal vom *Grade* q_2, also $G(x)$ von der *Ordnung* q_2 (s. § 5), *außer wenn: $q_2 = q_1$ und zugleich: $b_{q_2} = -a_{q_1}$*. Alsdann findet in der Tat eine *Erniedrigung* der *Ordnung* von $G(x)$ statt, und zwar ist, wie sich zeigen wird, dieser Fall auch der *einzige* dieser Art.

Hat man ferner:

$$(5) \qquad G(x) = \mathfrak{L}_1(x) \cdot \mathfrak{L}_2(x),$$

wo $\mathfrak{L}_1(x)$, $\mathfrak{L}_2(x)$ primitive Funktionen mit den Grenzexponenten ϱ_1 und $\varrho_2 \geqq \varrho_1$, so hat offenbar $G(x)$ unter allen Umständen den Grenzexponenten ϱ_2, also auch die Ordnungszahl ϱ_2.

---

*) Der analoge Satz gilt offenbar für $G(x) = G_1(x) \pm G_2(x)$ mit dem Zusatze, daß im Falle $\alpha_2 > \alpha_1$ $G(x)$ nicht nur *höchstens*, sondern *genau* von der Ordnung α_2 ist.

Es bleibt noch der Fall zu betrachten:

$$G(x) = e^{g(x)} \cdot \mathfrak{L}(x), \tag{6}$$

wo $g(x)$ eine ganze rationale Funktion vom Grade q, $\mathfrak{L}(x)$ eine primitive Funktion vom Grenzexponenten ϱ. Ist hierbei $q \geqq \varrho$, so hat man nach Nr. 1, wenn α die Ordnung von $G(x)$ bezeichnet:

$$\alpha \leqq \varrho.$$

Andererseits hat man nach dem letzten Satze von § 9, Nr. 3 (p. 298):

$$\alpha \geqq \varrho,$$

sodaß sich also schließlich

$$\alpha = \varrho \tag{7}$$

ergibt.

Diese Schlußweise versagt jedoch im Falle $q > \varrho$. Hier folgt aus Nr. 1 nur soviel, daß:

$$\alpha \leqq q$$

sein muß. Um aber zu erschließen, daß geradezu:

$$\alpha = q,$$

müßte erst feststehen, daß der Faktor $\mathfrak{L}(x)$ nicht etwa eine *Erniedrigung* der von dem Faktor $e^{g(x)}$ herrührenden Ordnungszahl q herbeiführen kann. Hierzu bedarf man aber einer für $|\mathfrak{L}(x)|$ in geeignetem Umfange gültigen *unteren* Schranke bezw. einer *oberen* Schranke für $|\mathfrak{L}(x)^{-1}|$, deren Existenz nunmehr zunächst festgestellt werden soll.

§ 14.

Existenz einer auf beliebig großen Kreisen gültigen oberen Schranke für den reziproken Wert einer primitiven Funktion.

Satz. *Konvergiert* $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma$ *für irgend ein* $\sigma \leqq 1$, *sodaß also*

$$\mathfrak{L}(x) \equiv \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \tag{1}$$

eine primitive Funktion vom Range 0 *darstellt, so gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *unendlich viele beliebig große r, derart, daß*

$$|\mathfrak{L}(x)^{-1}| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\sigma} \tag{2}$$

für alle x mit den absoluten Beträgen x (also, geometrisch gesprochen, auf unendlich vielen Kreisen mit beliebig großem Radius r).

Beweis. Infolge der Konvergenz von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma$ hat man zunächst:

(3a) $$\lim_{\nu=\infty} \frac{\nu}{|a_\nu|^\sigma} = 0,\qquad (3\text{b})\quad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \frac{\nu\cdot\lg\nu}{|a_\nu|^\sigma} = 0^{*)}.$$

Nun besteht die Identität:

$$\frac{\nu\cdot\lg|a_\nu|}{|a_\nu|^\sigma} = \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{\nu\cdot\lg\left(\frac{|a_\nu|^\sigma}{\nu}\cdot\nu\right)}{|a_\nu|^\sigma},$$

$$= \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{\lg\frac{|a_\nu|^\sigma}{\nu}}{\frac{|a_\nu^\sigma|}{\nu}} + \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{\nu\cdot\lg\nu}{|a_\nu|^\sigma},$$

sodaß sich mit Berücksichtigung von (3a), (3b) ergibt:

(4) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \frac{\nu\cdot\lg|a_\nu|}{|a_\nu|^\sigma} = 0.$$

Wird also $\delta > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so gibt es eine unbegrenzte Folge natürlicher Zahlen $n_\lambda\ (\lambda = 1, 2, 3, \cdots)$ von *der* Beschaffenheit, daß:

(5) $$\frac{n_\lambda\cdot\lg|a_{n_\lambda}|}{|a_{n_\lambda}|^\sigma} < \delta.$$

Ferner folgt aus (3a), daß (wegen: $\sigma \leqq 1$) in jedem Falle:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{\nu}\cdot|a_\nu| = \infty.$$

Es läßt sich also eine positive ganze Zahl m_1 so fixieren, daß:

$$|a_\mu| > 8\mu,\quad \text{für } \mu \geqq m_1,$$

und daher:

(6) $$\frac{1}{2}\cdot|a_\mu| - \frac{1}{4}\cdot|a_\mu| > 2\mu,\quad \text{für } \mu \geqq m_1.$$

Da $|a_{\mu+1}| \geqq |a_\mu| > \frac{1}{2}\cdot|a_\mu|$, so können *höchstens* $|a_1|, |a_2|, \cdots |a_{\mu-1}|$ *unterhalb* $\frac{1}{2}\cdot|a_\mu|$ liegen, und um so mehr können *höchstens* diese $\mu-1$ Zahlen

*) Aus

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \frac{\nu\cdot\lg\nu}{|a_\nu|^\sigma} = c > 0$$

würde nämlich folgen, daß für beliebig kleines $\varepsilon > 0$ und alle hinlänglich großen ν:

$$\frac{\nu\cdot\lg\nu}{|a_\nu|^\sigma} > c - \varepsilon,$$

sodaß also $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma$ *divergieren* müßte.

in das Innere des Zahlintervalls $\left(\frac{1}{4}\,|a_\mu|,\ \frac{1}{2}\,|a_\mu|\right)$ fallen, sodaß also dieses Intervall auf solche Weise in *höchstens* μ *Teilintervalle* zerlegt wird. Da die *Summe* dieser letzteren nach Ungl. (6) *größer als* 2μ ist, so muß also *mindestens ein* Teilintervall *größer als* 2 sein. Bedeutet daher r die *in der Mitte* oder auch nur eine *in hinlänglicher Nachbarschaft* der Mitte jenes Teilintervalls liegende Zahl, so enthält das Intervall $(r-1,\ r+1)$, einschließlich seiner Grenzen, *keine einzige* der Zahlen $|a_\nu|$, sodaß also:

$$(7)\quad \frac{1}{4}\,|a_\mu| < r < \frac{1}{2}\,|a_\mu| \quad \textit{und zugleich:} \quad \big|\,|a_\nu| - r\,\big| > 1 \quad \textit{für jedes } \nu.$$

Da hierbei μ nach Ungl. (6) lediglich an die Bedingung $\mu \geqq m_1$ geknüpft ist, so erkennt man, daß es *unendlich viele* und insbesondere auch *beliebig große* Zahlen r der bezeichneten Art gibt.

Schließlich läßt sich wegen der Konvergenz von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma$ eine natürliche Zahl m_2 so annehmen, daß:

$$(8)\qquad \sum_{m_2+1}^{\infty}{}_{\nu} \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma < \delta.$$

Bedeutet jetzt n irgend eine *der Reihe der Zahlen* n_λ *angehörige* Zahl, die zugleich den Bedingungen genügt:

$$n \begin{cases} \geqq m_1, \\ \geqq m_2, \end{cases}$$

so bestehen die Beziehungen (5), (7), (8) *gleichzeitig*, wenn man die daselbst mit n_λ, μ, m_2 bezeichneten Zahlen durch n ersetzt. Dabei steht es offenbar frei, ein auf obige Weise ausgewähltes n auch durch *jede größere* der Reihe der n_λ angehörige Zahl zu ersetzen und damit auch r *unbegrenzt zu vergrößern.* Man hat also für *unendlich viele* n bezw. *beliebig große* r:

$$(9)\quad \begin{cases} \text{(a)} & n \cdot \lg|a_n| < \delta \cdot |a_n|^\sigma, \\ \text{(b)} & \frac{1}{4}\,|a_n| < r < \frac{1}{2}\,|a_n| \ \text{und zugleich: (c)} \ \big|\,|a_\nu| - r\,\big| > 1 \ \text{für } \textit{jedes } \nu. \\ \text{(d)} & \sum_{n+1}^{\infty}{}_{\nu} \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma < \delta. \end{cases}$$

Wir zerlegen nun $\mathfrak{L}(x)^{-1}$ in die beiden Teilprodukte:

$$(10)\qquad \mathfrak{L}(x)^{-1} = \prod_{1}^{n}{}_{\nu} \frac{a_\nu}{a_\nu - x} \cdot \prod_{n+1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{a_\nu}{a_\nu - x}.$$

Für das *erste* derselben ergibt sich alsdann, wenn $|x| = r$ gesetzt wird:

$$\left|\prod_1^n{}_\nu \frac{a_\nu}{a_\nu - x}\right| \leqq \prod_1^n{}_\nu \frac{|a_\nu|}{||a_\nu| - r|} < \prod_1^n{}_\nu |a_\nu|, \quad \text{(nach Ungl. (9c))},$$

$$\leqq |a_n|^n = e^{n \cdot \lg |a_n|},$$

$$< e^{\delta \cdot |a_n|^\sigma}, \quad \text{(nach Ungl. (9a))},$$

(11) $$< e^{4^\sigma \delta . r^\sigma}, \quad \text{(nach Ungl. (9b))}.$$

Zur Abschätzung des *zweiten* Teilprodukts hat man zunächst:

$$\left|\prod_{n+1}^\infty{}_\nu \frac{a_\nu}{a_\nu - x}\right| = \left|\prod_{n+1}^\infty{}_\nu \left(1 + \frac{x}{a_\nu - x}\right)\right| \leqq \prod_{n+1}^\infty{}_\nu \left(1 + \frac{r}{||a_\nu| - r|}\right).$$

Da hier, wegen $\nu > n$, auf Grund von Ungl. (10b) durchweg $|a_\nu| > 2r$, so folgt weiter:

$$\frac{r}{||a_\nu| - r|} = \frac{r}{|a_\nu| - r} = \frac{1}{1 - \frac{r}{|a_\nu|}} \cdot \frac{r}{|a_\nu|},$$

$$< 2 \cdot \frac{r}{|a_\nu|}, \quad \left(\text{wegen: } \frac{r}{|a_\nu|} < \frac{1}{2},\ 1 - \frac{r}{|a_\nu|} > \frac{1}{2}\right),$$

$$\leqq 2 \cdot \left(\frac{r}{|a_\nu|}\right)^\sigma, \quad \left(\text{wegen: } \frac{r}{|a_\nu|} < 1,\ \sigma \leqq 1\right),$$

und daher:

$$\left|\prod_{n+1}^\infty{}_\nu \frac{a_\nu}{a_\nu - x}\right| < \prod_{n+1}^\infty{}_\nu \left(1 + 2 \cdot \left(\frac{r}{|a_\nu|}\right)^\sigma\right) < e^{2 r^\sigma \cdot \sum_{n+1}^\infty{}_\nu \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma},$$

(12) $$< e^{2\delta \cdot r^\sigma}, \quad \text{(nach Ungl. (10d)}.$$

Durch Zusammenfassung der Resultate (11) und (12) ergibst sich somit:

(13) $$|\mathfrak{L}(x)|^{-1}| < e^{(4^\sigma + 2)\delta \cdot r^\sigma}, \quad \text{für } |x| = r.$$

Wird also δ zu beliebig klein vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$ so fixiert, daß:

$$(4^\sigma + 2) \cdot \delta \leqq \varepsilon,$$

so findet man schließlich, wie unter (2) behauptet:

$$|\mathfrak{L}(x)^{-1}| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\sigma}, \quad \text{für } |x| = r.$$

2. Der eben bewiesene Satz gestattet sofort die folgende Übertragung auf primitive Funktionen von beliebigem Range p:

Konvergiert $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma$ *für irgend ein* σ *des Intervalls* $p < \sigma \leqq p + 1$, *sodaß also:*

(14) $$\mathfrak{L}(x) \equiv \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{\sum_1^p{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa}$$

eine primitive Funktion vom Range p darstellt, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele beliebig große r, derart, daß:

(15) $$|\mathfrak{P}(x)^{-1}| < e^{\varepsilon\cdot|x|^\sigma}$$

*für alle x mit den absoluten Beträgen r**).

Beweis. Bezeichnet man mit η eine primitive $(p+1)^{\text{te}}$ Einheitswurzel, etwa:

$$\eta = e^{\frac{2\pi i}{p+1}},$$

so ergibt sich (vgl. p. 314, Gl. (56)):

$$\prod_{\lambda=0}^{p} \mathfrak{P}(\eta^\lambda x) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(\prod_{\lambda=0}^{p}\left(1-\frac{\eta^\lambda x}{a_\nu}\right)\cdot e^{\sum_{\varkappa=1}^{p}\frac{1}{\varkappa}\cdot\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa\cdot\sum_{\lambda=0}^{p}\eta^{\varkappa\lambda}}\right)$$

(16) $$= \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^{p+1}}{a_\nu^{p+1}}\right).$$

Setzt man sodann:

(17) $$\prod_{\lambda=0}^{p} \mathfrak{P}(\eta^\lambda x) = \Pi(x), \quad \prod_{\lambda=1}^{p} \mathfrak{P}(\eta^\lambda x) = \Pi_1 x),$$

so wird zunächst:

(18) $$\mathfrak{P}(x)^{-1} = \Pi(x)^{-1}\cdot\Pi_1(x).$$

Transformiert man ferner $\Pi(x)$ durch die Substitution:

(19) $$x^{p+1} = y, \qquad a_\nu^{p+1} = b_\nu$$

in eine Funktion von y:

(20) $$\Pi(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{y}{b_\nu}\right),$$

also eine primitive Funktion vom Range 0, und berücksichtigt, daß $\sum\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma = \sum\left|\frac{1}{b_\nu}\right|^{\frac{\sigma}{p+1}}$ auf Grund der Voraussetzung *konvergiert*, so folgt

---

*) Der Satz rührt im wesentlichen von Hadamard her (a. a. O. p. 204). Doch beweist H. nur, daß unter den gemachten Voraussetzungen:

$$|\mathfrak{P}(x)^{-1}| < e^{|x|^{\sigma+\delta}}.$$

Die hier gegebene schärfere Fassung stammt von Lindelöf (a. a. O. p. 11). Die Verwertung der schon von Laguerre bemerkten und zu analogen Zwecken benützten Relation (16), um den Beweis in der Hauptsache auf den Fall $p = 0$ zu reduzieren, findet sich bei Borel a. a. O. p. 76 (vgl. auch ebendas. p. 27).

aus dem eben bewiesenen Satze, daß für jedes $\varepsilon > 0$ und *unendlich viele*, auch *beliebig große* R eine Beziehung von der Form besteht:

$$(21)\qquad |\Pi(x)^{-1}| < e^{\frac{\varepsilon}{2}\cdot|y|^{\frac{\sigma}{p+1}}},\ \text{für } alle\ y \text{ mit dem absoluten Betrage } |y| = R.$$

Führt man wieder x^{p+1} an Stelle von y ein und setzt $R^{\frac{1}{p+1}} = r$, so findet man also:

$$(22)\qquad |\Pi(x)^{-1}| < e^{\frac{\varepsilon}{2}\cdot|x|^{\sigma}},\ \text{für } alle\ x \text{ mit dem absoluten Betrage } |x| = r.$$

Andererseits hat man, wegen $\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\sigma} = 0$, nach dem Hauptsatze von § 11, Nr. 2 (s. p. 306, Fußnote), wenn man die dort mit ε bezeichnete Zahl durch $\frac{\varepsilon}{2p}$ ersetzt:

$$|\mathfrak{L}(\eta^{\lambda}x)| < e^{\frac{\varepsilon}{2p}\cdot|x|^{\sigma}},\ \text{für } alle\ |x| > R_{\varepsilon},$$

also:

$$(23)\qquad |\Pi_1(x)| < e^{\frac{\varepsilon}{2}\cdot|x|^{\sigma}},\ \text{für } alle\ |x| > R_{\varepsilon},$$

und schließlich durch Zusammenfassung von (18), (22), (23):

$$(24)\qquad |\mathfrak{L}(x)^{-1}| < e^{\varepsilon\cdot|x|^{\sigma}},\ \text{für } alle\ |x| = r \text{ und } r > R_{\varepsilon}.$$

3. Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, daß das vorstehende Resultat wiederum keine Änderung erleidet, wenn $\mathfrak{L}(x)$ noch einen Faktor von der Form $x^k (k \geqq 1)$ enthält: in diesem Falle muß nämlich, sobald nur $|x| > 1$ ist, die Ungleichung (24) *a fortiori* bestehen, sobald sie *ohne* Hinzunahme jenes Faktors richtig war.

Ist ϱ *Grenzexponent* von $\mathfrak{L}(x)$, so besteht offenbar die Beziehung:

$$(25)\qquad |\mathfrak{L}(x)^{-1}| < e^{\varepsilon\cdot|x|^{\varrho}}$$

in dem angegebenen Umfange, sofern ϱ *Konvergenz*exponent ist. Wenn dies jedoch *nicht der Fall* oder zum mindesten *nicht festgestellt* ist, so erscheint nur soviel sicher, daß $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho+\delta}$ für jedes $\delta = 0$ *konvergiert* und daher für die Ungleichung (25) die folgende eintritt:

$$(26)\qquad |\mathfrak{L}(x)^{-1}| < e^{\varepsilon\cdot|x|^{\varrho+\delta}},$$

welche schließlich wegen der Möglichkeit, $\delta > 0$ unbegrenzt zu verkleinern, nicht mehr und nicht weniger aussagt*), also die folgende:

$$(27)\qquad |\mathfrak{L}(x)^{-1}| < e^{|x|^{\varrho+\delta}}$$

(für alle x auf unendlich vielen, auch *beliebig großen* Kreisen).

---

*) Vgl. die analoge Bemerkung p. 315, Fußn. 2.

§ 15.

Allgemeinste ganze Funktion von endlicher Ordnung: Zusammenhang zwischen Ordnung, Grad, Grenzexponent und Höhe. Vervollständigung des Picardschen Satzes.

1. Es sei jetzt $G(x)$ eine im übrigen beliebige ganze Funktion, von der nur soviel feststeht, daß sie von der Ordnung α (eine Voraussetzung, die ja lediglich gewisse infinitäre Eigenschaften der Taylorschen Reihenkoeffizienten erfordert, nämlich [s. p. 276, (Ia), (Ib)]:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = 0, \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{\alpha-\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \infty).$$

Bringt man $G(x)$ auf die jedenfalls mögliche Form:

$$G(x) = e^{g(x)} \cdot \mathfrak{P}(x) \tag{1}$$

(wobei sich $g(x)$ eventuell auf eine *Konstante*, $\mathfrak{P}(x)$ auf die *Einheit* oder eine *rationale ganze Funktion* reduzieren kann), so entsteht die Frage: Welche Aussagen lassen sich auf Grund der Voraussetzung, daß $G(x)$ von der Ordnung α, über den *Grad* von $g(x)$ und den *Grenzexponenten* von $\mathfrak{P}(x)$ machen?

Bezeichnet man den letzteren wiederum mit ϱ, so besteht nach dem Schlußergebnis von § 9 (p. 298) die Beziehung:

$$\varrho \leqq \alpha. \tag{2}$$

Dieses Resultat in Verbindung mit der Voraussetzung gestattet aber auch unmittelbar, einen Schluß auf den *rationalen* Charakter, bezw. den *Maximalgrad* von $g(x)$ zu ziehen. Aus (1) folgt nämlich:

$$|e^{g(x)}| = |G(x)| \cdot |\mathfrak{P}(x)^{-1}|, \tag{3}$$

und da:

$$\begin{cases} |G(x)| < e^{|x|^{\alpha+\delta}} & \text{für } \textit{alle } |x| > R_\delta, \\ |\mathfrak{P}(x)^{-1}| < e^{|x|^{\varrho+\delta}} \leqq e^{|x|^{\alpha+\delta}} & \text{für alle } |x| = r \text{ und un-} \end{cases} \tag{4}$$

endlich viele, auch *beliebig große* r, so ergibt sich:

$$|e^{g(x)}| < e^{2\cdot|x|^{\alpha+\delta}} \qquad \text{für alle } |x| = r > R_\delta \tag{5}$$

also:

$$\Re(g(x)) < 2\cdot|x|^{\alpha+\delta} \qquad \text{„ „ „ „ „ ,} \tag{6}$$

woraus nach dem Satze von § 6, Nr. 2 (s. p. 284, Ungl. (10)) resultiert, daß $g(x)$ eine *rationale* ganze Funktion, deren Grad q zunächst der Beziehung genügt:

$$q \leqq \alpha + \delta.$$

Da aber δ unbegrenzt verkleinert werden darf, so folgt schließlich, daß, in voller Analogie mit Ungl. (2), auch:

(7) $$q \leqq \alpha.$$

Der Inhalt der Ungleichungen (2) und (7) kann mit Berücksichtigung der Beziehung $p \leqq \varrho$ zunächst generell folgendermaßen ausgesprochen werden:

Jede ganze Funktion von endlicher Ordnung α ist auch von endlicher Höhe $h \leqq \alpha$.

2. Aus dem Satze von § 13, Nr. 1 (p. 319) folgt, daß α *höchstens* gleich der größeren der beiden Zahlen q und ϱ sein kann, mit anderen Worten: Es können *keinesfalls gleichzeitig* die beiden Ungleichungen:

$$q < \alpha, \qquad \varrho < \alpha$$

bestehen. Kombiniert man dieses Resultat mit der erwiesenen Existenz der Relationen (2) und (7), so folgt:

Ist $G(x) = e^{g(x)} \cdot \mathfrak{L}(x)$ von der Ordnung α, so bestehen für den Grad q von $g(x)$ und den Grenzexponenten ϱ von $\mathfrak{L}(x)$ die Beziehungen:

(8) $$q \leqq \alpha, \qquad \varrho \leqq \alpha$$

in dem Sinne, daß mindestens in einer derselben das Gleichheitszeichen gilt.

Hieraus erkennt man, daß umgekehrt die Ordnung α von

$$G(x) = e^{g(x)} \cdot \mathfrak{L}(x)$$

stets *genau* gleich der *größeren* der beiden Zahlen q und ϱ bezw. $\alpha = q = \varrho$ sein muß: das am Schlusse von § 13 (p. 320) zunächst für den Fall $q \leqq \varrho$ konstatierte Resultat gilt somit *allgemein*. Zugleich ergibt sich damit die Richtigkeit des ebendaselbst am Anfange von Nr. 2 ausgesprochenen Satzes, wonach die Ordnung von $G_1(x) \cdot G_2(x) \equiv e^{g_1(x)} \cdot \mathfrak{L}_1(x) \cdot e^{g_2(x)} \cdot \mathfrak{L}_2(x)$ mit Ausnahme eines *einzigen*, dort näher spezifizierten Falles, allemal *genau* gleich α_2 sein muß, wenn $\alpha_2 \geqq \alpha_1$ und α_1, α_2 die Ordnungszahlen von $G_1(x)$, $G_2(x)$ bedeuten.

3. Ist α *keine ganze* Zahl, so folgt, da q nur eine *ganze Zahl* oder *Null* sein kann, aus (8), daß:

(9) $$q < \alpha \quad \text{und somit:} \quad \varrho = \alpha.$$

Zugleich ist dann $p < \varrho < p + 1$ (mit *Ausschluß* jeder Gleichheit), also: $p = [\varrho] \equiv [\alpha]$. Da andererseits $q \leqq [\alpha]$, so ergibt sich für die Höhe h die unzweideutige Bestimmung:

(10) $$h = [\alpha].$$

Im übrigen läßt sich der wesentliche Inhalt der aus der bloßen Voraus-

setzung einer *nicht-ganzzahligen* Ordnung α gewonnenen Beziehung $\varrho = \alpha$ ausführlicher folgendermaßen formulieren:

Eine ganze Funktion von nicht-ganzzahliger Ordnung α besitzt stets unendlich viele Nullstellen, deren Dichtigkeit bezw. infinitäres Anwachsen durch die Relation: $\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha+\delta} = 0$ *charakterisiert wird.**)

Besonderes Interesse verdient noch der Fall $\alpha < 1$. Hier muß nach Ungl. (9) geradezu $q = 0$, außerdem $\varrho = \alpha < 1$, also auch $p = 0$ sein, d. h. $G(x)$ reduziert sich auf eine mit einem *konstanten Faktor* multiplizierte *primitive Funktion vom Range* 0, also:

*Ist $G(x)$ von einer Ordnung $\alpha < 1$**), so hat man:*

$$(11) \qquad G(x) = C \cdot x^k \cdot \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \quad \textit{und:} \quad a_\nu \succ \nu^{\frac{1}{\alpha+\delta}}.$$

Durch Substitution von x^2 an Stelle von x und eventuelle Multiplikation mit x ergibt sich hieraus noch der folgende Satz:

Ist $G(x)$ eine gerade oder ungerade Funktion von niedrigerer als der 2ten Ordnung, so ist $G(x)$, abgesehen von einem konstanten Faktor, eine primitive Funktion.

Darnach erkennt man z. B. ohne jede Rechnung, daß die Produktentwickelungen von $\sin \pi x$, $\cos \pi x$ die Form haben müssen:

$$\sin \pi x = C \cdot x \cdot \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x^2}{\nu^2}\right), \qquad \cos \pi x = C' \cdot \prod \left(1 - \frac{4x^2}{(2\nu+1)^2}\right).\text{***})$$

4. Weniger einfach sind die Ergebnisse für den Fall, daß *α eine ganze Zahl.*†)

Einen brauchbaren Anhaltspunkt zur Beurteilung von q und ϱ gibt hier der Satz von § 6, Nr. 3, wonach $e^{g(x)}$ allemal dem *Normaltypus* (q, γ) angehört; d. h. es gibt eine bestimmte Zahl $\gamma > 0$, derart daß (s. p. 286, Ungl. (21)):

$$(12) \qquad |e^{g(x)}| \begin{cases} < e^{(1+\varepsilon)\cdot\gamma\cdot|x|^q} & \text{für } \textit{alle } |x| > R_\varepsilon, \\ > e^{(1-\varepsilon)\cdot\gamma\cdot|x|^q} & \text{für } \textit{gewisse beliebig große } x \text{ und zwar für} \end{cases}$$

---

*) Der *erste* Teil des Satzes ergab sich schon § 6, Nr. 3 am Schlusse (p. 286). Das wesentlich neue liegt in dem *zweiten* Teile.

**) Der Satz gilt insbesondere auch noch für $\alpha = 0$.

***) Hadamard, a. a. O. p. 209.

†) Im Falle $\alpha = 0$ hat man offenbar $q = 0$, $\varrho = 0$, d. h. $G(x)$ ist bis auf einen konstanten Faktor eine *primitive* Funktion vom *Grenzexponenten* 0 (nicht bloß vom *Range* 0).

alle x, welche gewisse *Strahlen* $x = |x| \cdot e^{\vartheta i}$, von $|x| > R_\varepsilon$ anfangend, vollständig erfüllen (s. p. 282, Ungl. (11)).

Kombiniert man diese Ungleichungen mit den beiden folgenden*):

$$(13) \quad |\mathfrak{L}(x)| \begin{cases} < e^{|x|^{\varrho+\delta}} & \text{für } \textit{alle } |x| > R_\delta, \\ > e^{-|x|^{\varrho+\delta}} & \text{für } \textit{alle } x \text{ auf } \textit{gewissen, beliebig großen } \text{Kreisen,} \end{cases}$$

so folgt zunächst:

$$(14) \qquad |G(x)| \begin{cases} < e^{(1+\varepsilon)\cdot\gamma\cdot|x|^q + |x|^{\varrho+\delta}} & \text{für } \textit{alle hinlänglich großen } x, \\ > e^{(1-\varepsilon)\cdot\gamma\cdot|x|^q - |x|^{\varrho+\delta}} & \text{für } \textit{gewisse beliebig große } x \end{cases}$$

(nämlich diejenigen x, welche den Schnittpunkten der ad (12) und (13) genannten *Strahlen* und *Kreise* entsprechen). *Ist jetzt:* $\varrho < \alpha$, also zugleich nach (8): $q = \alpha$, so ergibt sich aus (14):

$$(15) \qquad |G(x)| \begin{cases} < e^{(1+\varepsilon')\cdot\gamma\cdot|x|^\alpha} & \text{für } \textit{alle hinlänglich großen } x, \\ > e^{(1-\varepsilon')\cdot\gamma\cdot|x|^\alpha} & \text{für } \textit{gewisse beliebig große } x, \end{cases}$$

d. h. $G(x)$ gehört in diesem Falle dem *Normaltypus* (α, γ) an, sodaß also die Koeffizienten der Potenzreihe: $G(x) = \sum_0^\infty c_\nu x^\nu$ der Relation genügen (s. p. 277, Gl. III):

$$(16) \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = (\alpha\gamma e)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{(d. h. } \textit{endlich und von Null verschieden}\text{).}$$

Hieraus gewinnt man aber sofort das folgende Resultat:

Ist $G(x)$ von ganzzahliger Ordnung α, ohne dem Normaltypus anzugehören, d. h. ohne einer Koeffizientenrelation von der Form (16) *zu genügen, so ist allemal $\varrho = \alpha$ (während für q noch der Spielraum $0 \leqq q \leqq \alpha$ bleibt).*

5. *Gehört also $G(x)$ dem Minimal- oder Maximaltypus der ganzzahligen Ordnung α an,* so besteht für den *Grenzexponenten* ϱ die Beziehung $\varrho = \alpha$ geradeso, wie im Falle eines *nicht-ganzzahligen* α. Auch

---

*) Kombiniert man die *zweite* der Ungleichungen (13) mit der folgenden (welche sich aus der ersten Ungl. (11), p. 282 ergibt, wenn man $g(x)$ durch $-g(x)$ ersetzt und zum reziproken Werte übergeht):

$$|e^{g(x)}| > e^{-(1+\varepsilon)\cdot\gamma\cdot|x|^q} \quad \text{für } \textit{alle } |x| > R_\varepsilon,$$

so folgt zunächst:

$$|G(x)| > e^{-(1+\varepsilon)\cdot\gamma\cdot|x|^q - |x|^{\varrho+\delta}}$$

und, wegen $q \leqq \alpha$, $\varrho \leqq \alpha$, schließlich:

$$|G(x)| > e^{-|x|^{\alpha+\delta'}}$$

für *alle* x auf *gewissen, beliebig großen* Kreisen. (Vgl. v. Schaper, a. a. O. p. 53).

wird hier noch $p = \alpha$ und somit $h = \alpha$, wenn ϱ *Divergenz*exponent ist, was offenbar mit Sicherheit dann eintritt, wenn $G(x)$ dem *Maximal*typus angehört (da in diesem Falle offenbar $\mathfrak{L}(x)$ diesem letzteren angehören muß). Ist dagegen ϱ *Konvergenz*exponent, so wird allemal $p = \varrho - 1 = \alpha - 1$ und daher auch $h = \alpha - 1$ *dann und nur dann*, wenn $q < \alpha$. Da in diesem Falle $\mathfrak{L}(x)$ dem *Minimal*typus (α) angehören muß (s. § 12, Nr. 1, p. 317) und, wegen $q < \alpha$, das gleiche für $G(x)$ gilt, so folgt zunächst:

Die Zugehörigkeit von $G(x)$ zum Minimaltypus (α), also die Existenz der Koeffizientenrelation (p. 277, Gl. (IIa)):

$$\lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = 0 \tag{17}$$

ist eine notwendige Bedingung dafür, daß $G(x)$ von der Höhe $h = \alpha - 1$.

Wir zeigen:

*Diese Bedingung ist auch hinreichend, sofern nur $\varrho = \alpha$ Konvergenzexponent ist.**)

Mit anderen Worten: Wenn die eben genannten Voraussetzungen erfüllt sind, so wird allemal schon von selbst $q < \alpha$. Man hat nämlich:

$$|G(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\alpha} \quad \text{für } alle\ |x| > R_\varepsilon \text{ (nach Voraussetzung)}$$

$$|\mathfrak{L}(x)^{-1}| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\alpha} \quad \text{für } alle\ |x| = r \text{ und } gewisse\ beliebig\ gro\beta e\ r$$

(nach p. 324, Ungl. (15))

und daher:

$$|e^{g(x)}| \equiv |G(x)| \cdot |\mathfrak{L}(x)^{-1}| < e^{2\varepsilon \cdot |x|^\alpha} \quad \text{für } alle\ |x| = r > R_\varepsilon, \tag{18}$$

---

*) Diese Bemerkung rührt von E. Lindelöf her, welcher zugleich auch *hinreichende* Koeffizientenbedingungen dafür angibt, daß $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\alpha$ mit Sicherheit *konvergiert* (a. a. O p. 47), z. B.:

$$\lim_{\nu=\infty} \left(\nu \cdot (\lg \nu)^{1+\sigma}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = 0,$$

allgemein:

$$\lim_{\nu=\infty} \left(\nu \cdot \lg \nu \cdot \lg_2 \nu \cdots (\lg_\varkappa \nu)^{1+\sigma}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = 0,$$

d. h. die Zahlen $\sqrt[\nu]{|c_\nu|}$ müssen einem der bekannten logarithmischen („*Bertrandschen*") Kriterien genügen, welches die *Konvergenz* von $\sum\left(\sqrt[\nu]{|c_\nu|}\right)^\alpha$ nach sich zieht. Die hiernach scheinbar nahe liegende Vermutung, daß überhaupt die *Konvergenz* von $\sum\left(\sqrt[\nu]{|c_\nu|}\right)$ sich als *hinreichend* oder gar als *notwendig und hinreichend* für die *Konvergenz* von $\sum\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\alpha$ erweisen dürfte, ist *nicht* stichhaltig, wie schon Lindelöf in hohem Grade wahrscheinlich gemacht (a. a. O. p. 79), E. Fabry (Bull. Soc. math. de Fr. 30 [1902], p. 165) wirklich bewiesen hat.

sodaß also:

(19) $\Re(g(x)) < 2\varepsilon \cdot |x|^{\alpha}$ für *alle* $|x| = r > R_{\varepsilon}$

und somit nach dem Satze von § 6, Nr. 2 (s. p. 286, Ungl. (20)), wie behauptet:

$$q < \alpha.$$

Nimmt man hierzu noch die in § 12, Nr. 2 (p. 317) gemachte Bemerkung, daß, bei ganzzahligem α und Zugehörigkeit von $\mathfrak{P}(x)$ zum *Minimal*typus, α *„in der Regel“* (in einem a. a. O. näher präzisierten Sinne) *Konvergenz*exponent sein muß, so wird man das vorliegende Resultat geradezu in folgender Weise aussprechen können:

Ist $G(x)$ von der ganzzahligen Ordnung α, so ist die Zugehörigkeit zum Minimaltypus eine notwendige und „im allgemeinen“ auch hinreichende Bedingung dafür, daß $G(x)$ die Höhe $h = \alpha - 1$ besitzt.

Gehört schließlich $G(x)$ bei ganzzahligem α dem Normaltypus an, so läßt sich *zunächst* über den Wert von ϱ *überhaupt keine definitive Aussage machen.* Natürlich muß nach dem Satze von Nr. 2 auch hier $\varrho = \alpha$ werden, falls $q < \alpha$ ist: man besitzt aber keinerlei Kriterium dafür, um eventuell diese letztere Tatsache aus der Darstellung $G(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, c_{\nu} x^{\nu}$ erschließen zu können. Ist nun aber $q = \alpha$, und setzt man wiederum $G(x) = e^{g(x)} \cdot \mathfrak{P}(x)$, so kann offenbar $\mathfrak{P}(x)$ *jeden beliebigen Grenzexponenten* $\varrho \leq \alpha$ besitzen, eventuell sich auch auf eine *rationale ganze Funktion* oder eine *Konstante* reduzieren. Nichtsdestoweniger läßt sich zeigen, daß auch hier *„im allgemeinen“* (in einem sogleich genauer zu präzisierenden Sinne): $\varrho = \alpha$ sein muß. Um die Richtigkeit dieser scheinbar *paradoxen* Behauptung einzusehen, ist es notwendig, den Begriff des *Grenzexponenten* unter einem etwas allgemeineren Gesichtspunkte, als bisher, ins Auge zu fassen.

6. Wir betrachten hierbei zunächst nochmals die bereits zuvor erledigten Fälle eines $G(x)$ von *nicht-ganzzahliger* Ordnung α, bezw. vom *Minimal-* oder *Maximal*typus einer *ganzzahligen* Ordnung α. Bedeutet dann b eine ganz beliebige komplexe Zahl, so ist $(G(x) - b)$ eine ganze Funktion von derselben *Ordnung* und auch vom nämlichen *Spezialtypus* wie $G(x)$*): daraus folgt aber, daß auch $(G(x) - b)$ *unendlich viele Null-*

*) Dies kann unmittelbar mit Hilfe der (Ordnung bezw. Spezialtypus) definierenden Ungleichungen oder noch einfacher aus dem Umstande erkannt werden, daß ja Ordnung und Spezialtypus lediglich von *infinitären* Eigenschaften der Potenzreihenkoeffizienten abhängen: vgl. § 4, Nr. 4 (p. 277).

stellen b_ν *mit dem Grenzexponenten* α besitzt, d. h. man hat (s. p. 294, Gl. (8), (9)) für jedes $\varepsilon > 0$:

$$(20) \qquad \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{b_\nu}\right|^{\alpha+\varepsilon} = 0, \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{b_\nu}\right|^{\alpha-\varepsilon} = \infty,$$

anders geschrieben:

$$(21) \qquad \begin{cases} |b_\nu| > \nu^{\frac{1}{\alpha+\varepsilon}} = \nu^{\frac{1}{\alpha}-\delta} & \text{für } \textit{alle hinlänglich großen } \nu, \\ |b_\nu| < \nu^{\frac{1}{\alpha-\varepsilon}} = \nu^{\frac{1}{\alpha}+\delta} & \text{für } \textit{unendlich viele } \nu. \end{cases}$$

Diese Ungleichungen besagen, daß die $|b_\nu|$ mit wachsendem Index ν *um so langsamer* zunehmen, die b_ν selbst also *um so dichter* liegen, je *größer* α ist, sodaß also die durchschnittliche *Häufigkeit* der b_ν in bestimmter Weise mit dem Werte von α zusammenhängt, insbesondere *gleichzeitig* mit α *zunimmt*. Wir wollen hiernach die Bezeichnung einführen, den Termen b_ν $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$ einer Zahlenfolge mit niemals abnehmenden, schließlich ins Unendliche wachsenden absoluten Beträgen, komme die *Häufigkeit* $H(\alpha)$ zu, wenn jene Folge den *Grenzexponenten* α besitzt, sodaß also $H(\alpha)$ als mit α in gewisser Weise *zunehmend* anzusehen ist. Mit Benützung dieser Ausdrucksweise läßt sich die oben bezüglich der Nullstellen von $G(x) - b$ gemachte Bemerkung jetzt folgendermaßen formulieren:

Eine ganze Funktion von nicht-ganzzahliger Ordnung α, *bezw. vom Minimal- oder Maximaltypus einer ganzzahligen Ordnung* α *nimmt geradeso, wie den Wert* 0, *auch jeden beliebigen endlichen Wert mit der Häufigkeit* $H(\alpha)$ *an: sie nimmt also jeden bestimmten Wert nicht nur unendlich oft, sondern in dem näher bezeichneten Sinne gleich oft an.*

7. Wenden wir nun die nämliche Betrachtungsweise auf eine Funktion $G(x)$ vom *Normal*typus einer *ganzzahligen* Ordnung α an, so folgt zunächst wieder, daß $(G(x) - b)$ (wo b jede beliebige Zahl einschließlich der Null bezeichnen soll) gleichfalls dem *Normal*typus der Ordnung α angehört, sodaß also über die Verteilung der Nullstellen bezw. den *Grenzexponenten* von $(G(x) - b)$ *a priori* keinerlei Aussage gemacht werden kann. Es gilt nun aber der folgende merkwürdige Satz:

Die Funktion $(G(x) - b)$ *besitzt für alle möglichen Werte von* b, *höchstens mit Ausnahme eines einzigen den Grenzexponenten* α.

---

*) Dabei bestehen wegen der Konstanz des Ordnungs*typus* für die b_ν nicht bloß die Beziehungen (20), sondern auch die für die a_ν bestehenden spezielleren Relationen, welche den betreffenden Spezialtypus charakterisieren (s. p. 298, p. 316).

Beweis. Angenommen, es sei b_0 eine solche Zahl, daß $(G(x)-b_0)$ *nicht* den Grenzexponenten α besitzt, so muß, wenn gesetzt wird:

$$G(x) - b_0 = e^{g_0(x)} \cdot \mathfrak{P}_0(x), \tag{22}$$

$\mathfrak{P}_0(x)$ von *niedrigerer* Ordnung $\alpha_0 < \alpha$ (eventuell auch eine ganze rationale Funktion oder eine von Null verschiedene Konstante) sein, während dann mit Sicherheit $e^{g_0(x)}$ von der *Ordnung* α, also $g_0(x)$ vom *Grade* α ist.

Bedeutet jetzt b *irgend eine* von b_0 verschiedene Zahl, und setzt man:

$$G(x) - b = e^{g(x)} \cdot \mathfrak{P}(x), \tag{23}$$

so ist zu zeigen, daß $\mathfrak{P}(x)$ allemal den *Grenzexponenten* α, d. h. schließlich die *Ordnungszahl* α besitzt. Das letztere ist aber sicher der Fall, wenn der *Grad* von $g(x)$ die Zahl α nicht erreicht. Somit braucht der fragliche Nachweis überhaupt nur unter der Voraussetzung geführt zu werden, daß $g(x)$ *vom Grade* α.

Aus (22), (23) folgt zunächst:

$$e^{g(x)} \cdot \mathfrak{P}(x) = e^{g_0(x)} \cdot \mathfrak{P}_0(x) + (b_0 - b). \tag{24}$$

Bringt man diese Gleichung auf die Form:

$$\mathfrak{P}(x) = e^{g_0(x)-g(x)} \cdot \mathfrak{P}_0(x) + (b_0 - b) \cdot e^{-g(x)}, \tag{25}$$

so erkennt man unmittelbar, daß der rechts stehende Ausdruck und somit auch $\mathfrak{P}(x)$ von der Ordnung α sein muß, wenn $g_0(x) - g(x)$ vom *niedrigerem* Grade, als α (Nach dem Satze über die Ordnung der *Summe* zweier Funktionen, p. 319, Fußn.).

Ist dagegen $g_0(x) - g(x)$ vom Grade α, so bilde man durch Derivation von Gl. (24):

$$e^{g(x)}(g'(x) \cdot \mathfrak{P}(x) + \mathfrak{P}'(x)) = e^{g_0(x)}(g_0'(x) \cdot \mathfrak{P}_0(x) + \mathfrak{P}_0'(x))$$

und sodann durch Multiplikation mit $e^{-g(x)}$:

$$g'(x) \cdot \mathfrak{P}(x) + \mathfrak{P}'(x) = e^{g_0(x)-g(x)}(g_0'(x) \cdot \mathfrak{P}_0(x) + \mathfrak{P}_0'(x)). \tag{26}$$

Da die Ableitung einer ganzen Funktion von der nämlichen Ordnung ist, wie diese selbst (s. § 4 am Ende, p. 280), so folgt wieder mit Benützung des Satzes über die Ordnung einer Summe, daß die rechte Seite dieser Gleichung, also auch die linke und schließlich $\mathfrak{P}(x)$ von der Ordnung α sein muß.

Somit ist, wie auch $b \neq b_0$ gewählt werden möge, $(G(x) - b)$ vom *Grenzexponenten* α.

8. Aus dem eben bewiesenen Satze folgt, daß auch eine dem *Normaltypus* der *ganzzahligen* Ordnung α angehörige ganze Funktion $G(x)$ *jeden* bestimmten Wert b mit der *Häufigkeit* $H(\alpha)$ annimmt, mit *eventueller* Ausnahme eines *einzigen* Wertes b_0, welcher dann mit *unternormaler Häufigkeit* (also mit einer *Häufigkeit* $H(\alpha')$, wo $\alpha' < \alpha$ bezw. nur *n mal* oder auch *garnicht*) angenommen wird. *Nur*, wenn gerade der *spezielle*

Fall $b_0 = 0$ eintritt (mit anderen Worten, nur, wenn das *konstante* Glied der Entwickelung $G(x) = \sum_0^\infty c_\nu x^\nu$ einen ganz *speziellen* Wert hat), wird also $G(x)$ *nicht* den Grenzexponenten α besitzen. Damit gewinnt aber schon die am Schlusse von Nr. 5 gemachte Aussage, daß auch in dem vorliegenden Falle der *Grenzexponent* von $G(x)$ *„im allgemeinen“* den Wert α habe, *einen wohldefinierten Sinn.*

Die Bedeutung jener Aussage läßt sich indessen noch ganz erheblich durch den Nachweis verschärfen, daß jener *möglicherweise* vorhandene Ausnahmewert b_0 wiederum *„im allgemeinen“ gar nicht existiert.* Es läßt sich nämlich mit denselben Hilfsmitteln, welche zum Beweise des Satzes von Nr. 7 dienten, der folgende allgemeinere Satz*) beweisen:

Es sei $G(x)$ eine ganze Funktion vom Normaltypus der ganzzahligen Ordnung α. Bedeuten ferner $\pi(x)$, $\gamma(x)$ willkürlich zu wählende ganze Funktionen von niedrigerer Ordnung, und zwar $\pi(x)$ eine primitive Funktion, die sich eventuell auch auf eine ganze rationale oder auf die Einheit reduzieren kann; $\gamma(x)$ eine im übrigen beliebige ganze Funktion, die mit $\pi(x)$ keinen Linearfaktor gemein hat, eventuell eine von Null verschiedene Konstante: dann gibt es unter allen möglichen Funktionen von der Form:

$$\mathfrak{G}(x) = \pi(x) \cdot G(x) + \gamma(x) \tag{27}$$

höchstens eine einzige, welche nicht den Grenzexponenten α besitzt.

Beweis. Man bemerke zunächst, daß offenbar $\pi(x) \cdot G(x)$, also auch $\mathfrak{G}(x)$ stets dem *Normal*typus der *Ordnung* α angehört**). Hiernach ist in der Tat die *Möglichkeit* vorhanden, daß zunächst irgend eine bestimmte unter den Funktionen $\mathfrak{G}(x)$, etwa:

---

*) Präzisere Fassung eines Borelschen Satzes: a. a. O. p. 95. Der dort gegebene Beweis enthält einen Rechenfehler, durch welchen ein Teil der Deduktion hinfällig wird. In den neuerdings von Borel publizierten *Leçons sur la théorie des fonctions méromorphes* (Paris 1903) p. 59 findet sich der Satz reproduziert: hier ist zwar jener Rechenfehler vermieden, doch sind Fassung und Beweis des Satzes unvollständig.

**) *Genauer:* Gehört $G(x)$ dem Normaltypus (γ, α) an, so gilt dasselbe auch für $\mathfrak{G}(x)$. Man hat, um dies zu erkennen, auf $\pi(x)$ außer der Ungleichung:

$$|\pi(x)| < e^{|x|^{\alpha'+\delta}} \quad \text{für} \quad |x| > R_\delta$$

(wo $\alpha' < \alpha$ die Ordnung von $\pi(x)$ bedeutet) noch die auf unendlich vielen, beliebig großen Kreisen gültige (s. p. 325, Ungl. (27)):

$$|\pi(x)| > e^{-|x|^{\alpha'+\delta}}$$

anzuwenden.

(28) $$\mathfrak{G}_0(x) = \pi_0(x) \cdot G(x) + \gamma_0(x)$$
nicht den Grenzexponenten α besitzt und daher in die Form gesetzt werden kann:

(29) $$\pi_0(x) \cdot G(x) + \gamma_0(x) = e^{g_0(x)} \cdot \mathfrak{L}_0(x),$$
wo $g_0(x)$ vom *Grade* α, $\mathfrak{L}_0(x)$ von einer *Ordnung*, die *kleiner* als α.

Versteht man jetzt unter $\pi(x)$, $\gamma(x)$ zwei beliebige der näher bezeichneten Funktionen, von denen *mindestens eine* von $\pi_0(x)$ bezw. $\gamma_0(x)$ *verschieden* ist, und setzt man:

(30) $$\pi(x) \cdot G(x) + \gamma(x) = e^{g(x)} \cdot \mathfrak{L}(x),$$
so kommt es wieder nur darauf an zu zeigen, daß $\mathfrak{L}(x)$ von der *Ordnung* α sein muß, auch wenn $g(x)$ vom *Grade* α (denn *andernfalls* ist das ja ohne weiteres ersichtlich).

Durch Elimination von $G(x)$ aus Gl. (29), (30) ergibt sich zunächst:

(31) $$e^{g(x)} \cdot \mathfrak{L}(x) \cdot \pi_0(x) = e^{g_0(x)} \cdot \mathfrak{L}_0(x) \cdot \pi(x) + \varphi(x),$$
wo:
$$\varphi(x) = \gamma_0(x) \cdot \pi(x) - \gamma(x) \cdot \pi_0(x),$$
sodaß also $\varphi(x)$ keinesfalls identisch verschwinden kann. Denn aus:
$$\gamma_0(x) \cdot \pi(x) - \gamma(x) \cdot \pi_0(x) \equiv 0$$
würde folgen, daß jeder Linearfaktor von $\pi(x)$ in $\gamma(x) \cdot \pi_0(x)$, also schließlich in $\pi_0(x)$ enthalten sein müßte und umgekehrt. Da aber die Natur dieser Linearfaktoren auch die Form der in $\pi(x)$ bezw. $\pi_0(x)$ etwa vorkommenden Exponentialfaktoren völlig eindeutig bestimmt, so hätte man hiernach geradezu: $\pi(x) \equiv \pi_0(x)$ und somit auch $\gamma(x) \equiv \gamma_0(x)$, was der Voraussetzung widerspricht.

Bringt man nun Gl. (31) auf die Form:

(32) $$\mathfrak{L}(x) \cdot \pi_0(x) = e^{g_0(x) - g(x)} \cdot \mathfrak{L}_0(x) + e^{-g(x)} \cdot \varphi(x),$$
so erkennt man zunächst wieder ohne weiteres, daß der rechts stehende Ausdruck, also schließlich auch $\mathfrak{L}(x)$, von der Ordnung α, wenn $g_0(x) - g(x)$ von *niedrigerem* Grade als α.

Es bleibt also nur noch der Fall zu behandeln, daß $g_0(x) - g(x)$ vom Grade α. Führt man die Abkürzungen ein:

(33) $$\mathfrak{L}(x) \cdot \pi_0(x) = \Pi(x), \qquad \mathfrak{L}_0(x) \cdot \pi(x) = \Pi_0(x),$$
sodaß also Gl. (31) in die folgende übergeht:

(34) $$e^{g(x)} \cdot \Pi(x) = e^{g_0(x)} \cdot \Pi_0(x) + \varphi(x),$$
so folgt durch Derivation:

(35) $$e^{g(x)}(g'(x) \cdot \Pi(x) + \Pi'(x)) = e^{g_0(x)}(g_0'(x) \cdot \Pi_0(x) + \Pi_0'(x)) + \varphi'(x).$$

Sollte hierbei $\varphi'(x) \equiv 0$ sein (was nicht ausgeschlossen erscheint), so findet man:

(36) $$g'(x) \cdot \Pi(x) + \Pi'(x) = e^{g_0(x) - g(x)} \cdot (g_0'(x) \cdot \Pi_0(x) + \Pi_0'(x))$$

und da der erste Faktor rechts von der Ordnung α, der zweite von niedrigerer Ordnung, so folgt zunächst, daß der links stehende Ausdruck, somit auch $\Pi(x)$ und schließlich (mit Rücksicht auf Gl. (33)) auch $\mathfrak{T}(x)$ von der Ordnung α.

Wenn dagegen $\varphi'(x)$ *nicht* identisch verschwindet, so multipliziere man Gl. (34) mit $\varphi'(x)$, Gl. (35) mit $\varphi(x)$ und bilde durch Subtraktion und Multiplikation mit $e^{-g(x)}$:

$$(37)\qquad \begin{aligned} & g'(x)\cdot\varphi(x)\cdot\Pi(x)+\varphi(x)\cdot\Pi'(x)-\varphi'(x)\cdot\Pi(x) \\ & = e^{g_0(x)-g(x)}(g_0'(x)\cdot\varphi(x)\cdot\Pi_0(x)+\varphi(x)\cdot\Pi_0'(x)-\varphi'(x)\cdot\Pi_0(x)), \end{aligned}$$

woraus sofort wieder folgt, daß die linke Seite, also schließlich $\mathfrak{T}(x)$ von der Ordnung α, sofern nicht etwa die rechte Seite (und dann *eo ipso* auch die linke) identisch verschwindet. Hätte man nun aber:

$$g_0'(x)\cdot\varphi(x)\cdot\Pi_0(x)+\varphi(x)\cdot\Pi_0'(x)-\varphi'(x)\cdot\Pi_0(x)=0,$$

so würde sich ergeben:

$$\frac{\Pi_0'(x)}{\Pi_0(x)}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=g'(x),$$

also:

$$\Pi_0(x)=\varphi(x)\cdot e^{g(x)+C},$$

was unmöglich ist, da die rechte Seite von der Ordnung α, wogegen $\Pi_0(x)$ von niedrigerer Ordnung.

Damit ist aber der ausgesprochene Satz bewiesen.

9. Bezeichnet man wiederum mit b eine beliebige komplexe Zahl (einschließlich der Null), so folgt aus dem eben bewiesenen Satze, daß überhaupt unter *allen möglichen* Funktionen $\pi(x)\cdot G(x)+\gamma(x)$ (wo also $G(x)$ eine beliebig gewählte, aber fest zu haltende Funktion vom *Normaltypus* der *ganzzahligen* Ordnung α bedeutet) *höchstens* für diejenigen von der *Spezialform* $\pi_0(x)\cdot G(x)+(\gamma_0(x)-b)$ ein mit *unternormaler Häufigkeit* angenommener Ausnahmswert b existiert. Faßt man dieses Ergebnis mit demjenigen von Nr. 6 zusammen, so gelangt man zu der folgenden Vervollständigung des Picardschen Satzes (vgl. den Schluß von § 7, p. 291):

Eine ganze Funktion $G(x)$ von der Ordnung α nimmt jeden bestimmten Wert mit der Häufigkeit $H(\alpha)$ an. Nur wenn α eine ganze Zahl und zugleich $G(x)$ dem Normaltypus angehört, kann ein einzelner Wert b existieren, welcher von $G(x)$ mit unternormaler Häufigkeit bezw. gar nicht angenommen wird. Aber selbst unter den über Ordnung und Typus von $G(x)$ gemachten beschränkenden Voraussetzungen ist die Existenz eines solchen Spezialwertes b als ein Ausnahmefall anzusehen.

München, April 1903.

Nachtrag.

Wir lassen noch die in Fußnote p. 273 bereits angekündigte Modifikation der Lindelöfschen Methode*) folgen, welche eine etwas kürzere und dabei wiederum vollkommen elementare Herleitung des in § 4, Nr. 4 (p. 276) formulierten *Hauptresultates* gestattet.

1. Dem *Hauptsatze* I (p. 266) stellen wir anstatt des *Hauptsatzes* II (p. 270) die folgende (nicht ganz vollkommene) *Umkehrung* gegenüber:

Ist:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} \leqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{1}$$

so hat man bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$:

$$\left|\sum_0^\infty{}_\nu c_\nu x^\nu\right| < e^{(\gamma+\varepsilon)\cdot|x|^\alpha} \quad \textit{für alle} \quad |x| > R_\varepsilon. \tag{2}$$

---

*) Herr Lindelöf geht von derjenigen Form der Voraussetzung aus, welche in der hier akzeptierten Schreibweise lauten würde:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} \leqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Der Beweis des Satzes von Nr. 1 fordert alsdann die Bestimmung einer oberen Schranke für eine Reihe von der Form:

$$\sum \left(\frac{r}{\nu^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\nu$$

nnd damit die Bestimmung des *Maximums* von:

$$\left(\frac{r}{\nu^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\nu$$

als Funktion von ν — eine Aufgabe, welche die Heranziehung der *Differentialrechnung*, also eines nicht im Rahmen der „*elementaren*" Funktionentheorie liegenden Hilfsmittels erheischt. Dies wird, wie aus dem Texte ersichtlich ist, vermieden, wenn man, wie hier, von der Voraussetzung:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} \leqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}$$

ausgeht, da die in diesem Falle lediglich erforderliche *Maximums*bestimmung von:

$$\frac{r^\nu}{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

sich ohne jede Rechnung vollzieht.

Beweis. Wird $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so hat man auf Grund der zweiten Form von Voraussetzung (1) für $\nu > n_\varepsilon$:

$$\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} < \left(\alpha \cdot \left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \text{also:} \quad |c_\nu| < \left(\frac{\alpha^\nu \left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2}\right)^\nu}{\nu!}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Setzt man also allgemein:

$$|c_\nu| = k_\nu \cdot \left(\frac{\alpha^\nu \left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2}\right)^\nu}{\nu!}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

und bezeichnet mit K die größte der Zahlen $k_0, k_1, \cdots, k_{n_\varepsilon}$ und 1, so hat man für *jedes* ν:

$$(3) \qquad |c_\nu| \leqq K \cdot \left(\frac{\alpha^\nu \cdot \left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2}\right)^\nu}{\nu!}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

(wobei das Zeichen $<$ zum mindesten für alle $\nu > n_\varepsilon$ gilt) und daher:

$$(4) \qquad \left|\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu x^\nu\right| < K \cdot \sum_0^\infty{}^\nu \frac{1}{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\left(\alpha\left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |x|\right]^\nu \equiv K \cdot \sum_0^\infty{}^\nu r_\nu.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$(5) \qquad \left(\alpha\left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |x| = \varrho^{\frac{1}{\alpha}} \quad \left(\text{also:} \quad \varrho = \alpha\left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot |x|^\alpha\right),$$

so wird:

$$r_\nu = \left(\frac{\varrho^\nu}{\nu!}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{\varrho}{1} \cdot \frac{\varrho}{2} \cdots \frac{\varrho}{\nu}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Die r_ν nehmen also *zu*, solange $\nu < \varrho$, sie nehmen *ab*, sobald $\nu > \varrho$. Das *Maximum* von r_ν tritt daher ein für $\nu = [\varrho]$, sodaß also:

$$\text{Max. } r_\nu = \left(\frac{\varrho^{[\varrho]}}{[\varrho]!}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Wegen: $\frac{1}{\nu!} < \left(\frac{e}{\nu}\right)^\nu$ (s. Ungl. (5), p. 267) ergibt sich dann:

$$\frac{\varrho^{[\varrho]}}{[\varrho]!} < \left(\frac{\varrho}{[\varrho]}\right)^{[\varrho]} \cdot e^{[\varrho]} = \left(1 + \frac{\varrho - [\varrho]}{[\varrho]}\right)^{[\varrho]} \cdot e^{[\varrho]}$$
$$< e^{\varrho - [\varrho]} \cdot e^{[\varrho]} = e^\varrho$$

und daher:

$$(6) \qquad \text{Max. } r_\nu < e^{\frac{1}{\alpha} \cdot \varrho}.$$

Ferner hat man:

$$\left(\frac{\varrho}{\nu}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqq \frac{1}{2}, \quad \text{wenn:} \quad \nu \geqq 2^\alpha \cdot \varrho,$$

und somit:

$$(7) \qquad \begin{aligned} \sum_0^\infty{}_\nu r_\nu &= \sum_0^{[2^\alpha\cdot\varrho]}{}_\nu r_\nu + \sum_{[2^\alpha\cdot\varrho]+1}^\infty{}_\nu r_\nu \\ &< \text{Max.}\, r_\nu \cdot \left([2^\alpha\cdot\varrho] + 1 + \sum_1^\infty{}_\nu \left(\frac{1}{2}\right)^\nu\right) \\ &< (2^\alpha\cdot\varrho + 2)\cdot e^{\frac{1}{\alpha}\cdot\varrho}. \end{aligned}$$

Hiernach geht also die Ungleichung (4), wenn man noch für ϱ seinen Wert aus Gl. (5) einsetzt, in die folgende über:

$$(8) \qquad \left|\sum_0^\infty{}_\nu c_\nu x^\nu\right| < K\cdot\left(\alpha\left(\gamma+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot|2x|^\alpha + 2\right)\cdot e^{\left(\gamma+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot|x|^\alpha}$$

und, wenn jetzt R_ε so fixiert wird, daß:

$$(9) \qquad K\cdot\left(\alpha\left(\gamma+\frac{\varepsilon}{2}\right)|2x|^\alpha+2\right) < e^{\frac{\varepsilon}{2}\cdot|x|^\alpha} \quad \text{für} \quad |x| > R_\varepsilon,$$

schließlich, wie behauptet:

$$\left|\sum_0^\infty{}_\nu c_\nu x^\nu\right| < e^{(\gamma+\varepsilon)\cdot|x|^\alpha} \quad \text{für} \quad |x| > R_\varepsilon.$$

Zusatz. Man erkennt unmittelbar, daß der vorstehende Beweis und somit auch der oben ausgesprochene Satz noch gültig bleibt, wenn $\gamma = 0$; d. h.:

Ist:

$$(10) \qquad \lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \lim_{\nu=\infty}\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot|c_\nu|} = 0,$$

so hat man bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$:

$$(11) \qquad \left|\sum_0^\infty{}_\nu c_\nu x^\nu\right| < e^{\varepsilon\cdot|x|^\alpha} \quad \textit{für alle } |x| > R_\varepsilon.$$

Daraus folgt weiter:

Ist für jedes $\delta > 0$:

$$(12) \qquad \lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha+\delta}}\cdot\sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \lim_{\nu=\infty}\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}}\cdot|c_\nu|} = 0,$$

so hat man:

$$(13) \qquad \left|\sum_0^\infty{}_\nu c_\nu x^\nu\right| < e^{|x|^{\alpha+\delta}} \quad \textit{für alle } |x| > R_\delta.$$

2. Die Voraussetzung des Hauptsatzes I (p. 266) läßt sich nun wieder leicht so umformen, daß die genauen Umkehrungen der in Nr. 1 abgeleiteten Sätze zum Vorschein kommen.

Zunächst ergibt sich (s. p. 273, 274):

Ist bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$:

$$\left|\sum_0^\infty{}_\nu c_\nu x^\nu\right| < e^{(\gamma+\varepsilon)\cdot|x|^\alpha} \quad \textit{für alle } |x| > R_\varepsilon, \tag{14}$$

so hat man:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}}\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot|c_\nu|} \leqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{15}$$

Und analog (s. p. 275):

Ist bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$:

$$\left|\sum_0^\infty{}_\nu c_\nu x^\nu\right| < e^{\varepsilon\cdot|x|^\alpha} \quad \textit{für alle } |x > R_\varepsilon, \tag{16}$$

so hat man:

$$\lim_{\nu=\infty}\nu^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \lim_{\nu=\infty}\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot|c_\nu|} = 0. \tag{17}$$

Schließlich (s. p. 275, 276):

Ist bei beliebig kleinem $\delta > 0$:

$$\left|\sum_0^\infty{}_\nu c_\nu x^\nu\right| < e^{|x|^{\alpha+\delta}} \quad \textit{für alle } |x| > R_\delta, \tag{18}$$

so hat man auch:

$$\lim_{\nu=\infty}\nu^{\frac{1}{\alpha+\delta}}\cdot\sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \lim_{\nu=\infty}\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}}\cdot|c_\nu|} = 0. \tag{19}$$

3. Die Umkehrbarkeit des ersten Satzes von Nr. 2 bezw. Nr. 1 liefert sodann noch den folgenden Satz:

Ist bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$:

$$\left|\sum_0^\infty{}_\nu c_\nu x^\nu\right| > e^{(\gamma-\varepsilon)\cdot|x|^\alpha} \quad \textit{für gewisse beliebig große } x, \tag{20}$$

so hat man:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}}\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot|c_\nu|} \geqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{21}$$

und umgekehrt.

Beweis. Angenommen die Beziehung (21) folgte *nicht* aus der Voraussetzung (20), so hätte man:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} < (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}},$$

sodaß also gesetzt werden könnte:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = (\alpha(\gamma-\varepsilon'))^{\frac{1}{\alpha}},$$

wo ε' eine bestimmte positive Zahl bedeutet. Hieraus würde aber nach dem ersten Satze von Nr. 1, wenn man für die dort mit ε bezeichnete Zahl $\frac{\varepsilon'}{2}$ setzt, folgen, daß:

$$\left|\sum_0^\infty{}^{\nu} c_\nu x^\nu\right| < e^{\left(\gamma-\frac{\varepsilon'}{2}\right)\cdot|x|^\alpha} \quad \textit{für alle } |x| > R_{\frac{\varepsilon'}{2}},$$

was der Voraussetzung (20) widerspricht.

Umgekehrt: Besteht die Voraussetzung (21) und es wäre die Beziehung (20) *nicht* erfüllt, so müßte ein bestimmtes $\varepsilon' > 0$ existieren, derart, daß:

$$\left|\sum_0^\infty{}^{\nu} c_\nu x^\nu\right| < e^{(\gamma-\varepsilon')\cdot|x|^\alpha} \quad \textit{für alle } |x| > R_{\varepsilon'}.$$

Daraus würde aber nach dem Hauptsatze I (p. 266) unmittelbar folgen, daß:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} \leqq (\alpha(\gamma-\varepsilon'))^{\frac{1}{\alpha}},$$

was wiederum der Voraussetzung widerspricht.

Zusatz. Aus dem eben bewiesenen Satze erschließt man ohne weiteres den folgenden:

Ist bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$:

(22) $$\left|\sum_0^\infty{}^{\nu} c_\nu x^\nu\right| > e^{\frac{1}{\varepsilon}\cdot|x|^\alpha} \quad \textit{für gewisse beliebig große } x,$$

so hat man:

(23) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} = \infty,$$

und umgekehrt.

Daraus folgt weiter:

Ist bei beliebig kleinem $\delta > 0$:

$$\left| \sum_{0}^{\infty} {}^{\nu} c_\nu x^\nu \right| > e^{|x|^{\alpha-\delta}} \quad \textit{für gewisse beliebig große } x, \tag{24}$$

so hat man auch:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \, \nu^{\frac{1}{\alpha-\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha-\delta}} \cdot |c_\nu|} = \infty, \tag{25}$$

und umgekehrt.

Durch Zusammenfassung der in Nr. 1—3 ausgesprochenen Sätze ergibt sich dann schließlich wiederum das in § 4, Nr. 4 (p. 276) formulierte Hauptresultat.

München, Januar 1904.

Über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen.

Von

A. Hurwitz in Zürich.

In meiner Dissertation*) habe ich im Anschluß an die Arbeiten von R. Dedekind**) und F. Klein***) die Grundlagen einer Theorie der elliptischen Modulfunktionen entwickelt. Meine Darstellung läßt sich aber, wie ich seither gefunden habe, in einigen Punkten noch wesentlich vereinfachen. Ich möchte deshalb in der vorliegenden Arbeit auf den in meiner Dissertation behandelten Gegenstand nochmals zurückkommen. Dabei beschränke ich mich, um nicht zu weitläufig zu werden, auf die ersten Elemente der Theorie. Diese jedoch werde ich in aller Ausführlichkeit behandeln, um einerseits einen vollständigen Überblick über die Hilfsmittel, welche ich zur Begründung der Theorie verwende, zu ermöglichen und um andererseits die gegenwärtige Arbeit so zu gestalten, daß sie ohne Zuhilfenahme anderer Abhandlungen verständlich ist. Daß die hier mitgeteilten Betrachtungen, wenn man sie in geeigneter Weise verallgemeinert, auch in der Theorie der automorphen Funktionen Anwendung finden können, wird dem kundigen Leser nicht entgehen.

§ 1.

Äquivalente Größen.

Derjenige Teil der komplexen Zahlenebene, welcher die Zahlen mit positiv-imaginärem Bestandteil repräsentiert, soll als *„positive Halbebene"*,

---

*) Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunktionen und Theorie der Multiplikatorgleichungen erster Stufe. (Diese Annalen, Bd. 18, S. 528.)

**) Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen. (Crelles Journal, Bd. 83, S. 265)

***) Über die Transformation der elliptischen Funktionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades. (Diese Annalen, Bd. 14, S. 111.) Eine umfassende Darstellung der Theorie gaben F. Klein und R. Fricke in dem Werke: „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen". (Bd. I, Leipzig 1890; Bd. II, Leipzig 1892.)

derjenige Teil, welcher die Zahlen mit negativ-imaginärem Bestandteil repräsentiert, als *„negative Halbebene“* bezeichnet werden. Die gemeinsame Begrenzung dieser Halbebenen wird durch die Achse der reellen Zahlen gebildet.

Ist nun

$$\omega = x + iy, \qquad (y > 0) \tag{1}$$

ein Punkt der positiven Halbebene, so möge

$$H(\omega) = \frac{x^2 + y^2 + 1}{y} \tag{2}$$

die „Höhe“ des Punktes ω heißen*). Die Höhe $H(\omega)$ hat stets einen positiven, endlichen Wert. Sie läßt sich ferner durch ω und die zu ω konjugierte Größe

$$\bar{\omega} = x - iy$$

in der Gestalt

$$H(\omega) = 2i \cdot \frac{\omega\bar{\omega} + 1}{\omega - \bar{\omega}} \tag{3}$$

ausdrücken.

Wenn nun weiter zwischen den beiden Größen ω und ω' eine Gleichung der Form

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \tag{4}$$

besteht, in welcher $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ bedeuten, so nennen wir die Größen ω und ω' „äquivalent“, eine Bezeichnung, die wir auch auf die die Größen darstellenden Punkte der komplexen Zahlenebene übertragen.

Die aus (4) folgende Gleichung

$$\frac{1}{2i}(\omega' - \bar{\omega}') = \frac{1}{2i}(\omega - \bar{\omega}) \cdot \frac{1}{(\gamma\omega + \delta)(\gamma\bar{\omega} + \delta)} \tag{5}$$

lehrt, daß die imaginären Komponenten von ω und ω' das nämliche Vorzeichen haben. Wenn also ω in der positiven Halbebene liegt, so gilt dasselbe von jedem zu ω äquivalenten Punkte ω'.

Da zwei Größen, die einer dritten äquivalent sind, auch einander äquivalent sind (eine Tatsache, welche die „Gruppeneigenschaft“ der Substitutionen (4) zum Ausdruck bringt), so lassen sich die Punkte der positiven Halbebene in Systeme derart anordnen, daß zwei Punkte, die demselben Systeme angehören, einander äquivalent, zwei Punkte, die verschiedenen Systemen angehören, nicht äquivalent sind. Ist ω irgend ein Punkt

*) Die Einführung des Begriffes der Höhe rechtfertigt sich durch die weiter folgenden Betrachtungen. Doch möchte ich hier bemerken, daß ich durch sehr allgemeine Untersuchungen über automorphe Funktionen von einer und mehreren Variabeln zu diesem Begriffe geführt worden bin.

eines solchen Systems, so ergibt die Gleichung (4) die sämtlichen Punkte ω' dieses Systems, wenn α, β, γ, δ alle möglichen ganzen Zahlen der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ durchlaufen.

Die Höhe des durch die Gleichung (4) definierten Punktes ω' drückt sich nun nach (3) und (5) in der Form aus:

$$H(\omega') = 2i\,\frac{(\alpha\omega + \beta)(\alpha\bar\omega + \beta) + (\gamma\omega + \delta)(\gamma\bar\omega + \delta)}{\omega - \bar\omega}. \tag{6}$$

Hieraus ziehen wir zwei wichtige Folgerungen.

Einerseits ergibt nämlich die besondere Annahme $\alpha = \delta = 0$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$, daß

$$H\left(-\frac{1}{\omega}\right) = H(\omega) \tag{7}$$

ist. Die beiden Punkte ω und $-\frac{1}{\omega}$ haben also stets die nämliche Höhe.

Andererseits bemerken wir, daß der Zähler des Ausdrucks (6) eine definite (quadratische) Form der Substitutionskoeffizienten α, β, γ, δ ist. Daraus folgt, daß unter allen ganzzahligen Systemen α, β, γ, δ $(\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$ sich eines oder mehrere befinden, für welche $H(\omega')$ möglichst klein ausfällt. In einem System äquivalenter Punkte gibt es also stets einen oder mehrere von minimaler Höhe.

Betrachten wir nun irgend ein System äquivalenter Punkte! In demselben sei ω derjenige (oder einer derjenigen) von minimaler Höhe.

Nach Gleichung (7) dürfen wir voraussetzen, daß

$$|\omega| \geqq 1 \tag{8}$$

ist, d. h. daß der absolute Betrag von ω nicht kleiner als 1 ist. Denn anderenfalls könnte man den Punkt ω durch den Punkt $-\frac{1}{\omega}$ ersetzen, dem die gleiche minimale Höhe zukommt.

Für jeden beliebigen Punkt

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

des betrachteten Punktsystems ist

$$\frac{H(\omega')}{H(\omega)} = \frac{(\alpha\omega + \beta)(\alpha\bar\omega + \beta) + (\gamma\omega + \delta)(\gamma\bar\omega + \delta)}{\omega\bar\omega + 1} \geqq 1.$$

Diese Ungleichung liefert für die besonderen Annahmen

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1, & -1\\ 0, & 1\end{pmatrix},$$

$$\omega + \bar\omega \geqq -1, \quad \omega + \bar\omega \leqq 1. \tag{9}$$

Ein Punkt ω, welcher den Ungleichungen (8) und (9) genügt, liegt nun im Innern oder auf dem Rande desjenigen ins Unendliche laufenden

Gebietes der positiven Halbebene, welches durch den Kreis mit dem Mittelpunkt 0 und dem Radius 1 und durch zwei zur Achse der rein imaginären Zahlen in den Abständen $+\frac{1}{2}$ bez. $-\frac{1}{2}$ parallel laufenden Geraden begrenzt wird. Dieses Gebiet soll in der Folge stets durch G bezeichnet werden.

Demnach gilt folgender Satz:

„In einem System äquivalenter Punkte gibt es stets einen, welcher im Innern oder auf dem Rande des Gebietes G liegt."

Es seien AC, $A'C'$ die geradlinigen Teile, ABA' der krummlinige Teil des Randes von G, wobei B die auf der Achse der imaginären Zahlen liegende Mitte des Kreisbogens ABA' bezeichnet. (Vgl. Fig. 1.) Durchläuft der Punkt ω die Linie AC, so beschreibt der äquivalente Punkt $\omega+1$ die Linie $A'C'$, und durchläuft der Punkt ω den Kreisbogen AB, so beschreibt der äquivalente Punkt $-\frac{1}{\omega}$ den Kreisbogen $A'B$. Hiernach sind die Randpunkte des Gebietes paarweise äquivalent und diese Tatsache veranlaßt uns zu folgender Festsetzung:

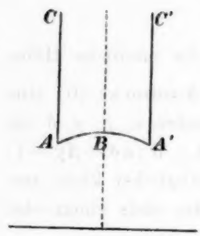


Fig. 1.

Von den Randpunkten des Gebietes G sollen nur die auf den Linien AC und AB befindlichen zu dem Gebiete G gerechnet werden; d. h., wenn gesagt wird, ein Punkt „liege im Gebiete G" oder „gehöre dem Gebiete G an", so soll darunter verstanden werden, daß der Punkt entweder im Innern von G oder auf einer der Randlinien AC und AB liegt.

Aus dem obigen Satze folgt nun unmittelbar:

In einem System äquivalenter Punkte gibt es stets einen, welcher dem Gebiete G angehört.

Es wäre nun leicht, zu zeigen, daß es auch stets nur einen einzigen solchen Punkt in einem System äquivalenter Punkte gibt*). Aber wir

---

*) Es folgt dies daraus, daß die Ungleichung

$$\frac{H(\omega')}{H(\omega)} = \frac{(\alpha\omega+\beta)(\alpha\bar{\omega}+\beta)+(\gamma\omega+\delta)(\gamma\bar{\omega}+\delta)}{\omega\bar{\omega}+1} > 1$$

stets erfüllt ist, wenn ω im Innern von G liegt, ausgenommen für

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix};$$

sowie, daß Analoges gilt, wenn ω auf dem Rande von G liegt.

brauchen uns bei dem Nachweise dieser Tatsache nicht aufzuhalten, weil sich dieselbe im weiteren Verlaufe unserer Untersuchungen ganz von selber ergeben wird.

§ 2.

Die Modulformen $G_n(\omega_1, \omega_2)$.

Es seien jetzt ω_1 und ω_2 zwei komplexe Veränderliche, welche zunächst nur der Einschränkung unterliegen sollen, daß ihr Quotient $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ einen endlichen, nicht reellen Wert besitzt.

Die Summe

$$G_n \equiv G_n(\omega_1, \omega_2) = \sum \frac{1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)^n}, \tag{10}$$

erstreckt über alle Paare ganzer Zahlen m_1, m_2, mit Ausschluß des einen Paares $m_1 = 0$, $m_2 = 0$, besitzt dann einen von der Anordnung der Summation unabhängigen stets endlichen Wert, sobald n größer als 2 ist.

Hieraus folgt, daß für $n > 2$ $G_n(\omega_1, \omega_2)$ eine „Modulform" ist, womit wir nichts anderes besagen wollen, als daß $G_n(\omega_1, \omega_2)$ eine homogene Funktion von ω_1, ω_2 vorstellt, die ungeändert bleibt, wenn ω_1, ω_2 einer linearen ganzzahligen Substitution der Determinante 1 unterworfen werden.

D. h. es gilt die Gleichung

$$G_n(\omega_1', \omega_2') = G_n(\omega_1, \omega_2), \qquad (n > 2) \tag{11}$$

falls

$$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1) \tag{12}$$

ist, unter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen verstanden.

Übrigens haben unter den Summen G_n nur diejenigen mit geradem Index n ein Interesse; denn für einen ungeraden Wert von n zerstören sich die den Zahlenpaaren (m_1, m_2) und $(-m_1, -m_2)$ entsprechenden Glieder in der Summe (10), sodaß dann G_n identisch Null ist.

Die den Indices $n = 1$, $n = 2$ entsprechenden Summen G_1 und G_2 sind, wie sich sogleich zeigen wird, nicht unabhängig von der Anordnung der Summation. Näheres über diese Summen ergeben die nachstehenden Betrachtungen.

Es möge m die Glieder eines gegebenen, übrigens beliebig beschaffenen Systems von untereinander verschiedenen ganzen Zahlen durchlaufen. Dann soll zur Vereinfachung der Schreibweise die Bedeutung des Zeichens

$$\sum_m \varphi(m) \tag{13}$$

wie folgt festgesetzt werden. Man verstehe unter

$$\sum_{-\lambda}^{+\lambda} \varphi(m)$$

die Summe derjenigen Werte von $\varphi(m)$, welche den der Bedingung

$$-\lambda \leqq m \leqq +\lambda$$

genügenden Werten von m entsprechen. Dann definieren wir das Zeichen (13) durch die Gleichung

$$(14) \qquad \sum_m \varphi(m) = \operatorname*{Lim}_{\lambda=\infty} \sum_{-\lambda}^{+\lambda} \varphi(m).$$

Durchläuft ferner das Zahlenpaar m_1, m_2 alle Glieder eines unendlichen Systems voneinander verschiedener Zahlenpaare, so soll das Zeichen

$$(15) \qquad \sum_{m_1} \sum_{m_2} \varphi(m_1, m_2)$$

folgende Bedeutung haben: Wir bilden zunächst, für einen festen Wert von m_1,

$$\sum_{m_2} \varphi(m_1, m_2) = \psi(m_1);$$

diese Summe ist eine Funktion von m_1 und als solche mit $\psi(m_1)$ bezeichnet worden. Nun definieren wir:

$$(16) \qquad \sum_{m_1} \sum_{m_2} \varphi(m_1, m_2) = \sum_{m_1} \psi(m_1).$$

Nach dieser Festsetzung hat man z. B. wohl zu unterscheiden zwischen den beiden Summen

$$\sum_{m_1} \sum_{m_2} \varphi(m_1, m_2) \quad \text{und} \quad \sum_{m_2} \sum_{m_1} \varphi(m_1, m_2).$$

Diese beiden Summen werden freilich im Falle absoluter Konvergenz denselben Wert repräsentieren; im Falle bedingter Konvergenz können sie dagegen verschiedene Werte besitzen.

Dies vorausgeschickt, betrachten wir die für jeden nicht ganzzahligen endlichen Wert a gültige Gleichung

$$(17) \qquad \sum_m \frac{1}{a+m} = \pi \cot(a\pi) = i\pi \frac{e^{ai\pi} + e^{-ai\pi}}{e^{ai\pi} - e^{-ai\pi}},$$

in welcher m alle ganzzahligen Werte durchläuft.

Mit Hilfe dieser Gleichung leiten wir leicht den Wert der Summe

$$(18) \qquad S = \sum_{m_1} \sum_{m_2} \frac{1}{(m_1 - n_1)\omega_1 + (m_2 - n_2)\omega_2}$$

ab, in welcher n_1 und n_2 irgend zwei bestimmte ganze Zahlen bedeuten

und das Zahlenpaar m_1, m_2 alle Paare ganzer Zahlen mit Ausnahme des Paares $m_1 = n_1$, $m_2 = n_2$ durchlaufen soll. Setzen wir

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \omega,$$

so wird zunächst

$$\sum_{m_2} \frac{1}{(m_1 - n_1)\omega_1 + (m_2 - n_2)\omega_2} = \frac{1}{\omega_2} \sum_{m_2} \frac{1}{(m_1 - n_1)\omega - n_2 + m_2}$$
$$= \frac{\pi}{\omega_2} \cot \pi[(m_1 - n_1)\omega - n_2] = \frac{\pi}{\omega_2} \cot (m_1 - n_1)\omega\pi,$$

wenn m_1 von n_1 verschieden ist. Für $m_1 = n_1$ dagegen ist der Wert dieser Summe $\left(\sum_{m_2} \frac{1}{(m_2 - n_2)\omega_2}\right)$, wie man leicht erkennt, gleich Null. Daher kommt

$$S = \frac{\pi}{\omega_2} \sum_{m_1} \cot (m_1 - n_1)\omega\pi, \tag{19}$$

wo m_1 alle von n_1 verschiedenen ganzen Zahlen durchläuft. Nun ist ferner

$$\sum_{-\lambda}^{+\lambda} \cot (m_1 - n_1)\omega\pi = \sum_{m=-\lambda-n_1}^{m=\lambda-n_1} \cot (m\omega\pi) = \sum_{-\lambda-n_1}^{+\lambda+n_1} \cot (m\omega\pi) - \sum_{m=\lambda-n_1+1}^{m=\lambda+n_1} \cot (m\omega\pi).$$

Da die Kotangente eine ungerade Funktion ist, so zerstören sich in der vorletzten Summe je zwei Glieder, also ist

$$S = -\frac{\pi}{\omega_2} \cdot \operatorname*{Lim}_{\lambda=\infty} \sum_{m=\lambda-n_1+1}^{m=\lambda+n_1} \cot (m\omega\pi). \tag{20}$$

Jedes der $2n_1$ Glieder

$$\cot (m\omega\pi) \quad (m = \lambda - n_1 + 1,\ \lambda - n_1 + 2, \cdots \lambda + n_1)$$

der letzten Summe nähert sich mit unendlich wachsendem λ der Grenze $-i$ oder $+i$, je nachdem ω einen positiv- oder negativ-imaginären Bestandteil aufweist. Dies folgt unmittelbar aus der Gleichung

$$\cot (m\omega\pi) = i \cdot \frac{e^{im\omega\pi} + e^{-im\omega\pi}}{e^{im\omega\pi} - e^{-im\omega\pi}}.$$

Es ergibt sich also schließlich

$$S = \sum_{m_1} \sum_{m_2} \frac{1}{(m_1 - n_1)\omega_1 + (m_2 - n_2)\omega_2} = \pm \frac{2i\pi}{\omega_2} n_1, \tag{21}$$

wobei das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem ω in der positiven oder in der negativen Halbebene liegt. Die Gleichung (21) leistet offenbar die Wertbestimmung der Summe $G_1(\omega_1, \omega_2)$ bei einer bestimmten Anordnung der Glieder dieser Summe.*)

*) Bei dem obigen Beweise der Gleichung (21) wurde $n_1 \geq 0$ vorausgesetzt. Ersetzt man aber m_1, m_2, n_2 bez. durch $-m_1$, $-m_2$, $-n_2$ und multipliziert sodann die Gleichung mit -1, so erkennt man, daß die letztere auch für $n_1 < 0$ gilt.

Die Summe $\sum\limits_{m_2}\sum\limits_{m_1}\frac{1}{(m_1-n_1)\omega_1+(m_2-n_2)\omega_2}$ führen wir durch Vertauschung von ω_1 mit ω_2 auf die soeben betrachtete Summe zurück. Da nun $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ einen positiv- oder negativ-imaginären Teil besitzt, je nachdem $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ einen negativ- oder positiv-imaginären Teil aufweist, so liest man aus (21) sofort ab:

$$\sum_{m_2}\sum_{m_1}\frac{1}{(m_1-n_1)\omega_1+(m_2-n_2)\omega_2}=\mp\frac{2i\pi}{\omega_1}n_2, \tag{22}$$

wobei wieder das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem $\omega=\frac{\omega_1}{\omega_2}$ in der positiven oder negativen Halbebene liegt.

Die Gleichungen (21) und (22) setzen die bedingte Konvergenz der Summe $G_1(\omega_1, \omega_2)$ in Evidenz.

Was die Summe $G_2(\omega_1, \omega_2)$ betrifft, so genügt es für unsere Zwecke die beiden folgenden Anordnungen:

$$G_2'=\sum_{m_1}\sum_{m_2}\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2},\quad G_2''=\sum_{m_2}\sum_{m_1}\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_1)^2} \tag{23}$$

miteinander zu vergleichen.

Zu dem Ende bemerken wir, daß die Summe

$$\begin{aligned} s&=\sum\left[\frac{1}{(m_1-1)\omega_1+(m_2-1)\omega_2}-\frac{1}{m_1\omega_1+m_2\omega_2}-\frac{\omega_1+\omega_2}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2}\right]\\ &=(\omega_1+\omega_2)^2\sum\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2((m_1-1)\omega_1+(m_2-1)\omega_2)}\end{aligned} \tag{24}$$

absolut konvergiert. Die Summation soll sich hier auf alle Paare ganzer Zahlen m_1, m_2, mit Ausnahme der beiden Paare $m_1=1$, $m_2=1$ und $m_1=0$, $m_2=0$ erstrecken. Summiert man nun zuerst nach m_2 und dann nach m_1, so ergibt sich mit Hilfe von (21)

$$s=\frac{3}{\omega_1+\omega_2}\pm\frac{2i\pi}{\omega_2}-(\omega_1+\omega_2)\sum_{m_1}\sum_{m_2}\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2}. \tag{25}$$

Summiert man dagegen zuerst nach m_1 und dann nach m_2, so kommt

$$s=\frac{3}{\omega_1+\omega_2}\mp\frac{2i\pi}{\omega_1}-(\omega_1+\omega_2)\sum_{m_2}\sum_{m_1}\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2}. \tag{26}$$

Der Vergleich dieser beiden Darstellungen von s ergibt die Relation

$$\sum_{m_1}\sum_{m_2}\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2}-\sum_{m_2}\sum_{m_1}\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2}=\pm\frac{2i\pi}{\omega_1\omega_2}, \tag{27}$$

wobei das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ in der positiven oder der negativen Halbebene liegt. Daß die hier betrachteten Summen (23) endliche Werte besitzen, ist aus den Gleichungen (25) und (26) ersichtlich.

§ 3.

Darstellung der Funktionen G_n durch Potenzreihen.

Wir setzen von jetzt ab voraus, daß

$$\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2} = x + iy$$

einen positiv-imaginären Bestandteil besitzt.

Der absolute Betrag der Größe

$$h = e^{2i\pi\omega} = e^{2i\pi x} \cdot e^{-2\pi y} \tag{28}$$

ist dann kleiner als 1.

In der Gleichung (17) werde nun a durch $m_1\omega$ ersetzt, unter m_1 eine positive ganze Zahl verstanden, und sodann die rechte Seite nach Potenzen von h entwickelt. Auf diese Weise kommt:

$$\sum_{m_2} \frac{1}{m_1\omega + m_2} = -i\pi - 2i\pi \sum_{r=1}^{\infty} h^{m_1 r}. \tag{29}$$

Eine $(n-1)$-malige Differentiation nach ω ergibt weiter

$$\sum_{m_2} \frac{1}{(m_1\omega + m_2)^n} = (-1)^n \cdot \frac{(2i\pi)^n}{(n-1)!} \sum_{r=1}^{\infty} r^{n-1} h^{m_1 r}, \qquad (n \geqq 2.) \tag{30}$$

Summieren wir über alle positiven ganzen Zahlen m_1, so entsteht

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2} \frac{1}{(m_1\omega + m_2)^n} = (-1)^n \cdot \frac{(2i\pi)^n}{(n-1)!} \sum_{r=1}^{\infty} r^{n-1} \frac{h^r}{1-h^r}, \qquad (n \geqq 2.) \tag{31}$$

Indem wir hier, was offenbar erlaubt ist, m_2 durch $-m_2$ ersetzen und dann beide Seiten mit $(-1)^n$ multiplizieren, erhalten wir:

$$\sum_{m_1=-1}^{-\infty} \sum_{m_2} \frac{1}{(m_1\omega + m_2)^n} = \frac{(2i\pi)^n}{(n-1)!} \sum_{r=1}^{\infty} r^{n-1} \frac{h^r}{1-h^r}, \qquad (n \geqq 2.) \tag{31a}$$

Aus (31), (31a) und der bekannten Gleichung

$$\sum_{m_2} \frac{1}{m_2^{\,2n}} = \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_n, \qquad (n \geqq 1) \tag{32}$$

in welcher B_n die n^{te} Bernoullische Zahl bezeichnet, ergibt sich schließlich

$$\sum_{m_1}\sum_{m_2}\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^{2n}} \tag{33}$$
$$=\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{2n}\cdot\frac{1}{(2n)!}\left[B_n+(-1)^n 4n\sum_{r=1}^{\infty} r^{2n-1}\frac{h^r}{1-h^r}\right],\quad (n\geqq 1.)$$

Hiermit sind die Modulformen G_n durch Potenzreihen dargestellt. Ordnet man die rechts auftretende Summe nach Potenzen von h an, so erhält sie die Gestalt

$$\sum_{r=1}^{\infty}\psi_{2n-1}(r)h^r = h+(1+2^{2n-1})h^2+(1+3^{2n-1})h^3 + (1+2^{2n-1}+4^{2n-1})h^4+\cdots, \tag{34}$$

wo $\psi_{2n-1}(r)$ die Summe der $(2n-1)^{ten}$ Potenzen der Teiler der Zahl r bezeichnet.

§ 4.

Die Modulform $\Delta(\omega_1, \omega_2)$.

Im Falle $n=1$ lautet die Gleichung (33)

$$\sum_{m_1}\sum_{m_2}\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2\left[1-24\sum_{r=1}^{\infty}r\frac{h^r}{1-h^r}\right]. \tag{35}$$

Ersetzt man hier ω_1 durch $-\omega_2$ und ω_2 durch ω_1, also

$$h=e^{2i\pi\omega}\quad\text{durch}\quad h'=e^{-\frac{2i\pi}{\omega}}, \tag{36}$$

so kommt, wenn zugleich die Summationsbuchstaben m_1, m_2 durch $-m_2$ resp. m_1 ersetzt werden,

$$\sum_{m_2}\sum_{m_1}\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2\left[1-24\sum_{r=1}^{\infty}r\frac{h'^r}{1-h'^r}\right]. \tag{37}$$

Die Gleichung (27) läßt sich demnach so darstellen:

$$\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2\left[1-24\sum_{r=1}^{\infty}\frac{rh^r}{1-h^r}\right]-\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2\left[1-24\sum_{r=1}^{\infty}\frac{rh'^r}{1-h'^r}\right]=\frac{6i\pi}{\omega_1\omega_2}$$

oder

$$\log h\left[1-24\sum_{r=1}^{\infty}\frac{rh^r}{1-h^r}\right]+\log h'\left[1-24\sum_{r=1}^{\infty}\frac{rh'^r}{1-h'^r}\right]=-12. \tag{38}$$

Aus (36) folgt nun $\log h \cdot \log h' = 4\pi^2$ und hieraus

$$\frac{d \log h}{\log h} = -\frac{d \log h'}{\log h'}.$$

Multipliziert man (38) mit $\frac{d \log h}{\log h}$, so kann man daher das entstehende Resultat so schreiben:

$$\frac{dh}{h}\left[1 - 24 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r h^r}{1 - h^r}\right] - \frac{dh'}{h'}\left[1 - 24 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r h'^r}{1 - h'^r}\right] = -12 \frac{d \log h}{\log h}.$$

Integriert man diese Gleichung gliedweise und geht dann von den Logarithmen zu den Zahlen über, so entsteht

$$(\log h)^{12} h \prod_{r=1}^{\infty} (1 - h^r)^{24} = C \cdot h' \prod_{r=1}^{\infty} (1 - h'^r)^{24}$$

oder

$$\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} h \prod_{r=1}^{\infty} (1 - h^r)^{24} = \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^{12} h' \prod_{r=1}^{\infty} (1 - h'^r)^{24}, \tag{39}$$

indem sich die Integrationskonstante C aus der Annahme $\omega = i$, für welche $h = h' = e^{-2\pi}$ wird, ergibt.

Die Gleichung (39) lehrt, daß die Funktion

$$\Delta \equiv \Delta(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} h \prod_{r=1}^{\infty} (1 - h^r)^{24} \tag{40}$$

ungeändert bleibt, wenn man ω_1, ω_2 durch $-\omega_2$ resp. ω_1 ersetzt. Offenbar bleibt aber Δ auch ungeändert, wenn man ω_1, ω_2 sei es durch $-\omega_1$, $-\omega_2$ resp., sei es durch $\omega_1 + \omega_2$, ω_2 resp. ersetzt. Da nun aus den Substitutionen

$$\begin{aligned} \omega_1' &= -\omega_2, & \omega_2' &= \omega_1; \\ \omega_1' &= -\omega_1, & \omega_2' &= -\omega_2; \\ \omega_1' &= \omega_1 + \omega_2, & \omega_2' &= \omega_2 \end{aligned}$$

die sämtlichen homogenen ganzzahligen Substitutionen der Determinante 1 zusammengesetzt werden können, so folgt schließlich:

Die Funktion $\Delta(\omega_1, \omega_2)$ *bleibt ungeändert, wenn* ω_1, ω_2 *beliebigen linearen homogenen ganzzahligen Substitutionen der Determinante 1 unterworfen werden.*

Diese Funktion hat insofern einen besonders einfachen analytischen Charakter als das Produkt

$$h \prod_{r=1}^{\infty} (1 - h^r)^{24}$$

eine in der positiven Halbebene reguläre und nirgends verschwindende Funktion von ω darstellt.

§ 5.

Die Modulfunktion $J(\omega)$.

Wir setzen nun zur Abkürzung

$$(41)\qquad g_2 \equiv g_2(\omega_1, \omega_2) = 60 \sum_{m_1} \sum_{m_2} \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^4},$$

eine Funktion, die nach (33) und (34) die Darstellung

$$(42)\qquad g_2 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \left[\frac{1}{12} + 20 \sum_{r=1}^{\infty} \psi_3(r) h^r\right]$$

zuläßt. Aus g_2 und Δ bilden wir sodann den Quotienten

$$(43)\qquad J(\omega) = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{\left[\frac{1}{12} + 20 \sum\limits_{r=1}^{\infty} \psi_3(r) h^r\right]^3}{h \prod\limits_{r=1}^{\infty} (1 - h^r)^{24}},$$

welcher nur noch von $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ abhängt.

Aus dieser Definitionsgleichung der Funktion $J(\omega)$ geht hervor, daß für die ganze positive Halbebene eine Entwickelung der Form

$$(44)\qquad J(\omega) = \frac{1}{12^3 h} [1 + c_1 h + c_2 h^2 + \cdots]$$

gültig ist.

Den Eigenschaften von g_2 und Δ entsprechend, genügt $J(\omega)$ ferner der Gleichung

$$(45)\qquad J(\omega') = J(\omega),$$

in welcher ω und ω' irgend zwei äquivalente Punkte der positiven Halbebene bezeichnen.

Wenn die Ordinate y von $\omega = x + iy$ über alle Grenzen wächst, so nähert sich

$$h = e^{2i\pi\omega} = e^{2i\pi x} \cdot e^{-2\pi y}$$

der Null. Nach Gleichung (44) wird dann also $J(\omega)$ unendlich groß. Diese Funktion besitzt daher den singulären Punkt

$$\omega = \infty.$$

Folglich sind auch die zum Punkte ∞ äquivalenten Punkte, d. h. die Repräsentanten der reellen rationalen Zahlen, singuläre Punkte von $J(\omega)$. Da letztere die Achse der reellen Zahlen überall dicht erfüllen, so ist die

Funktion $J(\omega)$ über die positive Halbebene hinaus nicht fortsetzbar. Innerhalb der positiven Halbebene ist $J(\omega)$ nach (44) überall regulär. –

Es soll sich jetzt darum handeln, festzustellen, wie oft die Funktion $J(\omega)$ einen gegebenen endlichen Wert a in dem Gebiete G annimmt.

Jedenfalls besitzt die Gleichung

$$J(\omega) = a \tag{46}$$

im Gebiete G nur endlich viele Lösungen ω. Denn unendlich viele Lösungen würden eine Häufungsstelle ergeben, die notwendig im Endlichen liegen müßte, weil mit unendlich anwachsender Ordinate von ω auch $|J(\omega)|$ über jede Grenze, also insbesondere über $|a|$ hinaus, wächst. Diese Häufungsstelle wäre aber eine singuläre Stelle von $J(\omega)$, während doch eine solche in der positiven Halbebene nicht existiert.

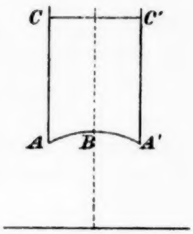


Fig. 2.

Um nun die Anzahl N der im Gebiete G liegenden Lösungen der Gleichung (46) zu bestimmen, schneiden wir zunächst von G durch eine Parallele CC' zur Achse der reellen Zahlen das endliche Gebiet

$$G' = CABA'C'$$

ab. (Vgl. Fig. 2.) Der Abstand der Parallelen CC' von der Achse der reellen Zahlen soll später ins Unendliche wachsen; er sei von vornherein so groß angenommen, daß die N Lösungen der Gleichung (46) im Gebiete G' liegen. Dann hat man bekanntlich

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int d \log [J(\omega) - a], \tag{47}$$

das Integral in positivem Sinne durch die Berandung von G' erstreckt. (Dabei haben wir angenommen, daß keine der N Lösungen auf der Begrenzung von G liegt. Sollte letzteres der Fall sein, so hätte man bei der Integration die auf der Begrenzung liegenden Nullstellen von $J(\omega) - a$ durch infinitesimale Abweichungen zu umgehen).

Das Integral zerlegen wir nun nach folgendem Schema

$$\int_A^B - \int_{A'}^B + \int_{A'}^{C'} - \int_A^C + \int_{C'}^C.$$

Die beiden ersten Integrale sind durch die Kreisbogen AB und $A'B$ resp. zu erstrecken, die übrigen Integrale sind geradlinig.

Substituiert man im ersten Integral $-\frac{1}{\omega}$ für ω, so geht dasselbe in das zweite Integral über; analog geht durch die Substitution $\omega + 1$ für ω das dritte Integral in das vierte über.

Diese Integrale heben sich also gegenseitig auf. D. h. es ist

$$(48)\qquad N = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'}^{C} d \log [J(\omega) - a].$$

Wenn aber ω die Gerade $C'C$ durchläuft, so beschreibt

$$h = e^{2 i \pi \omega}$$

einen Kreis um den Nullpunkt, dessen Radius unbegrenzt abnimmt, falls die Entfernung der Geraden $C'C$ von der Achse der reellen Zahlen ins Unendliche wächst, und zwar beschreibt h diesen Kreis in negativem Sinne.

Das Integral (48) gibt daher an, von welcher Ordnung

$$J(\omega) - a = \frac{1}{12^3 h}[1 + (c_1 - 12^3 a)h + c_2 h^2 + \cdots],$$

angesehen als Funktion von h, an der Stelle $h = 0$ unendlich wird. D. h. es ist

$$N = 1.$$

Wir sind damit zu dem fundamentalen Satze gelangt:

Die Funktion $J(\omega)$ nimmt im Gebiete G jeden endlichen Wert a ein und nur ein Mal an.

Dasselbe gilt auch von dem Werte ∞, den $J(\omega)$ nur an der unendlich fernen Stelle des Gebietes G annimmt.

Aus diesem Satze ziehen wir nun eine Reihe von Folgerungen. Zunächst erchließen wir, daß in einem System äquivalenter Punkte der positiven Halbebene immer nur ein einziger vorhanden ist, der dem Gebiete G angehört.

Denn gäbe es zwei solche Stellen ω' und ω'', so würde die Funktion $J(\omega)$ den Wert

$$a = J(\omega') = J(\omega'')$$

an zwei Stellen (ω' und ω'') im Gebiete G annehmen.

Wir schließen ferner:

Wenn

$$J(\omega') = J(\omega)$$

ist, so sind ω' und ω äquivalente Punkte.

Denn ist ω_0 der zu ω äquivalente Punkt des Gebietes G, sowie ω_0' der zu ω' äquivalente Punkt des Gebietes G, so folgt aus

$$J(\omega_0') = J(\omega_0),$$

daß ω_0' mit ω_0 zusammenfällt. Folglich sind ω und ω' demselben Punkte ω_0 und also auch einander äquivalent.

Betrachten wir nun weiter zwei Punkte

$$\omega = x + iy, \qquad \omega^* = -x + iy,$$

welche Spiegelpunkte bezüglich der Achse der rein imaginären Zahlen sind!

Die entsprechenden Werte

$$h = e^{2i\pi\omega} = e^{2i\pi x - 2\pi y}, \qquad h^* = e^{2i\pi\omega^*} = e^{-2i\pi x - 2\pi y}$$

sind konjugiert. Nach der Definitionsgleichung (43) sind daher auch $J(\omega)$ und $J(\omega^*)$ konjugiert.

Soll nun für einen Punkt ω des Gebietes G der Wert von $J(\omega)$ reell sein, so muß

$$J(\omega) = J(\omega^*)$$

und folglich müssen die Punkte ω und ω^* einander äquivalent sein. Dieses ist aber offenbar nur dann der Fall, wenn ω auf dem Rande von G oder auf der Achse der rein-imaginären Zahlen liegt.

Also ergibt sich:

Die Funktion $J(\omega)$ nimmt alle reellen Werte (und jeden nur ein Mal) an, wenn ω die Ränder CA, AB von G und das in G liegende Stück der Achse der rein-imaginären Zahlen durchläuft.

Endlich bestimmen wir noch die Werte, welche $J(\omega)$ in den Randpunkten A und B des Gebietes G besitzt. Der Punkt A ist der Repräsentant der dritten Einheitswurzel

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}.$$

Wenn nun $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ eine imaginäre dritte Einheitswurzel ist, so zerstören sich in der Summe

$$\frac{1}{60} g_2(\omega_1, \omega_2) = \sum_{m_1}\sum_{m_2} \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^4} = \frac{1}{\omega_2^4}\sum_{m_1}\sum_{m_2}\frac{1}{(m_1\omega + m_2)^4}$$

die Glieder zu je dreien; nämlich, es ist $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ und daher

$$\frac{1}{(m_1\omega + m_2)^4} + \frac{1}{((m_2 - m_1)\omega - m_1)^4} + \frac{1}{(-m_2\omega + m_1 - m_2)^4}$$
$$= \frac{1}{(m_1\omega + m_2)^4}\left[1 + \frac{1}{\omega^4} + \frac{1}{\omega^8}\right] = 0.$$

Im Punkte A ist also

$$J(\omega) = \frac{g_2^3(\omega_1, \omega_2)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)} = 0. \tag{49}$$

Der Wert von $J(\omega)$ im Punkte B ergibt sich, zugleich mit einigen anderen bemerkenswerten Resultaten, auf folgendem Wege.

Wir setzen zur Abkürzung

$$g_3 \equiv g_3(\omega_1, \omega_2) = 140\sum_{m_1}\sum_{m_2}\frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^6} \tag{50}$$

und haben dann auch nach (33) und (34)

$$(51)\qquad g_3 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 \left[\frac{1}{216} - \frac{7}{3}\sum_{r=1}^{\infty} \psi_5(r) h^r\right].$$

Nun gelten für die Funktion

$$(52)\qquad J_1(\omega) = \frac{g_3^{\,2}}{\Delta} = \frac{\left[\frac{1}{126} - \frac{7}{3}\sum\limits_{r=1}^{\infty} \psi_5(r) h^r\right]^2}{h\prod\limits_{r=1}^{\infty}(1-h^r)^{24}}$$

dieselben Schlüsse, die wir oben auf die Funktion $J(\omega)$ angewandt haben. Insbesondere nimmt $J_1(\omega)$ für äquivalente Argumente stets denselben Wert an und im Gebiete G erhält $J_1(\omega)$ jeden Wert ein und nur ein Mal; im unendlich fernen Punkte von G hat $J_1(\omega)$ ebenso wie $J(\omega)$ den Wert ∞.

Aus diesen Tatsachen folgt, daß $J_1(\omega)$ und $J(\omega)$ lineare Funktionen von einander sind, daß also eine Gleichung der Gestalt

$$(53)\qquad J(\omega) = aJ_1(\omega) + b = a\cdot\frac{g_3^{\,2}}{\Delta} + b$$

besteht, wo a und b Konstante bedeuten.

Schreiben wir diese Gleichung in der Form

$$(54)\quad \left[\frac{1}{12} + 20\sum \psi_3(r) h^r\right]^3 = a\left[\frac{1}{216} - \frac{7}{3}\sum \psi_5(r) h^r\right]^2 + b\cdot h\prod(1-h^r)^{24},$$

so ergibt der Vergleich der Koeffizienten von h^0 und h^1 auf beiden Seiten

$$a = 27,\qquad b = 1.$$

Die Gleichungen (53) und (54) lauten somit

$$(55)\qquad J(\omega) = 27\cdot\frac{g_3^{\,2}}{\Delta} + 1$$

resp.

$$(56)\qquad g_2^{\,3} = 27 g_3^{\,2} + \Delta.$$

Der Punkt B ist der Repräsentant von $\omega = i$.

Wenn aber $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2} = i$ ist, so zerstören sich in der Summe (50), wie man leicht erkennt, die Glieder zu je vieren; daher ist dann $g_3 = 0$. Aus (55) folgt schließlich:

Im Punkte B ist

$$(57)\qquad J(\omega) = 1.$$

Aus den hiermit bewiesenen Grundeigenschaften der Funktion $J(\omega)$ leitet man ohne Schwierigkeit noch die Tatsache ab, daß diese Funktion

die Abbildung der positiven Halbebene auf eine unendlich-blättrige Riemannsche Fläche vermittelt, deren Blätter an den Stellen 0, 1 und ∞ zu je drei, bez. je zwei bez. unendlich vielen im Cyklus zusammenhängen.*)

§ 6.

Anwendung auf die Theorie der elliptischen Funktionen.

Die Weierstraßsche Funktion $\wp(u)$ mit den Perioden ω_1 und ω_2 wird bekanntlich durch die Gleichung

$$(58)\qquad \wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{m_1}\sum_{m_2}\left[\frac{1}{(u - m_1\omega_1 - m_2\omega_2)^2} - \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2}\right]$$

definiert. Sie genügt, wie man von dieser Definition ausgehend leicht beweist, der Differentialgleichung

$$(59)\qquad \wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3,$$

wobei

$$(60)\qquad g_2 = 60\sum_{m_1}\sum_{m_2}\frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^4},\quad g_3 = 140\sum_{m_1}\sum_{m_2}\frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^6}$$

gesetzt ist. Von den Werten dieser Größen g_2 und g_3 weiß man, daß die aus ihnen zusammengesetzte „Diskriminante"

$$(61)\qquad \Delta = g_2^3 - 27g_3^2$$

von Null verschieden ist.

Es ist nun eine für die Theorie der Funktion $\wp(u)$ fundamentale Frage, ob die Perioden ω_1 und ω_2 stets so gewählt werden können, daß g_2 und g_3 vorgeschriebene Werte erhalten, die nur der Bedingung genügen, daß die aus ihnen berechnete Diskriminante Δ nicht Null ist.

Statt nun diese Frage, wie es in den üblichen Darstellungen der Theorie der elliptischen Funktionen geschieht, durch die Diskussion der Differentialgleichung (59) zu behandeln, kann man sie in sehr kurzer und einfacher Weise auf Grund der oben entwickelten Theorie der Funktion $J(\omega)$ erledigen. In der Tat, es seien ω_1 und ω_2 aus den Gleichungen

$$(62)\qquad g_2(\omega_1, \omega_2) = c_2,\qquad g_3(\omega_1, \omega_2) = c_3$$

zu bestimmen, wo c_2 und c_3 gegebene Werte bezeichnen, für die

$$(63)\qquad c_2^3 - 27c_3^2 = c$$

von Null verschieden ist. Die Gleichungen (62) sind dann und nur dann erfüllt, wenn die Gleichungen

$$(64)\qquad \frac{g_2(\omega_1, \omega_2)}{g_3(\omega_1, \omega_2)} = \frac{c_2}{c_3},\qquad \frac{g_2^3(\omega_1, \omega_2)}{g_3^2(\omega_1, \omega_2)} = \frac{c_2^3}{c_3^2}$$

*) F. Klein, a. a. O., S. 121.

bestehen, von welchen die zweite auch durch

$$(64') \qquad \frac{g_2^3(\omega_1, \omega_2)}{g_2^3(\omega_1, \omega_2) - 27\, g_3^2(\omega_1, \omega_2)} = \frac{c_2^3}{c}$$

ersetzt werden kann. Betrachten wir nun

$$\omega_2 \quad \text{und} \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \omega$$

als zu bestimmende Größen, so schreiben sich die Gleichungen (64), (64′) so:

$$(65) \qquad \omega_2^2 = \frac{c_2}{c_3} \cdot \frac{g_3(\omega, 1)}{g_2(\omega, 1)}, \qquad J(\omega) = \frac{c_2^3}{c}.$$

Nun weiß man, daß die letzte Gleichung stets Lösungen besitzt (von denen eine einzige im Gebiete G liegt). Hat man eine solche Lösung ω bestimmt, so ergibt sich ω_2 aus der ersten Gleichung (65) und schließlich ω_1 aus der Gleichung $\omega_1 = \omega \cdot \omega_2$. Die Größen ω_1, ω_2 können also wirklich immer den Gleichungen (62) gemäß bestimmt werden und man erkennt aus den Grundeigenschaften der Funktion $J(\omega)$ überdies leicht, daß ω_1 und ω_2 bis auf lineare homogene ganzzahlige Substitutionen der Determinante ± 1 durch die Gleichungen (62) vollkommen bestimmt sind.

Zürich, 28. September 1903.

Enumeration of Non-Quaternion Number Systems.

By

H. E. HAWKES; New Haven, Conn.

Introduction.

The problem of referring all hypercomplex number systems to a relatively small number of typical forms was first suggested by Hamilton*). Aside from the isolated discussion of triple algebras by De Morgan no systematic attempt was made to solve this problem even for systems of a low order until 1870 when B. Peirce**) published his memoir on Linear Associative Algebra. Peirce derived a set of distinct typical systems of order less than seven, but by means of principles of classification slightly different from those suggested subsequently by Study***) and Scheffers†). The enumeration problem as stated by Scheffers consists in finding all inequivalent, non-reciprocal, irreducible number systems with moduli, where the terms used are defined as follows.

Def. 1. Two systems having the units $e_1, e_2, \cdots, e_n$ and $e_1', e_2', \cdots, e_n'$ respectively are *equivalent* if linear relations exist of the type

$$e_k' = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} e_i \qquad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

when the determinant

$$|a_{ki}| \neq 0 \qquad (k, i = 1, 2, \cdots, n).$$

The a's are assumed to be ordinary complex numbers. Systems of different orders are never equivalent.

Def. 2. A system is *reducible* if its units may be divided into two or more subsystems such that the product of two units in the same sub-

*) *Lectures on Quaternions*, preface, pages 29—31.

**) Reprinted in *American Journal of Mathematics*, vol. 4.

***) *Leipziger Berichte*, page 176, 1889.

†) *Mathematische Annalen*, vol. 39, page 293.

system is in that subsystem, while the product of units in different subsystems vanishes.

Def. 3. Two systems are *reciprocal* to each other when the multiplication table of one can be obtained from that of a system which is equivalent to the other by an interchange of rows and columns.

Def. 4. The *modulus* of a system is a number μ such that for an arbitrary number x,

$$\mu x = x\mu = x.$$

No system can certain more than one modulus.

In the American Journal of Mathematics, vol. 24, I have shown in detail the relation that Peirce's results bear to those of Study and Scheffers, and in vol. 3 of the Transactions of the American Mathematical Society I have developed a direct method for enumerating systems of a low order by means of an extension of Peirce's work. Neither Peirce's method nor those of Study or Scheffers seem adequate for a complete enumeration of the distinct systems of an arbitrary order.

This general enumeration problem is considered in the present paper, in which I deduce a method for enumerating all distinct types of non-quaternion systems of order n from those of order $n-1$. It is noteworthy that by this method the enumeration can be performed with great rapidity, and complications due to the reduction of parameters are almost entirely avoided. A brief resumé of the method is given on page 370 followed by the ennmeration of systems in six units as an illustration.

§ 1.
Non-Quaternion Systems.

Def. 5. A number a is called *idempotent* if $a^2 = a$.

If a system contains an idempotent number, this number may be taken as the unit e_n and the other units of the system so chosen as to fall into the following groups: —

Group I, contains only units e_k such that

$$e_k e_n = e_n e_k = e_k.$$

Group II, contains only units e_k such that

$$e_k e_n = 0; \qquad e_n e_k = e_k.$$

Group III, contains only units e_k such that

$$e_k e_n = e_k; \qquad e_n e_k = 0.$$

Group IV, contains only units e_k such that

$$e_k e_n = e_n e_k = 0\text{*)}.$$

*) This and the following theorem are due to Peirce. For proofs see my paper in Transactions, loc. cit.

When the transformation bringing the system into this form has been performed, the system is *regular* with respect to e_n. The four groups are symbolized respectively by (dd), (dn), (nd), (nn). Evidently e_n itself is in group I, or (dd). The following multiplication table shows the group to which the non-vanishing product of units of any two groups must belong

	(dd)	(dn)	(nd)	(nn)
(dd)	(dd)	(dn)	0	0
(dn)	0	0	(dd)	(dn)
(nd)	(nd)	(nn)	0	0
(nn)	0	0	(nd)	(nn)

It is noticed that if any *unit* is idempotent it must lie in group I or group IV. Idempotent *numbers* might be composed of the sum of units of groups I and II, or in various other combinations of groups.

We now turn to the discussion of non-quaternion systems. Scheffers has divided all number systems into two grand divisions which he calls quaternion and non-quaternion respectively according as the corresponding group is non-integrable or integrable. The necessary and sufficient condition that a system is non-quaternion is that its units may be chosen as follows. Of the n units, $n-r$ $(r\geqq 1)$ are idempotent and may be taken as

$$e_{r+1},\ e_{r+2},\cdots,e_n.$$

The product of two distinct idempotent units vanishes. The remaining units $e_1, e_2, \cdots, e_n$ may be so chosen that

$$e_ie_j=\sum_{k=1}^{l}\lambda_{ijk}e_k \qquad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

where l is less than the lesser of i and j. Also for every unit e_k $(h\leqq r)$ a pair of positive integers $\varkappa$ and ν exist such that

$$\begin{aligned} e_ke_{n-\varkappa}&=e_k; \quad & e_ke_{n-\lambda}&=0 \qquad & (\varkappa<n-r;\ \lambda\neq\varkappa),\\ e_{n-\nu}e_k&=e_k; \quad & e_{n-\lambda}e_k&=0 \qquad & (\nu<n-r;\ \lambda\neq\nu). \end{aligned}$$

If $\nu=\varkappa$, then e_k is called an *even* unit, or of *even character*. If $\nu\neq\varkappa$, e_k is called a *skew* unit, or of *skew character*. In the former case e_k is in group I with respect to $e_{n-\nu}$. If $\nu\neq\varkappa$, e_k is in group II with respect to $e_{n-\nu}$ and in group III with respect to $e_{n-\varkappa}$, but in group IV with respect to all other idempotent units. The modulus is

$$\mu=\sum_{i=1}^{n-r}e_{r+i}$$

This definition may gain in clearness when given in the form of a multiplication table.

	e_1	e_2	e_3	e_4	$\cdots$	e_r	e_{r+1}	e_{r+2}	$\cdots$	e_n
e_1	0	0	0	0	$\cdots$	0	$\gamma_{1\,r+1\,1}e_1$	$\gamma_{1\,r+2\,1}e_1$	$\cdots$	$\gamma_{1n1}e_1$
e_2	0	(1)	(1)	(1)	$\cdots$	(1)	$\gamma_{2\,r+1\,2}e_2$	$\gamma_{2\,r+2\,2}e_2$	$\cdots$	$\gamma_{2n2}e_2$
e_3	0	(1)	(12)	(12)	$\cdots$	(12)	$\gamma_{3\,r+1\,3}e_3$	$\gamma_{3\,r+2\,3}e_3$	$\cdots$	$\gamma_{3n3}e_3$
e_4	0	(1)	(12)	(123)	$\cdots$	(123)	$\gamma_{4\,r+1\,4}e_4$	$\gamma_{4\,r+2\,4}e_4$	$\cdots$	$\gamma_{4n4}e_4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
e_r	0	(1)	(12)	(123)	$\cdots$	$(12\cdots r-1)$	$\gamma_{r\,r+1\,r}e_r$	$\gamma_{r\,r+2\,r}e_r$	$\cdots$	$\gamma_{rnr}e_r$
e_{r+1}	$\gamma_{r+1\,1\,1}e_1$	$\gamma_{r+1\,2\,2}e_2$	$\gamma_{r+1\,3\,3}e_3$	$\gamma_{r+1\,4\,4}e_4$	$\cdots$	$\gamma_{r+1\,r\,r}e_r$	e_{r+1}	0	$\cdots$	0
e_{r+2}	$\gamma_{r+2\,1\,1}e_1$	$\gamma_{r+2\,2\,2}e_2$	$\gamma_{r+2\,3\,3}e_3$	$\gamma_{r+2\,4\,4}e_4$	$\cdots$	$\gamma_{r+2\,r\,r}e_r$	0	e_{r+2}	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
e_n	$\gamma_{n11}e_1$	$\gamma_{n22}e_2$	$\gamma_{n33}e_3$	$\gamma_{n44}e_4$	$\cdots$	$\gamma_{nrr}e_r$	0	0	$\cdots$	e_n

In this table $(1\,2\cdots k)$ represents a linear combination of $e_1, e_2, \cdots, e_k$ with ordinary complex coefficients. Also $\gamma_{sts} = 0$ $(0<s<r+1;\ r<t\leqq n)$ for all values of t but one when it is unity. Similarly $\gamma_{tss} = 0$ for all values of t but one, and this non vanishing value is also unity.

It is noticed that a system whose table is in this form is *regular with respect to each idempotent unit.* The four groups with respect to e_{n-k} are symbolized by I_k, II_k, III_k, IV_k. Starkweather*) has made a general enumeration of all non-quaternion systems in one idempotent unit.

§ 2.

Equivalent Systems.

Theorem I. *If two non-quaternion number systems do not have the same number of idempotent units they are inequivalent***).

---

*) *American Journal of Mathematics*, vols. 21 and 23.

**) This theorem is given by Scheffers loc. cit. page 329 where its proof follows directly from the properties of the characteristic equation. The statement made in theorem X of my paper in the Transactions (loc. cit.) should be modified so as to apply to a small value of n; e. g. $n \leqq 8$.

Let the equivalent systems S and S' have the units

$$e_1, e_2, \cdots, e_r, e_{r+1}, \cdots, e_n,$$

and

$$e'_1, e'_2, \cdots, e'_{r'}, e'_{r'+1}, \cdots, e'_n \qquad (r \mp r')$$

and let the units $e_{r+1}, \cdots, e_n$ and $e'_{r'+1}, \cdots, e'_n$ be idempotent. Since there is only one modulus in any system, we have

$$\mu = \sum_{i=1}^{n-r} e_{r+i} = \sum_{i=1}^{n-r'} e'_{r'+i}.$$

From this equation it is plain that in the equations of transformation

$$(1) \qquad e'_{r'+i} = \sum_{k=1}^{n} a_{r'+ik} e_k \qquad (i = 1, \cdots, n - r')$$

each of the units e_{r+i} $(i = 1, \cdots, n - r)$ must occur at least once, and that with the coefficient 1 since $e'_{r'+i}$ is idempotent. Thus there must be at least $n - r$ equations. No one of the idempotent units of S, say e_{r+t} can occur in two distinct equations of transformation. For suppose that

$$e'_{r'+j} = e_{r+t} + p,$$

$$e'_{r'+l} = e_{r+t} + q \qquad (l, j < n - r')$$

where p and q do not contain e_{r+t}. Since the product of distinct idempotent units vanishes

$$e'_{r'+j} e'_{r'+l} = 0 = e_{r+t} + P$$

where P does not contain e_{r+t} and consequently e_{r+t} cannot cancel from the right hand member. This equation is therefore impossible and S and S' are not equivalent if there are more than $n - r$ equations.

The significance of this theorem is that when we are seeking all types of inequivalent systems of order n, we may make our enumeration for different numbers of idempotent numbers separately without possibility of repetition.

Theorem II. *If S and S' are equivalent there is a one to one correspondance between the idempotent units e_{r+i} and e'_{r+i} $(i = 1, \cdots, n - r)$ such that the number of units in the groups I_k, II_k, III_k, IV_k and I'_h, II'_h, III'_h, IV'_h are respectively the same where e_{n-k} and e'_{n-h} are corresponding units.*

Scheffers has shown*) that if S and S' are equivalent the equations of transformation (1) reduce to

$$e'_{r+i} = e_{r+j} \qquad (i, j \leqq n - r.$$

*) loc cit., page 329.

Thus aside from order the idempotent units are not affected in passing from S to S'. Now the necessary and sufficient condition that a unit in S' be in a given group with respect to e'_{r+1} is that its equation of transformation involves only units of the same group with respect to e_{r+j}. Thus the number of independent units in any group with respect to an idempotent units of S' is precisely the same as the number of units of S in the same group with respect to the corresponding idempotent unit in S.

This theorem puts us in a position to write down all possible combinations of groups with respect to idempotent units into which the remaining r non-idempotent units may fall, and assures us that no two systems in different combinations can be equivalent.

§ 3.

Reducible Systems.

Theorem III. *The necessary and sufficient condition that a system is reducible is that its modulus falls into parts, each of which is the modulus of a certain subsystem.*

This condition is necessary for if the modulus did not fall apart all of it would lie in one subsystem. But since the product of the modulus and any number of the system is non-vanishing the system cannot be reducible since any other subsystem than the one in which the modulus lies could not exist. The condition is sufficient, for suppose

$$\mu = \mu_1 + \mu_2$$

where μ_1 and μ_2 are moduli of the subsystems S_1 and S_2 respectively.

If s_1 and s_2 are numbers of S_1 and S_2 respectively we have

$$\mu_1 s_1 = s_1 \mu_1 = s_1; \quad \mu_2 s_2 = s_2 \mu_2 = s_2; \quad \mu_1 \mu_2 = \mu_2 \mu_1 = 0.$$

Thus

$$s_1 s_2 = s_1 \mu_1 \mu_2 s_2 = 0.$$

Similarly

$$s_2 s_1 = 0.$$

Further, no product of numbers in S_1 can contain units in S_2. For suppose

$$s_1 s_1' = s_1'' + s_2.$$

Then

$$0 = \mu_2 s_1 s_1' = \mu_2 s_2 = s_2.$$

Thus the system is reducible.

Any system in more than one idempotent unit in which there are only even units is reducible, since the units of any group I and its corresponding idempotent unit form a subsystem and the modulus falls

into as many parts as there are idempotent units. A skew unit is in a sense a bond between the two idempotent units with respect to which it is in groups II and III. Both of these idempotent units must fall in the same subsystem if the system is reducible. If either is connected with a third idempotent unit by means of a second skew unit, all three idempotent units and both skew units must lie in the same subsystem. In fact the totality of idempotent and skew units that are connected directly or indirectly by non-vanishing multiplicative relations must fall in the same subsystem. Thus on inspection of any combination of units into groups (by theorem II) we can decide on the reducibility of the systems derived from that combination. For if we start with an idempotent unit and find it connected with every other idempotent unit by a chain of non-vanishing multiplicative relations with skew units, then the whole modulus lies in one subsystem and the system is irreducible. If on the contrary, not all idempotent units are thus connected by the skew units the modulus falls apart and the system is reducible.

§ 4.

Reciprocal Systems.

It is plain from definition 3 and theorem I that reciprocal systems have the same number of idempotent units. Let S and S^{-1} be such systems, with their units so chosen that the table for S passes into that for S^{-1} by an interchange of rows and columns. We may also assume without loss of generality that both systems are in Scheffer's normal form given on page 364. As we pass from S to S^{-1} by interchanging rows and columns we note that the same units constitute groups I_k and IV_k in both S and S^{-1} $(k=0,1,\cdots,n-r-1)$. The units of II_k and III_k pass respectively to III_k and II_k. Thus if from the totality of combinations of the non-idempotent units into groups under theorem II, we erase every combination which differs from another merely by an interchange of the number of units in II_k and III_k $(k=0,1,\cdots,n-r-1)$ we shall erase all combinations which lead to systems reciprocal to those that remain, and only such. In this enumeration only one of each pair of reciprocal systems is retained.

§ 5.

Removal of Parameters.

If the systems corresponding to the various combinations of units into groups for given values of n and r are written in Scheffer's normal

form, we have in every case completely determined the portion of the table which involves the multiplication of the idempotent units either among themselves or with the non-idempotent units. Numerous parameters occur however in the part of the table giving the products of the non-idempotent numbers among themselves. If we apply the multiplication of groups given on page 363 many parameters will be removed. The only problem that remains is to devise rapid means of determining the remaining parameters.

Def. 6. A system is said to be *deleted* by a given unit when that unit is erased from every position which it occupies in the multiplication table of the system.

Def. 7. A number α is *nilfactorial* with respect to β if

$$\alpha\beta = \beta\alpha = 0.$$

Theorem IV. *If a system is deleted by a unit which is nilfactorial with respect to every non-idempotent unit, the deleted system is associative.*

Let e_λ be such a nilfactorial unit. Consider the products

$$(2)\qquad \begin{aligned} e_i \cdot e_j e_k &= e_i \left(\sum_{s=1}^{n} \gamma_{jks} e_s \right) = \sum_{t=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \gamma_{jks} \gamma_{ist} e_t, \\ e_i e_j \cdot e_k &= \left(\sum_{s=1}^{n} \gamma_{ijs} e_s \right) e_k = \sum_{t=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \gamma_{ijs} \gamma_{skt} e_t. \end{aligned}$$

We suppose $i, j, k \neq \lambda$. Since the system is associative, coefficients of the same units in the two products are identical. Since e_λ is nilfactorial with respect to all units but its corresponding idempotent units, we must have

$$(3)\qquad \gamma_{ij\lambda} = \gamma_{jk\lambda} = \gamma_{i\lambda t} = \gamma_{\lambda k t} = 0 \qquad (t = 1, 2, \cdots, n)$$

unless e_i, e_k or e_j are the idempotent units corresponding to e_λ. Thus except in this case the equations among the constants of multiplication which associativity requires are identical before and after deletion, and the deleted systems associative. In the exceptional cases noted an inspection of the two equations given above shows that the associative law is evidently obeyed in the deleted system.

When a system is deleted by e_r the deleted system is, as Scheffers remarks, obviously associative.

We can now assert that when the system is deleted by e_r or by a unit nilfactorial with respect to the non-idempotent units, the system which remains is a non-quaternion system in $n-1$ units of the type we are considering. If we consider that all non-quaternion systems of order $n-1$ are enumerated, the deleted system must be equivalent to one of them.

Theorem V. *If a system is deleted by one or more units so that there remains only a certain idempotent unit and one or more unbroken groups with respect to that unit, the deleted system is associative.*

Suppose for instance that the system is deleted leaving only the totality of units in groups I and II with respect to a certain unit. Let any number in these groups be symbolized by $(dd)+(dn)$. It is evident from the table on page 363 that every term occurring in the product of three numbers in this form occurs in the deleted system as well as in the undeleted system. Thus the deleted system is associative. The proof of the theorem is almost identical when any other groups are left after deletion.

We are now in a position to remove the unnecessary parameters from the system. If S is a system in Scheffers' normal form corresponding to a certain combination of units into groups, we first delete by e_1. The remaining system in $n-1$ units is associative by theorem IV, and the parameters must take on values which render it equivalent to one of the systems in $n-1$ units already derived. Let T be the required transformation. Then assuming that the parameters affecting the units $e_2, \cdots, e_r$ in the undeleted system take on the values which associativity require, apply to the undeleted system the transformation T. The table will then, as far as the units $e_2, \cdots, e_r$ are concerned have the same form as that of a system in $n-1$ units already enumerated. The only parameters remaining are those affecting e_1 which occur throughout the multiplication table where the table on page 363 allows. Continue with deletion by some other available unit of which there is always at least one, namely e_r. This will fix the value of most if not all of the remaining parameters. If any remain delete still again until either all are fixed or may be by an application of the associative law. In no case can more than $n-5$ parameters remain for direct consideration.

When we delete by any of the methods given above we have remaining a system in less than n units in which the units fall into a certain combination of groups. It may be that there are several inequivalent types of systems in this combination. If so we are lead to as many inequivalent systems in n units as there are inequivalent deleted systems.

Theorem VI. *If two systems are deleted by the same method, (i. e. both under theorem IV or V) and the deleted systems are inequivalent, the original systems are inequivalent.*

Suppose the two original systems were equivalent. We should then have in the deleted equations of transformation, equations which would establish equivalence between the deleted systems which contradicts the hypothesis.

§ 6.

Resumé of Method.

We assume that all systems in $n-1$ units are derived, those in one idempotent unit by Starkweather's method, and those in more than one idempotent unit by previous use ot this method. After deciding to enumerate systems say with $n-r$ idempotent units, we write in tabular form the various combinations into groups that can occur, rejecting such combinations as give rise to reducible or reciprocal systems. These can be recognized by inspection as we have seen. Take any one of these combinations and write its multiplication table in Scheffer's normal form, taking care that the order of units is such as to make the requirments of this form and the multiplication of groups as given on page 363 compatible without any sacrifice to the parameters that the associative law does not require. This done assume that the parameters in the products of the units $e_2, e_3, \cdots, e_r$ among themselves are the same as occur in the multiplication table of the non-idempotent units of a system in $n-1$ units having the same arrangement of groups as that of our present system deleted by e_1. If there are λ such inequivalent systems of order $n-1$ we shall have λ inequivalent systems of order n. The unit e_1 will now occur in our multiplication table with a parameter wherever the table on page 363 permits. Take now any other nilfactorial unit, if there be any, if not, take e_r and go through the same process with them that has just been described fore e_1. Proceed in this manner until either all parameters are fixed or all methods of deletion are exhausted. In the latter case the few remaining parameters can easily be properly determined by direct use of the associative law and simple transformations.

§ 7.

Enumeration for $n = 6$.

Since two skew units can connect at most three idempotent units, all systems in more than three idempotent units are reducible. If r is the number of non-idempotent units we first let

$$r = 3.$$

The following table gives the only possible combinations of e_1, e_2, and e_3 into groups after reducible and reciprocal systems have been rejected. Any arrangement of groups which differs from one of the following merely by an interchange of units has been omitted. In fact the order of units is determined by the consideration of the last paragraph rather than by the order indicated by the table.

	1			2			3			4			5		
	e_4	e_5	e_6	e_4	e_5	e_6	e_4	e_5	e_6	e_4	e_5	e_6	e_4	e_5	e_6
e_1	I	IV	IV	I	IV	IV	II	III	IV	II	III	IV	II	III	IV
e_2	II	III	IV	II	IV	III	II	III	IV	III	II	IV	III	IV	II
e_3	II	IV	III	III	II	IV	II	IV	III	II	IV	III	II	III	IV

	6			7			8			9		
	e_4	e_5	e_6	e_4	e_5	e_6	e_4	e_5	e_6	e_4	e_5	e_6
e_1	I	IV	IV	I	IV	IV	II	III	IV	II	IV	III
e_2	III	II	IV	III	II	IV	III	IV	II	II	III	IV
e_3	IV	II	III	IV	III	II	IV	II	III	IV	II	III

Writing combination 1 with the units e_1 and e_3 interchanged we get a system in which one parameter occurs in the product $e_3 \cdot e_2$. If this parameter does not vanish it may be taken as unity. We are then lead to the following inequivalent systems. In the following tables the multiptier and multiplicand are omitted, and for e_k I write k.

$1_3 \cdot 1$

0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	2	0
0	1	0	3	0	0
1	2	3	4	0	0
0	0	0	0	5	0
0	0	0	0	0	6

$1_3 \cdot 2$

0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	2	0
0	0	0	3	0	0
1	2	3	4	0	0
0	0	0	0	5	0
0	0	0	0	0	6

Writing the units of combination in the order given in the table we obtain in a similar manner.

$2_3 \cdot 1$

0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	2
0	0	0	3	0	0
1	2	0	4	0	0
0	0	3	0	5	0
0	0	0	0	0	6

$2_3 \cdot 2$

0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	2
0	0	0	3	0	0
1	2	0	4	0	0
0	0	3	0	5	0
0	0	0	0	0	6

From combinations 3, 4, 5, 6, 7 and 8 we have immediately

3_3

0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	2	0
0	0	0	0	0	3
1	2	3	4	0	0
0	0	0	0	5	0
0	0	0	0	0	6

4_3

0	0	0	0	1	0
0	0	0	2	0	0
0	0	0	0	0	3
1	0	3	4	0	0
0	2	0	0	5	0
0	0	0	0	0	6

5_3

0	0	0	0	1	0
0	0	0	2	0	0
0	0	0	0	3	0
1	0	3	4	0	0
0	0	0	0	5	0
0	2	0	0	0	6

6_3

0	0	0	1	0	0
0	0	0	2	0	0
0	0	0	0	0	3
1	0	0	4	0	0
0	2	3	0	5	0
0	0	0	0	0	6

7_3

0	0	0	1	0	0
0	0	0	2	0	0
0	0	0	0	3	0
1	0	0	4	0	0
0	2	0	0	5	0
0	0	3	0	0	6

8_3

0	0	0	0	1	0
0	0	0	2	0	0
0	0	0	0	3	0
1	0	0	4	0	0
0	0	0	0	5	0
0	2	3	0	0	6

From table 9 we obtain

$9_3 \cdot 1$

0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	2	0
0	0	0	0	0	3
1	2	0	4	0	0
0	0	3	0	5	0
0	0	0	0	0	6

$9_3 \cdot 2$

0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	2	0
0	0	0	0	0	3
1	2	0	4	0	0
0	0	3	0	5	0
0	0	0	0	0	6

Let now

$$r = 4.$$

The table of combinations into groups is as follows:

	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11	
	e_5	e_6	e_5	e_6	e_5	e_6	e_5	e_6	e_5	e_6	e_5	e_6	e_5	e_6	e_5	e_6	e_5	e_6	e_5	e_6	e_5	e_6
e_1	II	III	II	III	II	III	II	III	I	IV	I	IV	I	IV	I	IV	II	III	II	III	II	III
e_2	I	IV	I	IV	II	III	III	II	IV	I	IV	I	II	III	II	III	II	III	III	II	II	III
e_3	I	IV	I	IV	I	IV	I	IV	II	III	II	III	II	III	II	III	II	III	III	II	III	II
e_4	I	IV	IV	I	I	IV	I	IV	II	III	III	II	II	III	III	II	II	III	III	II	III	II

Since there six inequivalent systems one of which is idempotent*), we get the following six inequivalent systems in six units under combination 1.

$1_4 \cdot 1$

0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	2	0
0	0	0	2	3	0
0	0	2	3	4	0
1	2	3	4	5	0
0	0	0	0	0	6

$1_4 \cdot 2$

0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	2	0
0	0	2	2	3	0
0	0	-2	$\lambda 2$	4	0
1	2	3	4	5	0
0	0	0	0	0	6

$1_4 \cdot 3$

0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	2	0
0	0	0	0	3	0
0	0	0	2	4	0
1	2	3	4	5	0
0	0	0	0	0	6

$1_4 \cdot 4$

0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	2	0
0	0	2	0	3	0
0	0	0	2	4	0
1	2	3	4	5	0
0	0	0	0	0	6

$1_4 \cdot 5$

0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	2	0
0	0	0	2	3	0
0	0	-2	0	4	0
1	2	3	4	5	0
0	0	0	0	0	6

$1_5 \cdot 6$

0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	2	0
0	0	0	0	3	0
0	0	0	0	4	0
1	2	3	4	5	0
0	0	0	0	0	6

*) Scheffers loc. cit. 355.

Writing combination 2 in a table with the same order of units, and deleting by e_4 we are lead te two inequivalent systems corresponding to Scheffers' V_2 and V_{14}.

$2_4 \cdot 1$

0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	2	0
0	0	2	0	3	0
0	0	0	0	0	4
1	2	3	0	5	0
0	0	0	4	0	6

$2_4 \cdot 2$

0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	2	0
0	0	0	0	3	0
0	0	0	0	0	4
1	2	3	0	5	0
0	0	0	4	0	6

Writing combination 3 in the same order as is used in the table we have, after all possible deletions, one parameter. Obvious transformations lead us to the form following distinct systems.

$3_4 \cdot 1$

0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	3	0
0	1	0	3	4	0
1	2	3	4	5	0
0	0	0	0	0	6

$3_4 \cdot 2$

0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	3	0
0	0	0	3	4	0
1	2	3	4	5	0
0	0	0	0	0	6

$3_4 \cdot 3$

0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	3	0
0	1	0	0	4	0
1	2	3	4	5	0
0	0	0	0	0	6

$3_4 \cdot 4$

0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	3	0
0	0	0	0	4	0
1	2	3	4	5	0
0	0	0	0	0	6

Taking the units of combination 4 in the opposite order from that of the table we get similarly

$4_4 \cdot 1$

0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	2	0
0	0	0	0	3	0
0	0	1	0	0	4
1	2	0	4	5	0
0	0	3	0	0	6

$4_4 \cdot 2$

0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	2	0
0	0	0	0	3	0
0	0	1	0	0	4
1	2	0	4	5	0
0	0	3	0	0	6

$4_4 \cdot 3$

0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	2	0
0	0	0	0	3	0
0	0	0	0	0	4
1	2	0	4	5	0
0	0	3	0	0	6

$4_4 \cdot 4$

0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	2	0
0	0	0	0	3	0
0	0	0	0	0	4
1	2	0	4	5	0
0	0	3	0	0	6

Writing combination 5 in the opposite order of units, after deletion according to theorem VI, we obtain,

$5_4 \cdot 1$

0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	2
0	0	0	0	0	3
0	1	0	0	4	0
1	2	0	4	5	0
0	0	3	0	0	6

$5_4 \cdot 2$

0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	0	3
0	1	0	0	4	0
1	2	0	4	5	0
0	0	3	0	0	6

$5_4 \cdot 3$

0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	2
0	0	0	0	0	3
0	0	0	0	4	0
1	2	0	4	5	0
0	0	3	0	0	6

$5_4 \cdot 4$

0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	0	3
0	0	0	0	4	0
1	2	0	4	5	0
0	0	3	0	0	6

Writing combination 6 in the order given in the table of groups, and applying theorem VI we obtain

$6_4 \cdot 1$

0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	2
0	0	0	1	0	3
0	0	2	0	4	0
1	0	3	0	5	0
0	2	0	4	0	6

$6_4 \cdot 2$

0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	0	3
0	0	2	0	4	0
1	0	3	0	5	0
0	2	0	4	0	6

$6_4 \cdot 3$

0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	2
0	0	0	1	0	3
0	0	0	0	4	0
1	0	3	0	5	0
0	2	0	4	0	6

$6_4 \cdot 4$

0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	0	3
0	0	0	0	4	0
1	0	3	0	5	0
0	2	0	4	0	6

Writing combination 7 in opposite order of units after an obvious application of the associative law we obtain

$7_4 \cdot 1$

0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	0	3
0	0	1	0	4	0
1	2	3	4	5	0
0	0	0	0	0	6

$7_4 \cdot 2$

0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	0	3
0	0	0	0	4	0
1	2	3	4	5	0
0	0	0	0	0	6

Writing the units of combination 8 in the order given in the table except for the interchange of e_1 and e_2, after use of the associative law on the products $e_1 e_4 e_3$ and $e_3 e_4 e_3$ we obtain

$8_4 \cdot 1$

0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	2	0
0	0	0	0	0	3
0	0	0	0	4	0
1	2	3	0	5	0
0	0	0	4	0	6

$8_4 \cdot 2$

0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	2	0
0	0	0	2	0	3
0	0	0	0	4	0
1	2	3	0	5	0
0	0	0	4	0	6

$8_4 \cdot 3$

0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	2	0
0	0	0	0	0	3
0	0	0	0	4	0
1	2	3	0	5	0
0	0	0	4	0	6

From combinations 9, 10, 11, we obtain directly

9_4

0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	0	3
0	0	0	0	0	4
1	2	3	4	5	0
0	0	0	0	0	6

10_4

0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	2	0
0	0	0	0	3	0
0	0	0	0	4	0
1	0	0	0	5	0
0	2	3	4	0	6

11_4

0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	3	0
0	0	0	0	4	0
1	2	0	0	5	0
0	0	3	4	0	6

Yale University, January 27, 1903.

Über symmetrische Matrices.

Von

Josef Kürschák aus Budapest.

Es bedeute M_{nn} die Matrix

$$\left\|\begin{matrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{matrix}\right\|,$$

wo

$$y_{ik} = y_{ki},$$

und überhaupt bezeichne M_{rs} für $r \leqq n$, $s \leqq n$ die Matrix

$$\left\|\begin{matrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1s} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{r1} & y_{r2} & \cdots & y_{rs} \end{matrix}\right\|.$$

Dann zeigt eine einfache Rechnung, daß jede lineare Funktion der Determinanten, die sich aus M_{nn} bilden lassen, folgendem Systeme von homogenen linearen Differentialgleichungen genügt:

$$(S_n) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 F}{\partial y_{ik} \partial y_{\mu\nu}} (1 + \delta_{ik})(1 + \delta_{\mu\nu}) + \\ &\frac{\partial^2 F}{\partial y_{i\mu} \partial y_{\nu k}} (1 + \delta_{i\mu})(1 + \delta_{\nu k}) + \qquad (i \leqq k \leqq \mu \leqq \nu = 1, 2, \cdots, n) \\ &\frac{\partial^2 F}{\partial y_{i\nu} \partial y_{k\mu}} (1 + \delta_{i\nu})(1 + \delta_{k\mu}) = 0, \end{aligned}$$

wo δ_{ik} die Null oder Eins ist, je nachdem i und k verschieden oder gleich sind.

Es sollen nun umgekehrt die folgenden zwei Sätze bewiesen werden*):

(I) *Jede Lösung von* (S_n) *ist eine lineare Funktion der Determinanten der Matrix* M_{nn}.

(II) *Jede solche Lösung von* (S_n), *die nur die Elemente von* $M_{\nu n}$ *enthält, ist eine lineare Funktion der Determinanten dieser Matrix* $M_{\nu n}$.

Beide Sätze haben auch für $n = 1$ einen Sinn und besagen dann, daß jede Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_{11}^2} = 0$$

eine lineare Funktion von y_n ist. Beim Beweise für ein beliebiges n dürfen wir also beide Sätze für $n - 1$ als richtig betrachten.

Ist nun F irgend eine Lösung von (S_n), so ist für $i = k = \mu = \nu = n$

$$12 \frac{\partial^2 F}{\partial y_{nn}^2} = 0.$$

Es ist also F eine lineare Funktion von y_{nn}, deren Koeffizienten von den Elementen der Matrix M_{n-1n} abhängige Größen sind. Der Koeffizient $\frac{\partial F}{\partial y_{nn}}$, mit dem y_{nn} multipliziert ist, enthält überhaupt nur die Elemente von $M_{n-1,n-1}$, denn für $i < n$ und $k = \mu = \nu = n$ ist

$$6 \frac{\partial}{\partial y_{in}} \left(\frac{\partial F}{\partial y_{nn}} \right) = 0.$$

Da F auch dem Teilsysteme (S_{n-1}) genügt, so gilt dasselbe auch vom besagten Koeffizienten $\frac{\partial F}{\partial y_{nn}}$. Für (S_{n-1}) und $M_{n-1,n-1}$ betrachten wir aber die Sätze (I) und (II) als bewiesen, mithin ist $\frac{\partial F}{\partial y_{nn}}$ eine lineare Funktion der Determinanten von $M_{n-1,n-1}$. Das Produkt einer solchen Determinante mit y_{nn} ist gleich der Summe einer gewissen Determinante von M_{nn} und einer Funktion, die nur die Elemente von M_{nn-1}, oder, was dasselbe ist, nur von M_{n-1n} enthält. Es ist folglich

$$F = G_{n-1} + F_n,$$

---

*) Bezüglich der einfachsten Fälle des Satzes (I) vergleiche man folgende Abhandlungen, wo dieser Satz auch eine interessante Anwendung findet:

A. Hirsch, *Über eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung.* Math. Annalen Bd. 49, S. 49—72,

W. Hertz, *Über partielle Differentialgleichungen, die in der Variationsrechnung vorkommen.* Inaugural-Dissertation, der Universität zu Kiel vorgelegt. Göttingen 1903.

Obwohl das Beweisverfahren von Herrn Wilhelm Hertz mir bedenklich erscheint, verdanke ich seiner mir in liebenswürdiger Weise überreichten Dissertation nicht nur die unmittelbare Veranlassung zu dieser Note, sondern seine Einteilung des Systems (S_n) in Gruppen bot auch die Grundlage zu meinen Untersuchungen. Es ist dies freilich aus meiner kurzgefaßten Darstellung kaum ersichtlich.

wo in G_{n-1} nur die Elemente von $M_{n-1\,n}$ vorkommen und F_n eine homogene lineare Funktion derjenigen Determinanten von M_{nn} ist, die y_{nn} wirklich enthalten.

Setzen wir jetzt voraus, es sei F auf die Gestalt

$$F = G_r + \sum_{k=r+1}^{n} F_k$$

gebracht, wo F_k eine homogene lineare Funktion der Determinanten von M_{kn} bedeutet, in denen wenigstens eine der Größen

$$y_{kk},\ y_{kk+1},\ \cdots,\ y_{kn}$$

vorkommt, hingegen G_r nur mehr die Elemente von M_{rn} enthält. Dann können wir F in folgender Weise auf die Gestalt

$$F = G_{r-1} + \sum_{k=r}^{n} F_k$$

bringen.

Da $F, F_{r+1}, \cdots, F_n$ sämtlich Lösungen von (S_n) sind, gilt dasselbe auch von G_r. Wird aber auf G_r die Gleichung von (S_n) angewandt, in der $i = k = r$ und $\mu = \nu = n$, so ergibt sich

$$4\,\frac{\partial^2 G_r}{\partial y_{rr}\,\partial y_{nn}} + 2\,\frac{\partial^2 G_r}{\partial y_{rn}^2} = 2\,\frac{\partial^2 G_r}{\partial y_{rn}^2} = 0,$$

also ist G_r in y_{rn} linear. In der Formel

$$G_r = [G_r]_{y_{rn}=0} + \frac{\partial G_r}{\partial y_{rn}}\,y_{rn}$$

enthält $\frac{\partial G}{\partial y_{rn}}$ nur die Elemente von $M_{r-1,n-1}$; denn wenn man in (S_n) die Lösung G_r einsetzt, so erhält man für $i = k = r \leqq \mu < \nu = n$

$$4\,\frac{\partial^2 G_r}{\partial y_{rr}\,\partial y_{nn}} + 2(1+\delta_{r\mu})\,\frac{\partial^2 G_r}{\partial y_{r\mu}\,\partial y_{rn}} = 2(1+\delta_{r\mu})\,\frac{\partial}{\partial y_{r\mu}}\left(\frac{\partial G_r}{\partial y_{rn}}\right) = 0.$$

Außerdem genügt $\frac{\partial G_r}{\partial y_{rn}}$ dem Teilsysteme (S_{n-1}), ist also eine lineare Funktion der Determinanten von $M_{r-1,n-1}$. Das Produkt einer solchen Determinante mit y_{rn} ist gleich der Summe einer gewissen Determinante von M_{rn} und einer Funktion, die nur die Elemente von $M_{r-1\,n}$ enthält. Es ist folglich

$$G_r = A + F_r^{(1)},$$

wo $F_r^{(1)}$ eine homogene lineare Funktion der Determinanten von M_{rn} bedeutet, die y_{rn} wirklich enthalten, und A eine solche Lösung von (S_n) ist, in der außer den Elementen von M_{rn-1} nur

$$y_{1n},\ y_{2n},\ \cdots,\ y_{r-1\,n}$$

vorkommen.

Setzt man in (S_n) anstelle von F die Lösung A, so wird für $i=k<r$ und $\mu=\nu=n$

$$4\frac{\partial^2 A}{\partial y_{ii}\partial y_{nn}}+2\frac{\partial^2 A}{\partial y_{in}^2}=2\frac{\partial^2 A}{\partial y_{in}^2}=0,$$

also ist

$$A=C+C_1 y_{1n}+\cdots+C_i y_{in}+\cdots+C_{r-1}y_{r-1n},$$

wo die Koeffizienten $C, C_1, \cdots C_{r-1}$ nur mehr die Elemente von M_{rn-1} enthalten. Außerdem ergibt sich für $0<i<k=r\leqq\mu<\nu=n$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y_{ir}\partial y_{\mu n}}+\frac{\partial^2 A}{\partial y_{i\mu}\partial y_n}+(1+\delta_{r\mu})\frac{\partial^2 A}{\partial y_{in}\partial y_{r\mu}}=(1+\delta_{r\mu})\frac{\partial C_i}{\partial y_{r\mu}}=0;$$

in $C_1, C_2, \cdots, C_{r-1}$ können also überhaupt nur die Elemente von $M_{r-1,n-1}$ vorkommen.

C enthält, wie gesagt, nur die Elemente von M_{rn-1} und ist natürlich eine Lösung von (S_{n-1}). Folglich ist

$$C=C_0+F_r^{(2)},$$

wo $F_r^{(2)}$ eine homogene lineare Funktion der Determinanten von M_{rn-1} ist, die wenigstens eine der Größen

$$y_{rr}, y_{rr+1}, \cdots, y_{rn-1}$$

enthalten, C_0 aber eine lineare Funktion der Determinanten von $M_{r-1,n-1}$ bedeutet. Es ist demnach

$$G_r=C_0+C_1 y_{1n}+\cdots+C_{r-1}y_{r-1n}+F_r^{(1)}+F_r^{(2)},$$

wo

$$G_{r-1}=C_0+C_1 y_{1n}+\cdots+C_{r-1}y_{r-1n}$$

nur die Elemente von M_{r-1n} enthält und

$$F_r=F_r^{(1)}+F_r^{(2)}$$

eine homogene lineare Funktion der Determinanten von M_{rn} ist, in denen wenigstens eine der Größen

$$y_{rr}, y_{rr+1}, \cdots, y_{rn-1}, y_{rn}$$

vorkommt. Damit haben wir aber F auf die Gestalt

$$F=G_{r-1}+F_r+F_{r+1}+\cdots+F_n$$

gebracht.

Wird dieses Verfahren für $r=n-1, n-2, \cdots, 3, 2$ wiederholt, so ergibt sich aus

$$F=G_{n-1}+F_n$$

allmählich

$$\begin{aligned}F&=G_{n-2}+F_{n-1}+F_n=\\&=G_{n-3}+F_{n-2}+F_{n-1}+F_n=\\&\cdots\cdots\cdots\\&=G_1+F_2+F_3+\cdots+F_n.\end{aligned}$$

Endlich können die obigen Überlegungen ohne wesentliche Änderungen auch für $r = 1$ angewandt werden, und sie ergeben dann

$$G_1 = F_0 + F_1,$$

wo F_0 eine Konstante und F_1 eine homogene lineare Funktion von

$$y_{11}, y_{12}, \cdots, y_{1n}$$

ist. Wir haben also

$$F = F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_r + \cdots + F_n.$$

Enthält F nur die Elemente von M_{rn}, so ist bei diesem Verfahren

$$F_{r+1} = F_{r+2} = \cdots = F_{rn} = 0.$$

Damit sind beide Sätze für (S_n) bewiesen.

Semmering, den 20. Juli 1903.

Über den wissenschaftlichen Nachlaß Julius Plückers.

Von

A. Schoenflies in Königsberg i./Pr.

Ich habe kürzlich, zusammen mit Herrn F. Pockels, an andrer Stelle*) darüber berichtet, daß ein wissenschaftlicher Nachlaß von Julius Plücker existiert, der auf der Göttinger Universitätsbibliothek deponiert werden soll. Als ich im Verein mit Herrn F. Pockels an die Herausgabe von Plückers wissenschaftlichen Abhandlungen**) ging, konnte die Existenz eines Nachlasses leider nicht festgestellt werden. Was von ihm heute noch auf größeres mathematisches Interesse Anspruch erheben kann, soll hier mitgeteilt werden. Dahin gehört in erster Linie das Manuskript der aus dem Jahre 1826 stammenden Arbeit über sich mehrfach berührende Kegelschnitte, die Plücker an Gergonne sandte, und die den bekannten Prioritätsstreit zwischen Poncelet und Gergonne resp. Plücker zur Folge hatte. Gergonne hatte die Arbeit in zwei Teile zerlegt***), dem ersten Teil eine dualistische Form gegeben und den Hinweis hinzugefügt, daß die von Plücker behandelten Aufgaben bereits von Poncelet in seinem Traité des propriétés projectives eine Lösung gefunden hatten. Bei Poncelet entstand daher die Meinung, Plücker habe ein Plagiat begangen, während Plücker, wie er selbst sagte, den ersten Teil nur wiedererkannte, weil sein Name an der Spitze stand†). Die Veröffentlichung dieser Arbeit liegt daher im historischen Interesse. Die Arbeit hat aber auch darüber hinaus eine besondere Bedeutung; denn in ihr tritt zum ersten Mal die geometrische Deutung vielfacher Wurzeln resp. eine organische Beziehung zwischen den Hauptsätzen der Algebra und der gegenseitigen Lage der ebenen Gebilde zu Tage; eine Beziehung, die

*) Nachrichten d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1903, Sitzung vom 25. Juli.

**) Julius Plückers Gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen. Im Auftrag der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen herausgegeben von A. Schoenflies und F. Pockels, 1895 u. 1896.

***) Ihr entsprechen Nr. 2 u. 3 von Bd. I der Ges. Abhandlungen.

†) Eine genauere Darstellung findet sich Bd. I der Ges. Abhandlungen; S. 592.

Plücker, wie ich a. a. O. ausführte, als den echten Weiterführer der Ideen von Descartes erscheinen läßt, und den Druck der Arbeit schon deswegen rechtfertigt.

An zweiter Stelle teile ich dasjenige mit, was sich auf Plückers mechanische Ideen bezieht, genauer auf diejenigen, die er im Anschluß an die Liniengeometrie bei sich ausgebildet hat.

Endlich folgt noch eine Bemerkung über Plückers Untersuchung der Wellenfläche zweiachsiger Krystalle.

I. Die an Gergonne gesandte Abhandlung.

I. Soient:

$$y^2 + 2Axy + Bx^2 + 2Cy + 2Dx + E = 0,$$
$$y^2 + 2axy + bx^2 + 2cy + 2dx + e = 0$$

les équations de deux lignes du second ordre rapportées à des axes quelconques, formant un angle quelconque. Supposons que les deux courbes se coupent, si nous voulons alors que l'un des points qui leur est commun, soit pris pour origine des coordonnées, il faut que dans l'une et l'autre équation le terme indépendant de x et y disparaisse, afin que x et y puissent être en même temps égal à zéro. On a donc

$$E = e = 0$$

et nos équations seront de la forme:

$$y^2 + 2Axy + Bx^2 + 2Cy + 2Dx = 0,$$
$$y^2 + 2axy + bx^2 + 2cy + 2dx = 0.$$

Si dans ces deux équations, après les avoir résolues par rapport à y, l'on pose $x = 0$ ou bien si, ayant fait disparaitre dans les équations mêmes les termes affectés de x, et qu'on les résout ensuite, on trouvera les valeurs correspondants de y qui indiquent les intersections de nos deux courbes avex l'axe des y. Les deux couples de valeurs qu'on obtiendra seront:

$$y = 0, \qquad y = -2C,$$
$$y = 0, \qquad y = -2c.$$

Veut-on que l'axe des y coupe les deux courbes aux deux mêmes points, il faut qu'on ait:

$$C = c.$$

Vent-on enfin que ces deux points se réunissent en un seul point, pour lequel nous choissirons l'origine des coordonnées, ou ce qui revient au même, veut-on que l'axe des y soit tangent aux deux coniques à l'origine même, il faut supposer:

$$C = c = 0.$$

Nos équations primitives ainsi modifiées:

(1) $$y^2 + 2Axy + Bx^2 + 2Dx = 0,$$

(2) $$y^2 + 2axy + bx^2 + 2dx = 0,$$

exprimeront donc deux sections coniques, qui ont entre elles un contact du premier ordre (contact de 2 points), c'est à dire deux points d'intersection coincidants et qui sont rapportées a leur tangente commune comme axe des y, l'autre axe formant avec celui-ci un angle quelconque; le point de contact étant l'origine des coordonnées.

II. En combinant les deux équations (1) et (2) d'une manière quelconque, on aura l'équation d'un troisième lieu géométrique passant par leurs points d'intersection; la nature de cette troisième courbe dépendra uniquement de la manière, dont nous combinons, et sera indiquée par la forme de l'équation résultante. En prenant donc, pour obtenir l'équation la plus simple, la différence de (1) et (2), nous aurons:

$$2(A-a)xy + (B-b)x^2 + 2(D-d)x = 0$$

l'équation d'un système de deux lignes droites, représentées séparément par les équations:

(3) $$x = 0,$$
$$2(A-a)y + (B-b)x + 2(D-d) = 0.$$

La première de ces lignes droites n'est autre chose que l'axe des y, c'est à dire la tangente à l'origine des coordonnées. L'équation (3) représente une ligne droite qui passe par les autres points d'intersection des deux courbes, qui ne peuvent donc être qu'au nombre de deux. En autres termes c'est l'équation de la corde commune à nos deux lignes du second ordre. Dans la discussion de cette équation (3) est renfermé toute la théorie de l'osculation dans les courbes du second degré et cette discussion s'offrira d'elle même et sans aucun calcul. —

III. Si l'on suppose que la corde commune à nos deux sections coniques passe par l'origine qui est en même temps leur point de contact, c'est d'exiger que trois points d'intresection des deux courbes se réunissent en un seul point, ou encore que les deux courbes aient entre elles un contact du second ordre (contact de trois points). Mais pour que la ligne droite en question passe par l'origine, il faut que le terme constant disparaisse de son équation:

$$2(A-a)y + (B-b)x + 2(D-d) = 0$$

il faut qu'on ait:

(4) $$D = d,$$

c'est donc la condition de l'osculation simple.

L'équation de la corde devient alors

$$2(A-a)y+(B-b)x=0, \tag{5}$$

équation qu'on peut simplifier encore en observant que la direction de l'axe des x étant quelconque, on pourra la choisir de manière que cet axe ne sera autre chose que la corde elle-même, qui passe par le point d'osculation et le point d'intersection des deux courbes; mais pour que l'équation (5) devienne l'équation de l'axe des x, équation de la forme:

$$y=0$$

il faut qu'on ait

$$B=b. \tag{6}$$

En prenant donc pour axe des y la tangente commune au point d'osculation et en conduisant l'axe des x par ce point et par le point d'intresection (l'équation (5) prouve qu'il y aura toujours intresection des courbes), il faut qu'on ait entre les constantes des équations

$$y^2+2Axy+Bx^2+2Dx=0,$$
$$y^2+2axy+bx^2+2dx=0,$$

en même temps les deux relations suivantes:

$$B=b,\quad D=d. \tag{7}$$

IV. Allons plus loin. Si l'on veut que la corde commune à nos deux lignes du second ordre soit parallèle à l'axe des y, il faut que le terme affecté de y disparaisse de son équation générale, il faut qu'on ait:

$$A=a. \tag{8}$$

Cette équation (3) devient alors:

$$(B-b)x+2(D-d)=0.$$

Veut-on enfin que la droite indiquée par cette équation s'approche de plus en plus de la tangente pour finir à se confondre avec elle, c'est à dire avec l'axe des y, ce qui revient à exiger que les quatre points d'intersection se réunissent en un point unique, il faut que le terme constant disparaisse, c'est à dire qu'on ait comme dans le numéro précédent

$$D=d,$$

la même condition que nous avons obtenue dans le numéro précédent, comme il était facile à prévoir. On a donc, pour que nos deux courbes aient entre elles *un contact du troisième ordre*, (un contact de quatre points) simultanément les deux conditions:

$$A=a,\quad D=d. \tag{9}$$

Il résulte encore que, dans cette supposition, il n'y aura plus de point commun aux deux courbes.

Ces divers résultats me paraissent élégants en vertu de leur symmétrie et de leur extrême simplicité, et pour cette même raison, il est évident que les propriétés fondamentales de deux ou de plusieurs courbes, assujetties aux conditions que nous discutons, se déduiront sans aucun effort de la combinaison de leurs équations, en y introduisant les diverses rélations entre les constantes.

V. Mais auparavant arrêtons-nous un moment aux considérations sur lesquelles reposent nos développements. Toute théorie du contact et de l'osculation des divers ordres est fondée sur la supposition que deux ou plusieurs points d'intersection de deux courbes se réunissent en un seul, supposition qu'on peut se conscrire de plusieurs manières, mais que, selon moi, l'on ne peut pas éluder, ni même remplacer par d'autres considérations, qui en donnent une idée plus nette.

Ce qui se présente d'abord pour exprimer analytiquement la coincidance de deux ou de plusieurs points d'intresection de deux courbes, c'est d'éliminer entre leurs équations l'une des variables. On obtiendra ainsi une équation en y ou x dont les racines se rapportent aux points communs aux deux courbes. Statuer sur la réalité ou l'imaginarité, sur l'égalité ou l'inegalité des ces racines, c'est assujettir les intersections à certaines conditions, indiquées par des équations entre les constantes. Si nous nous bornons à deux sections coniques, nous aurons en général une équation en x comme en y du quatrième degré, dont les racines indiqueront les coordonnées de leurs intersections. Si l'on veut que les deux coniques se touchent simplement en un seul point, il faut que les équations en question aient deux racines égales; veut-on qu'elles se touchent en deux points, il faut qu'on ait deux couples de racines égales; exige-t-on qu'elles aient un contact du second ordre, trois racines doivent être égales, et comme la quatrième seule ne pourra pas être imaginaire, il y aura simulsanément intersection de nos courbes et cela a lieu *sans aucune exception.* Si l'on demande enfin que les sections coniques aient entre elles un contact de l'ordre le plus élevé, il faut que les racines soient égales toutes les quatre, il n'y aura plus intersection. Mais le mode de discussion que je viens d'indiquer, a pour inconvéniant qu'une seule équation, par exemple en x, laisse indéterminé, si à des racines égales répond ou un point unique, ou deux points situés sur une parallèle à l'axe des y. Tout en évitant cet inconvéniant, on peut traiter les équations de deux sections coniques *plus particulièrement encore par la géométrie analytique*, et parvenir, comme notre tâche était de le faire voir, au même but d'une manière en même temps plus bréve.

VI. Reprenons d'abord l'équation générale de la corde, qui passe par les deux points d'intersection de deux lignes du second ordre

qui se touchent à l'origine des coordonnées, reprenons l'équation suivante:

$$(3) \qquad 2(A-a)y + (B-b)x + 2(D-d) = 0.$$

On remarque de suite que les angles que cette ligne droite forme avec les axes, ou bien avec la tangente au point où les deux courbes se touchent, ne dépendent nullement des quantités D et d. On a donc ce premier théorême: en faisant varier ces deux quantités ou l'une d'elles seulement dans les équations:

$$y^2 + 2Axy + Bx^2 + 2Dx = 0,$$
$$y^2 + 2axy + bx^2 + 2dx = 0,$$

les autres coefficients restant constants, les cordes, qui passent par les intersections des couples différentes de coniques ainsi déterminées, seront toutes parallèles entre elles. Si en particulier on veut que la seconde courbe soit un cercle, (en supposant pour un moment l'angle arbitraire des coordonnées égal a un angle droit) son équation sera de la forme:

$$y^2 + x^2 - 2dx = 0;$$

faire varier d, n'est donc autre chose que faire varier le rayon du cercle. Les cordes communes de ces divers cercles avec la section conique, qu'ils touchent au même point seront donc aussi toutes paralléles entre elles.

On peut déduire de ce théorème la construction du cercle osculateur pour un certain point (M) d'une section conique donnée. On n'a qu'à construire un cercle quelconque qui la touche au point donné (M), puis mener la corde commune et, parallèle à cette corde, par le point M une autre ligne droite, qui coupera la courbe dans un second point, qui sera en même temps sur le cercle dont il s'agit et qui est donc facile à construire. Cette construction revient à une construction connue dans la synthèse. —

Il résulte encore de l'équation (3), qu'en faisant varier D et d de manière que $D-d$ reste constant (égal à zéro p. ex) la corde ne change nullement.

Mais n'oublions pas de faire remarquer que la corde dont il s'agit peut très bien ne pas exister comme telle, mais on pourra alors construire une ligne droite exprimée par l'équation (3) qui jouira de toutes ses proprietés géométriques. C'est un cas analogue à celui des lignes, qu'on a nommées axes radicaux et s'explique aisément par le rabaissement du degré de l'équation du lieu géométrique, qui contient les points d'intersection.

III. Occupons-nous maintenant plus particulièrement des courbes osculatrices. Si l'on nous donne une section conique et un certain point sur son périmètre, il y aura une infinité de courbes du même degré, qui

aient avec elle dans ce même point un contact du troisième ordre. Car l'équation de la courbe donnée (en la rapportant aux mêmes axes que ci-dessus) étant:

$$y^2 + 2Axy + Bx^2 + 2Dx = 0, \tag{10}$$

il y aura tant d'équations qu'on voudra, qui satisfassent aux conditions de ce degrè d'osculation, mais toutes de la forme:

$$y^2 + 2Axy + Bx^2 + 2Dx = 0. \tag{11}$$

B étant quelconque. Mais on voit en même temps, que cette dernière équation, A et D étant donnés, ne pourra pas représenter toutes les espèces des courbes du second degré. Dans cette équation par exemple (en supposant l'angle des coordonnées droit) l'équation du cercle n'est pas comprise, tant qu'on n'ait $A = 0$, mais cela revient à dire, qu'une section conique ne pourra pas avoir un contact du troisième ordre avec un cercle, au moins qu'on ne choisisse pour point d'osculation l'une des sommets des deux diamètres principaux.

Si l'on ne demande qu'une osculation simple, l'équation de la courbe osculatrice sera:

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2Dx = 0, \tag{12}$$

α et β étant arbitraires. Comme nous ne disposons, que du coëfficient de x, cette équation pourra représenter ou une parabole ou une ellipse et une hyperbole quelconque. Si pour des coordonnées rectangles, la quantité A de l'équation (10) est nulle, il est évident que le cercle osculateur ne saurait avoir avec la courbe donnée au point déterminé qu'un contact du troisième ordre. Si nous faisons en même temps dans l'équation (12) $\beta = B$, l'équation

$$y^2 + 2\alpha xy + Bx^2 + 2Dx = 0 \tag{13}$$

représentera une courbe osculatrice, rencontrant la courbe donnée dans un point, par lequel passe aussi l'axe des x; il y aura donc encore, α étant arbitraire, une infinité de pareilles courbes, mais ces courbes ne comprendront plus toute espèce des lignes du second ordre. —

VIII. Soit

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\delta x = 0 \tag{14}$$

l'équation d'une de nos courbes. Par les méthodes connues de la géometrie analytique, ou bien en différentiant successivement par rapport à x et y, nous aurons sur le champ:

$$y + \alpha x = 0, \tag{15}$$

$$\alpha y + \beta x + \delta = 0, \tag{16}$$

les équations de deux diamètres, dont les conjugués sont parallèles aux

deux axes. Le centre de la courbe se trouvant sur chacune de ces deux lignes droites, nous en déduirons de suite les deux résultats suivants.

1°. Les centres de toutes les sections coniques qui se touchent, s'ils ont en même temps une corde commune à la tangente commune; les centres de toutes les coniques en particulier, qui ont entre elles un contact du troisième ordre, sont situés en ligne droite, qui n'est autre chose que le diamètre même d'une de ces courbes, passant par l'origine et donné par l'équation (15).

2°. En éliminant la quantité α entre les équations des deux diamètres (15) et (16), on obtiendra un nouveau lieu géométrique, contenant le centre de la courbe. Son équation sera:

$$-\frac{y^2}{x}+\beta x+\delta=0$$

ou bien en réduisant

$$y^2-\beta x^2-\delta x=0,$$

équation d'une nouvelle conique dont deux diamètres conjugués sont les axes des coordonnées eux-mêmes.

Donc: le lieu des centres de toutes les sections coniques qui se coupent et s'osculent aux deux mêmes points, est une nouvelle section conique dont l'espèce dépend uniquement du coëfficient β de l'équation (14). Je ne m'arrêterai pas à discuter les divers cas particuliers.

IX. En faveur de la géométrie pure M. Poncelet donne dans le huitième volume de ce même recueil, de bien jolies constructions de problèmes de géométrie. J'y trouve à la page 153 le problème suivant qui se rapporte aux osculations des courbes du second degré et dont la construction est simplement indiquée.

„Une section conique étant tracée sur un plan et deux points étant donnés arbitrairement sur ce plan, le premier sur le périmètre de la courbe et l'autre quelconque; déterminer tant de points qu'on voudra d'une autre section conique qui, passant par les deux points donnés, ait, au premier de ces points, un contact du troisième ordre avec la première, en ne faisant usage que de la règle seulement."

Voyons si ce problème se prête si difficilement aux méthodes de la géométrie analytique. Soit comme dans les numéros précédants

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\delta x=0 \tag{17}$$

l'équation d'une conique et supposons deux lignes droites menées par l'origine, c'est à dire par le point, ou la courbe est touchée par l'axe des y. On pourra alors représenter le système de ces deux droites par une équation unique:

$$y^2+(m+n)xy+mnx^2=0. \tag{18}$$

En prenant la différence de cette équation et de l'équation (17), et en divisant ensuite par x, facteur commun, on aura:

$$(19) \qquad (2\alpha-(m+n))\,y+(\beta-mn)\,x+2\delta=0$$

l'équation de la corde qui passe par les points où nos deux droites coupent la courbe pour la seconde fois. Si nous prenons à présent deux quelconques des trois quantités α, β, δ constantes, en laissant la troisiéme arbitraire, l'équation (17) représentera une infinité de courbes; mais ces suppositions assujettissent en même temps l'équation (19) à certaines conditions:

1⁰. Si nous prenons α et δ comme constants, toutes les droites représentées par l'équation (19) couperont l'axe des y en un même point, donné par l'équation

$$y=-\frac{2\delta}{2\alpha-(m+n)}$$

2⁰. Si nous regardons au contraire les quantités β et δ comme constantes, l'axe des x sera coupé au même point, dont l'abscisse

$$x=-\frac{2\delta}{\beta-mn}.$$

3⁰. Enfin, α et β étant donnés, toutes les lignes droites en question seront parallèles.

Le premier de ces trois cas conduit précisément à la construction de M. Poncelet du problème cité, car interprétant ce résultat nous aurons le théorème suivant:

«Deux sections coniques ayant entre elles un contact du troisième ordre, si par le point d'osculation (O) on mène deux droites arbitraires OMR, OAQ, qui coupent l'une des deux sections coniques aux points M et A, et l'autre aux points R et Q, les lignes droites qui passent respectivement par M et A et par R et Q, se couperont sur la tangente commune aux deux sections coniques.»

L'une des deux sections coniques, un point A de l'autre et le point O étant donné, rien donc de plus facile que de déterminer un nouveau point M de la seconde courbe situé sur une droite OMR, menée arbitrairement par O.

Si les deux lignes droites OMR, OAQ se confondent en une seule, m devient égal à n et la corde représentée par l'équation (19) devient tangente à la courbe. On a donc encore cet autre théorème: «Une droite quelconque passante par le point d'osculation coupera en général une seconde fois chacune des courbes; les tangentes aux différentes courbes en ces points iront concourir toutes dans un même point de la tangente commune.»

Si donc au lieu du point A dans la question résolue on nous donne une tangente à la courbe demandée, on déterminera de suite le point de contact. On n'a qu'à mener du point où la ligne droite donnée rencontre la tangente commune une nouvelle tangente à la courbe donnée qui la touchera en un point quelconque, que nous nommerons N. Menons ON, cette ligne droite coupera la ligne droite donnée au point cherché. —

D'après les numéros précédants toutes les sections coniques, données par l'équation

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\delta x = 0$$

en y regardant β et δ comme invariables, et donnant successivement à α une valeur quelconque, se coupent et s'osculent dans les deux mêmes points, l'axe des x étant conduit par le point d'intersection. Il résulte ainsi de la discussion du second cas cet autre théorème: «Deux sections coniques ayant entre elles un contact du second ordre en O et se coupant au point P, si par le point d'osculation on mène deux droites arbitraires OAQ et ORM, qui coupent l'une des sections coniques aux points A et M, et l'autre en Q et R, les lignes droites qui passent respectivement par A et M et par Q et R rencontreront au même point la ligne droite OP, menée par le point d'osculation et le point d'intersection». Il est évident que je ne parle de deux sections coniques seulement que pour rendre l'énoncé du théorème plus facile. On en déduira la construction d'un problème, analogue à celui de M. Poncelet, du problème suivant:

«Une section conique étant tracée sur un plan et trois points étant donnés arbitrairement sur ce plan, dont deux (O, P) sur le périmètre de la courbe et l'autre (A) quelconque, déterminer tant de points qu'on voudra d'une autre section conique, qui ait au point (O) un contact du second ordre avec la première, qui la coupe en P et qui passe en même temps par le point A pris arbitrairement, en ne faisant usage que de la règle seulement».

Solution. Soit menée par le point O une ligne droite indéfinie passant par P, une autre OAQ passant par le point A et rencontrant la courbe en un point, que nous désignerons par Q, une troisième enfin ORM à volonté, qui coupera la courbe en un point quelconque (R). Soit menée RQ rencontrant OP en S, et AS rencontrant ORM en M, qui sera un point de la courbe cherchée. En variant la direction de la ligne droite ORM, on obtiendra tant de pareils points qu'on voudra. Comme dans le premier cas on peut supposer les deux lignes droites OAQ et OMR se confondre en une seule, et nous aurons le théorème suivant: Deux ou plusieurs courbes du second ordre s'osculant entre elles et se coupant aux deux mêmes points, si par le point d'osculation on mène arbitrairement une ligne droite, les tangentes aux différentes

courbes dans les points ou elles sont rencontrées par cette ligne droite, iront concourir toutes en un même point de la droite passant par les points O et P. — De ce théorème on déduit d'une manière tout-à-fait analogue à celle du cas précédant la construction du dernier problème, en y remplaçant parmi les données le point A par une ligne droite à toucher.

J'observe encore qu'on peut regarder le théorème sur lequel se fond la construction de M. Poncelet comme corollaire du premier théorème plus général de ce second cas. Car dans l'ordre d'osculation plus élevé le point d'intersection se confond avec celui de contact; la ligne droite, passant par ces deux points est donc remplacée par la tangente commune aux différentes courbes dans le point du contact. —

Le dernier cas enfin, si nous rengardons α et β comme des constantes, se rapporte à des courbes, qui toutes semblables entre elles, ont en même temps une tangente commune au même point, c'est à dire un simple contact. Dans ces suppositions donc, si l'on mène par le point de contact O un couple quelconque de lignes droites Oq et Or, qui rencontrent les différentes courbes l'une aux points $Q, Q', Q'', \cdots$ et l'autre aux points $R, R', R'', \cdots$, les cordes qui passent respectivement par Q et R, par Q' et R', par Q'' et $R'', \cdots$, seront toutes parallèles entre elles. — De même seront parallèles toutes les tangentes aux différentes courbes dans les points ou chacune d'elle sera coupée par une même ligne droite arbitraire, passant par le point O. — On saura après ça construire le problème suivant, analogue aux précédants avec la règle seule: «Étant tracée sur un plan une section conique quelconque, trouver tant de points qu'on voudra d'une autre section conique, semblable à la première, qui touche celle-ci dans un point donné et qui remplit en même temps l'une des deux conditions, ou de passer par un point choisi arbitrairement sur son plan, ou de toucher une ligne droite quelconque située sur son plan.

Je remarque seulement pour passer de suite à d'autres relations du contact, que dans ces différents problèmes, on pourra par nos théorèmes au lieu de points construire des tangentes aux courbes cherchées.

Cherchons maintenant quelles sont les conditions pour que plusieurs lignes du second ordre *se touchent aux deux mêmes points.* Soient donc comme dans les numéros précedents:

$$y^2 + 2Axy + Bx^2 + 2Dx = 0,$$
$$y^2 + 2axy + bx^2 + 2dx = 0$$

les équations de deux sections coniques qui, étant touchées par l'axe des y à l'origine des coordonnées, ont entre elles dans ce point un contact simple. La direction de l'axe des x est quelconque. Éliminons de ces

équations le terme affecté de la première puissance de x et, pour y parvenir de la manière la plus facile, retranchons ces deux équations l'une de l'autre après avoir multiplié la première par d et la seconde pas D. L'équation

$$(d-D)y^2+2(Ad-aD)xy+(Bd-bD)x^2=0 \tag{20}$$

qu'on obtiendra ainsi, représentera un nouveau lieu géométrique, contenant les points d'intersection des deux courbes, mais c'est en même temps l'équation d'un système de deux lignes droites, passant toutes les deux par l'origine. Ces lignes, si elles ne sont pas imaginaires, passeront donc respectivement par l'un et l'autre des points d'intersection de nos deux courbes, qui dans le cas d'exception, que je viens d'indiquer, n'existeront pas. Veut-on que les deux points d'intersection se confondent en un nouveau point de contact, il faut que l'équation (20) soit décomposable en deux équations identiques, et c'est la condition cherchée du double contact. Mais nous éviterons encore le calcul ainsi indiqué, tant facile quil soit, en prenant pour axe des x, indéterminé jusqu'ici, la ligne droite passant par les deux points de contact, ce qui exige que l'équation (20) prenne la forme:

$$y^2=0,$$

c'est à dire qu'on ait en même temps ces deux équations de condition entre les constantes:

$$Ad-aD=0, \qquad Bd-bD=0,$$

équations qui comportent une troisième:

$$Ab-aB=0.$$

Au lieu de ces trois équations on peut prendre les trois suivantes:

$$\frac{d}{a}=\frac{D}{A}, \quad \frac{d}{b}=\frac{D}{B}, \quad \frac{b}{a}=\frac{B}{A}$$

on encore:

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{D}{d}.$$

Il y aura donc une infinité de courbes du second ordre, données par l'équation:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\delta x=0$$

qui aient entre elles un double contact aux deux mêmes points, parceque nous n'aurons que deux équations de condition réellement différentes entre les trois coëfficients; mais parmi ces courbes il n'en pourra pas exister deux qui aient un quelconque de ces coëfficients égaux, ni α, ni β, ni δ, relation facile à interpréter.

L'un des diamètres de la courbe est donné par l'équation:

$$\alpha y+\beta x+\delta=0$$

ou bien en divisant par α:

$$y + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\delta}{\alpha} = 0.$$

Ce diamètre est donc absolument le même pour toutes les sections coniques, qui se touchent aux deux mêmes points. En faisant successivement $y = 0$ dans l'équation de la courbe et du diamètre, on aura:

$$x^2 + \frac{2\delta}{\beta} x = 0, \qquad x + \frac{\delta}{\beta} = 0$$

d'où résulte que ce diamètre coupe la corde commune à toutes les sections coniques, en deux parties égales, ce qui revient à dire que son conjugué est parallèle a cette corde*).

Ceci est suffisant pour faire voir la concordance des résultats développés avec de théorèmes connus et en même temps la facilité, avec laquelle ceux-ci s'en déduisent.

X. Reprenons l'équation:

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\delta x = 0 \tag{14}$$

que nous supposons représenter une infinité de sections coniques, se touchant toutes entre elles aux deux mêmes points, à l'origine (O) et dans un second point (P) de l'axe des x, déterminé par l'équation:

$$x = -\frac{2\delta}{\beta};$$

mais d'abord nous regarderons l'équation (14) comme ne désignant qu'une seule de ces courbes. — Les équations de deux lignes droites arbitraires, passant l'une par l'origine (O) et l'autre par le second point de contact, par P, seront donc de la forme:

$$x + my = c,$$

$$x + m'y + \frac{2\delta}{\beta} = 0$$

ou

$$\beta x + \beta m'y + 2\delta = 0,$$

---

*) En supposant connu ce résultat on aura pu choisir pour équations des deux sections coniques les équations suivantes:

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2, \qquad A_1{}^2y^2 + B_1{}^2(x - x') = A_1{}^2B_1{}^2,$$

d'oú l'où aurait déduit en suivant une marche semblable:

$$\frac{B^2}{A^2} x'' = \frac{B_1{}^2}{A_1{}^2}(x'' - x'),$$

(x'' étant l'abscisse des points du contact), pour condition du double contact. Mais en partant de ces équations, la discussion du numéro suivant ne gagnerait rien en breveté et perdrait en symmétrie. Et, étant permis sans donte, de choisir les axes des coordonnées à volonté, il me semble cependant qu'une démonstration gagne en élégance si le calcul même nous détermine à ce choix.

m et m' étant indéterminés et variables d'une droite à une autre. En multipliant ces deux équations entre elles et ordonnant ensuite, on aura:

$$mm'\beta y^2 + (m+m')\beta xy + \beta x^2 + 2\delta my + 2\delta x = 0$$

équation qui représente le système de nos deux lignes droites. En retranchant cette équation de l'équation de la courbe, on aura un lieu géométrique, contenant les points, où celle-ci est coupée par les lignes droites; on aura ainsi:

$$(mm'\beta-1)y^2 + [(m+m')\beta - 2\alpha]xy + 2\delta my = 0,$$

équation qui indique deux lignes droites, données séparément par les deux équations:

$$y = 0,$$

$$(mm'\beta-1)y + ((m+m')\beta-2\alpha)x + 2\delta m = 0.$$

La première n'est autre chose que l'axe des x lui même, la seconde doit par conséquent passer par les points où les droites menées arbitrairement par O et P rencontreront la courbe pour la seconde fois. Le point d'intersection de cette droite avec l'axe des x est donné par l'équation suivante:

$$x = -\frac{2\delta m}{(m+m')\beta - 2\alpha}$$

qu'on peut mettre encore sous cette autre forme:

$$x = -\frac{2m\dfrac{\delta}{\alpha}}{(m+m')\dfrac{\beta}{\alpha} - 2}.$$

Mais d'après nos suppositions dans les différentes sections coniques que nous regardons, $\frac{\delta}{\alpha}$ et $\frac{\beta}{\alpha}$ sont de rapports constants, donc aussi la valeur de x restera la même. D'où résulte le théorème suivant:

Si deux ou plusieurs sections coniques situées sur un même plan se touchent aux deux mêmes points O et P, si ensuite par ces points on mène arbitrairement deux lignes droites Oq et Pr dont l'une coupe les différentes courbes pour la seconde fois en $Q, Q', Q'', \cdots$, de même que l'autre les rencontre de nouveau en $R, R', R'', \cdots$; les lignes droites, menées respectivement par Q et R, par Q' et R', par Q'' et R'' et ainsi de suite, iront concourir toutes en un même point (S) de la ligne droite passant par les deux points de contact.

Si Oq et Pr passent par un même point d'une des courbes, une tangente à cette courbe se rangera parmi les cordes, concourant au même point S.

On pourra donc résoudre avec la règle seule le problème suivant

analogue aux précédents: «Une section conique étant tracée sur un plan et deux points O et P étant donnés sur son périmètre, déterminer tant de points qu'on voudra d'une autre section conique qui touche la première aux deux points O et P et qui passe en même temps par un point donné».

Solution. Soit Q' le point donné, soit menée OQ' passant par Q' et coupant la courbe donnée en Q, soit menée arbitrairement PR coupant la courbe en R. Soient menées OP et RQ, qui se rencontreront dans un point, que nous désignerons par S, soit menée enfin SQ'. L'intersection de SQ' avec PR donnera le point cherché.

On peut remplacer dans ce problème le point donné par lequel doit passer la section conique, par une ligne droite qui doit la toucher. Dans ce cas on déterminera facilement le point de contact de la ligne droite donnée et la courbe à construire. —

Rien n'empêche de substituer à la première des lignes du second ordre qui ont entre elles un double contact, un système de deux lignes droites, ce qui donne d'autres théorèmes qui au premier abord ne paraissent pas en rapport avec le théorème enoncé dans ce numéro. Je ne ferai que citer les deux suivants:

Quatre points, O, P, Q, R étant pris arbitrairement sur le périmètre d'une section conique, et se succédant dans un ordre quelconque, les trois points (S, Q', R') où se rencontrent respectivement OP et RQ, OQ et la tangente en P, PR et la tangente en O, seront situés en ligne droite.

Un triangle quelconque étant inscrit dans une section conique, les trois points d'intersection des côtés de ce triangle suffisamment prolongés avec les tangentes aux sommets opposés, se trouveront situés en ligne droite.

J'observerai en passant que le théorème qui fournit la construction du problème cité de M. Poncelet peut encore immédiatement se déduire du théorème général de ce numéro. Car en faisant coincider les deux points de contact simple en un seul point de contact de l'ordre le plus élevé, les deux lignes droites menées arbitrairement par ces point partiront d'un point unique, et la ligne droite passant par les mêmes points deviendra tangente.

XII. Pour faire mieux encore apprécier que le contact de deux courbes n'est en dernier lieu que la réunion de deux ou plusieurs points en un seul, reprenons les équations générales de deux courbes du second degré:

$$y^2 + 2Axy + Bx^2 + 2Cy + 2Dx + E = 0,$$
$$y^2 + 2axy + bx^2 + 2cy + 2dx + e = 0.$$

Si nous supposons que les deux courbes se coupent et que l'axe des x

passe par deux quelconques de ces points et l'axe des y par les deux autres, il faut évidemment que ces deux équations se laissent combiner de manière que l'équation résultante représente le système des deux axes eux mêmes, donné par l'équation:

$$xy = 0$$

ce qui exige qu'on ait en même temps:

$$B = +b, \quad C = +c, \quad D = +d, \quad E = +e.$$

L'équation

$$(26) \qquad y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \varepsilon = 0$$

dans laquelle, en regardant β, γ, δ, ε comme invariables, on donne successivement à α de valeurs quelconques, tant positives que négatives, représentera donc toutes les sections coniques, passant par les quatre mêmes points.

L'analogie de ces résultats avec les précédents est évidente, je n'insisterai plus à la développer, et comme il n'est pas non plus mon objet de discuter la dernière équation comme les précedantes je me contenterai de donner un seul exemple pour faire voir l'uniformité du mode de discussion. Les équations de deux diamètres de la courbe représentée par l'équation (26) seront:

$$y + \alpha x + \gamma = 0,$$
$$\alpha y + \beta x + \delta = 0.$$

En prenant de la première de ces équations la valeur de α pour la substituer dans l'autre, on aura l'équation du lieu des centres de toutes ces sections coniques, passant par les quatre même points; on aura en réduisant l'équation suivante:

$$y^2 - \beta x^2 + \gamma y - \delta x = 0,$$

équation d'une nouvelle section conique, dont deux diamètres conjugués seront les axes des coordonnées eux mêmes.

II. Über Plückers Ideen zur Mechanik starrer Körper.

Plückers mechanische Ideen sind bekanntlich in unfertigem Zustand auf uns gelangt; wie bereits Herr F. Klein*) im Anschluß an seine Herausgabe von Plückers Liniengeometrie ausführte, ermangeln sie der Klarheit und Präzision. In meiner Ausgabe der Plückerschen Abhandlungen habe ich mich dahin geäußert**), daß es sich um geometrische Formulierungen handelt, die an sich korrekt sind, denen jedoch — und zwar wegen der

*) Math. Ann. Bd. 4, S. 403.

**) Vgl. die Anmerkungen zu Bd. I, S. 615.

undualistischen Beschaffenheit der Materie — die praktische Anwendbarkeit abgeht. Demgegenüber hat Herr Timerding*) in den Plückerschen Ideen einen Fehler zu finden gemeint. Seine Darlegungen seien richtig für infinitesimale Drehungen, aber nicht für endliche, und dies hervorzuheben, habe Plücker unterlassen. Damit aber würden die sämtlichen Entwickelungen Plückers in sich zusammenfallen, denn sie beziehen sich insgesamt auf endliche „Drehungen".

Ich rekapituliere kurz den Sachverhalt**). Zwei Punkte (x, y, z) und (x', y', z') bestimmen bekanntlich eine Kraft, deren Koordinaten die sechs Größen

$$X = x - x', \qquad Y = y - y', \qquad Z = z - z',$$
$$L = yz' - zy', \quad M = zx' - xz', \quad N = xy' - yx'$$

sind, die eine *Intensität* P und ein vom Anfangspunkt abhängiges *Moment* R hat, und zwar ist

$$P^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \qquad R^2 = L^2 + M^2 + N^2.$$

Dies dualisiert Plücker so, daß er, wenn (t, u, v) und (t', u', v') zwei Ebenen sind, die sechs Größen

$$\mathfrak{X} = t - t', \qquad \mathfrak{Y} = u - u', \qquad \mathfrak{Z} = v - v',$$
$$\mathfrak{L} = uv' - vu', \quad \mathfrak{M} = vt' - tv', \quad \mathfrak{N} = tu' - ut'$$

als Koordinaten einer „Kraft" definiert, die er als „Rotationskraft" oder zunächst als „Rotation" einführt***), und der er ebenfalls eine *Intensität* $\mathfrak{P}$ und ein *Moment* $\mathfrak{R}$ beilegt, und zwar ist

$$\mathfrak{P}^2 = \mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2, \qquad \mathfrak{R}^2 = \mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2.$$

Hier ist sowohl Intensität, wie auch Moment vom Koordinatenanfangspunkt abhängig; Ebenenpaare, die die nämlichen Werte von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{R}$ bestimmen, schließen nicht denselben Winkel ein. Dessen ist sich aber auch Plücker bewußt gewesen; er sagt selbst, daß er hier einen Begriff einführt, der einen der gewöhnlichen Bedeutung nicht entsprechenden Inhalt hat†). Insbesondere heißt es an einer Stelle des Nachlasses: „Hier verlassen wir die gebräuchliche Definition der Größe einer Rotation, die man durch den beschriebenen Rotationswinkel zu bestimmen pflegt. Unsere

*) Encycl. d. math. Wiss. Bd. IV 1, Heft 2, S. 168.

**) Vgl. hierzu besonders die Fundamental views regarding Mechanics, S. 546 ff. der Ges. Abhandl. Bd. I.

***) In dem Begriff Rotationskraft, der gleichwertig mit Rotation auftritt, liegt nichts weiter, als eine formale metaphysische Wendung vor; wo eine Bewegung ist, substituieren wir eine „Kraft", deren Maß eben die Bewegung ist. Vgl. z. B. Neue Geometrie des Raumes, S. 24.

†) Vgl. S. 556 der Ges. math. Abhandl. Bd. I.

Bestimmung der Rotationsgröße ist von der Annahme des Anfangspunktes der Koordinaten abhängig . . .". Diese Worte lassen über den Sinn der Plückerschen Begriffe keinen Zweifel; sie beweisen jedenfalls, daß er von dem Vorwurf, den Herr Timerding gegen ihn erhebt, freizusprechen ist.

Diese Worte haben mich aber auch in meiner oben mitgeteilten Auffassung bestärkt. Plücker beschäftigt sich — von ganz wenigen vorläufigen Andeutungen abgesehen — nur mit der *Statik*. Die Statik ist aber eine wesentlich geometrische Wissenschaft, deren Richtigkeit von der logischen Widerspruchslosigkeit der Begriffe abhängt, mit denen sie operiert. Diesem Umstand ist Plücker vollständig und in bewußter Weise gerecht geworden*). Er zeigt, daß sich auf die von ihm definitionsweise eingeführten Rotationskräfte die Regeln der Zusammensetzung übertragen lassen, die für gewöhnliche Kräfte gelten. Er tut dies genau so, wie wir es heute machen würden, seine Darstellung kommt inhaltlich darauf hinaus, daß er — modern zu reden — gewisse Grundregeln des Operierens mit Rotationen *axiomatisch* postuliert, dies als erlaubt nachweist und auf sie die allgemeinen Fälle zurückführt**). Damit ist aber die Hauptsache geleistet, und die Dualisierung der ganzen Lehre von den Kraftkomplexen formal gesichert. Ansätze für die weitere Ausführung hiervon sind im Nachlaß enthalten.

Ganz anders liegt die Frage, inwieweit die Plückerschen Ideen eine mechanische Tragweite beanspruchen können. Hier kann unser Urteil nur negativ ausfallen. Ich begnüge mich mit dem Hinweis, daß die Einführung der Rotationskraft selbst mit formalem Erfolg nur da vorgenommen werden kann, wo die resultierenden Kräfte Null sind. Sie versagt, wo deren wirkliche Werte in Frage stehen, und zwar eben deshalb, weil sie nicht, wie die Einzelkraft, einem objektiven Begriff entsprechen, sondern eine vom Koordinatenanfang abhängige subjektive Rechnungsgröße darstellen. Der innere Grund ist der, daß die Materie nicht dualistisch beschaffen ist. Es scheint mir aber kaum zweifelhaft, daß Plücker selber zu dieser Erkenntnis vorgedrungen sein würde, sobald er angefangen hätte, die eigentliche Dynamik in den Bereich eingehenderer Betrachtung zu ziehen.

III. Über Plückers Untersuchung der Wellenfläche zweiaxiger Krystalle.

In § 19 von Nr. 17 der Gesammelten physikalischen Abhandlungen ist eine Fortsetzung der dort mitgeteilten Untersuchungen über das optische und magnetische Verhalten der Krystalle angekündigt. Hierfür

*) Man vgl. auch die Worte: But force may be regarded as a merely geometrical notion; Ges. math. Abhandl. S. 539.

**) Vgl. besonders Bd. I, S. 560 ff. der Ges. Abhandlungen.

findet sich im Nachlasse ein unvollendetes Manuskript vor, das, ebenso wie die erwähnte Arbeit, aus dem Jahr 1850 stammt. Der § 1 dieser Abhandlung ist vollständig und ist betitelt: „Discussion nouvelle de la forme générale des ondes lumineuses". Es wird darin die Gleichung des Fresnelschen und Index-Ellipsoids, sowie der Strahlen- und Normalenfläche in Bipolarkoordinaten aufgestellt*) (bezogen auf die Strahlenachsen resp. die optischen Achsen) und daran eine neue Konstruktion der Strahlenfläche geknüpft. Es folgt der Versuch, das magnetische Verhalten der Krystalle und dessen von Plücker damals noch vorausgesetzten Zusammenhang mit den optischen Eigenschaften gemäß einem schon in § 18 der Abh. Nr. 17 angedeuteten Gedanken theoretisch zu begründen. (Vergl. die Anmerkungen des Herausgebers zu Nr. 2, 13 und 17 der Ges. physikal. Abhandlungen).

Königsberg, im Juli 1903.

*) Vgl. auch Plückers aus dem Jahr 1838 stammende Arbeit über die Wellenfläche, Ges. Abhandl. Bd. I, S. 339 und besonders S. 376.

Über die Existenz der Grundlösung bei einer linearen partiellen Differentialgleichung der 2. Ordnung von elliptischem Typus.

Von

Erik Holmgren in Upsala.

In der Theorie der Differentialgleichung

$$(1) \qquad D(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a\frac{\partial z}{\partial x} - b\frac{\partial z}{\partial y} - cz = 0$$

spielt die sogenannte Grundlösung eine wichtige Rolle.*)

Diese ist in folgender Weise definiert. Es seien (ξ, η), (x, y) Punkte in dem Gebiete wo die Koeffizienten $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ definiert sind, es sei r der Abstand zwischen (ξ, η) und (x, y). Die Grundlösung von (1) ist von der Form

$$u(x, y, \xi, \eta) \log r + v(x, y, \xi, \eta),$$
$$u(\xi, \eta, \xi, \eta) = 1,$$

wo u und v stetige Funktionen von x, y, ξ, η sind.

Bei der Voraussetzung, daß a, b, c analytische Funktionen sind, hat Prof. Hilbert eine sehr einfache Methode gegeben (Vorlesung S. S. 1901; siehe Hedrick, Diss. Göttingen 1901), die Existenz von solchen Lösungen nachzuweisen. (Die Funktionen u und v sind dann analytische Funktionen von x, y, ξ, η.)

In dem vorliegenden Aufsatze soll eine Methode entwickelt werden um die Existenz der Grundlösung bei (1) unter denselben Voraussetzungen darzulegen**), die sich auch auf den Fall von drei Veränderlichen aus-

*) Siehe Encyklopädie der Math. Wiss. Bd. 2, p. 515. Mehrere Sätze über das Verhalten der Integrale in der Umgebung von isolierten singulären Stellen, die bei der Potentialgleichung gelten, können leicht auf (1) ausgedehnt werden, nachdem die Existenz der Grundlösung nachgewiesen ist (z. B. das Theorem von Laurent).

**) Die Methode ist ganz analog mit der, die Picard angewandt hat um den analytischen Charakter der Lösungen bei (1) nachzuweisen.

In einer nach dem Einreichen dieses Aufsatzes erschienenen Note (Comptes rendus, 2. Juni, 1903) wendet Picard die Hilbertsche Methode an (im Falle $\xi = \eta = 0$), um zu zeigen, daß immer Lösungen der Form $v(x, y) \log r + \frac{\alpha x + \beta y + w(x, y)}{r^2}$, wo α, β beliebige Konstanten sind, bei (1) existieren (für $\alpha = \beta = 0$ geht die Grund-

dehnen läßt*) (d. h. auf die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+c\frac{\partial u}{\partial z}+du=0).$$

Wir setzen in (1)

$$z=u\log r+v, \tag{2}$$

und bekommen

$$D(u)\log r+\frac{1}{r^2}\Big[2\Big((x-\xi)\frac{\partial u}{\partial x}+(y-\eta)\frac{\partial u}{\partial y}\Big)-\Big(a(x-\xi)+b(y-\eta)u\Big)\Big] \tag{3}$$
$$+D(v)=0.$$

Wir wollen jetzt u als eine Lösung von $D(u)=0$ bestimmen, die so beschaffen ist, daß

$$\frac{1}{r^2}\Big[2\Big((x-\xi)\frac{\partial u}{\partial x}+(y-\eta)\frac{\partial u}{\partial y}\Big)-\Big(a(x-\xi)+b(y-\eta)u\Big)\Big]=f(x,y)$$

eine reguläre analytische Funktion von x, y, ξ, η ist.

Wird dann v aus der Gleichung

$$D(v)+f(x,y)=0$$

bestimmt, so stellt $u\log r+v$ eine Grundlösung dar.

Zu diesem Zwecke führen wir Polarkoordinaten ein durch die Formeln

$$x-\xi=r\cos\theta,\qquad y-\eta=r\sin\theta.$$

Nach Multiplikation mit r^2 geht dann $D(u)=0$ über in

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=ar\Big(r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big) \tag{4}$$
$$+br\Big(r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big)+cr^2u.$$

Für $f(x,y)$ bekommen wir den Ausdruck

$$f(x,y)=\frac{1}{r}\Big[2\frac{\partial u}{\partial r}-(a\cos\theta+b\sin\theta)u\Big]. \tag{5}$$

Wir benutzen jetzt den folgenden Hülfssatz**):

Eine reelle Potenzreihe $f(x,y)$ von $(x-\xi)$ und $(y-\eta)$, welche konvergiert, wenn $|x-\xi|, |y-\eta|<R$ ist, kann in der Form

lösung hervor), ein Resultat welches er, wie er bemerkt, in den Comptes rendus, 1891 ausgesprochen hatte. (Diese Lösung kann offenbar linear in der Grundlösung und ihren Ableitungen erster Ordnung nach ξ und η dargestellt werden). Er erwähnt daselbst daß seine frühere nicht mitgeteilte Beweismethode von Entwickelungen in trigonometrischen Reihen Gebrauch machte.

*) Diese Ausdehnung ist im „Arkiv for matematik, astronomi och fysik" Band I, (herausgegeben von der Academie der Wiss. in Stockholm) ausgeführt worden.

**) Siehe z. B. Paraf, Thèse, Paris 1892, p. 73.

$$\text{(A)} \qquad f(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} r^\nu P_\nu$$

geschrieben werden, wo

$$P_\nu = \left(a_\nu^{(\nu)} \cos \nu\theta + b_\nu^{(\nu)} \sin \nu\theta\right) + \left(a_{\nu-2}^{(\nu)} \cos(\nu-2)\theta + b_{\nu-2}^{(\nu)} \sin(\nu-2)\theta\right) + \cdots.$$

Dabei konvergiert die Reihe

$$\text{(A')} \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} r^\nu [P_\nu],$$

wo

$$\text{(6)} \qquad \left[P_\nu\right] = \left|a_\nu^{(\nu)}\right| + \left|b_\nu^{(\nu)}\right| + \left|a_{\nu-2}^{(\nu)}\right| + \left|b_{\nu-2}^{(\nu)}\right| + \cdots$$

wenn $r < R$.

Umgekehrt stellt eine Reihe von der Form (A), wenn die zugehörige Reihe (6) konvergent ist, eine reguläre analytische Funktion von x, y in der Umgebung von $x = \xi$, $y = \eta$ dar, wenigstens wenn

$$|x - \xi| < \frac{R}{2}, \quad |y - \eta| < \frac{R}{2}.$$

Wir werden versuchen die Funktion u in der Form (A) zu bestimmen. Zu diesem Zwecke nehmen wir an

$$\text{(7)} \qquad u = 1 + \alpha_1(\theta) r + \alpha_2(\theta) r^2 + \cdots + \alpha_n(\theta) r^n + \cdots$$

wo

$$\text{(7')} \quad \alpha_n(\theta) = \gamma_n^{(n)} \cos n\theta + \delta_n^{(n)} \sin n\theta + \gamma_{n-2}^{(n)} \cos(n-2)\theta + \delta_{n-2}^{(n)} \sin(n-2)\theta + \cdots.$$

Durch Einsetzung in (4) bekommen wir das folgende System von Differentialgleichungen für $\alpha_n(\theta)$:

$$\text{für } n = 1 \qquad \frac{d^2\alpha_1}{d\theta^2} + \alpha_1 = 0,$$

$$\text{für } n = 2, 3, \cdots$$

$$\text{(8)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\alpha_n}{d\theta^2} + n^2\alpha_n = {} & (a)_0 \left((n-1)\cos\theta\,\alpha_{n-1} - \sin\theta \frac{d\alpha_{n-1}}{d\theta}\right) \\ & + (a)_1 \left((n-2)\cos\theta\,\alpha_{n-2} - \sin\theta \frac{d\alpha_{n-2}}{d\theta}\right) \\ & + (a)_{n-2} \left(\cos\theta\,\alpha_1 - \sin\theta \frac{d\alpha_1}{d\theta}\right) \\ & + (b)_0 \left((n-1)\sin\theta\,\alpha_{n-1} + \cos\theta \frac{d\alpha_{n-1}}{d\theta}\right) \\ & + (b)_1 \left((n-2)\sin\theta\,\alpha_{n-2} + \cos\theta \frac{d\alpha_{n-2}}{d\theta}\right) \\ & + (b)_{n-2} \left(\sin\theta\,\alpha_1 + \cos\theta \frac{d\alpha_1}{d\theta}\right) \\ & + (c)_0\alpha_{n-2} + (c)_1\alpha_{n-3} + \cdots + (c)_{n-2}, \end{aligned} \right.$$

wo die Bezeichnung $(\varphi)_n$ für den Koeffizient von r^n in der Entwicklung von einer Funktion φ nach Potenzen von r angewandt wird (diese Bezeichnung wird überall in der Folge gebraucht). Wir machen die Voraussetzung, daß die Koeffizienten a, b, c in dieser Weise entwickelt werden können (vgl. p. 410).

Die Funktionen $\alpha_n(\theta)$ müssen die Bedingung erfüllen, daß $f(x, y)$ regulär wird, d. h. von der Form (A).

Man findet leicht, daß

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{n-2} r^{n-2}, \tag{9}$$

wo

$$Q_{n-2} = 2n\alpha_n(\theta) - \{(a\cos\theta + b\sin\theta)_0 \alpha_{n-1}(\theta) + (a\cos\theta + b\sin\theta)_1 \alpha_{n-2}(\theta) + \cdots + (a\cos\theta + b\sin\theta)_{n-1}\}. \tag{9'}$$

Nehmen wir an — was später gezeigt werden wird — daß

$$\alpha_1(\theta), \cdots, \alpha_n(\theta)$$

von der Form (7′) sind, so finden wir leicht daß Q_{n-2} auch von dieser Form ist d. h.

$$Q_{n-2} = p_n^{(n-2)} \cos n\theta + q_n^{(n-2)} \sin n\theta + p_{n-2}^{(n-2)} \cos(n-2)\theta + q_{n-2}^{(n-2)} \sin(n-2)\theta + \cdots. \tag{10}$$

Die rechte Seite in (9′) kann nämlich offenbar als eine Summe von Gliedern der Form

$$A \cdot \frac{\cos}{\sin}(\theta) \frac{\cos}{\sin}(i-2r)\theta \frac{\cos}{\sin}(n-(i+1)-2s)\theta$$

geschrieben werden und ein solches Glied läßt sich in die Gestalt (10) umformen, wie man durch Anwendung der Formel

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

und den analogen für $\cos a \sin b$, $\sin a \sin b$ findet. Man sieht leicht, daß die Koeffizienten von $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ in Q_{n-2} d. h. $p_n^{(n-2)}$, $q_n^{(n-2)}$ nur von den Koeffizienten von sinus und cosinus der höchsten Multipeln von θ in $\alpha_1(\theta), \alpha_2(\theta), \cdots, \alpha_n(\theta)$ abhängen, d. h. von $\gamma_n^{(n)}$, $\delta_\nu^{(n)}$ $(n = 1, 2, \cdots, n)$. Sie sind durch die folgenden Ausdrücke gegeben

$$\begin{aligned} p_n^{(n-2)} = 2n\gamma_n^{(n)} - \frac{1}{4}\Big[& 2\left(\mu_0 \gamma_{n-1}^{(n-1)} - \bar{\mu}_0 \delta_{n-1}^{(n-1)}\right) + \Big((\mu_1^{(1)} - \bar{\nu}_1^{(1)})\gamma_{n-2}^{(n-2)} \\ & \qquad - (\nu_1^{(1)} + \bar{\mu}_1^{(1)})\delta_{n-2}^{(n-2)}\Big) \\ & + \cdots + \Big((\mu_{n-2}^{(n-2)} - \bar{\nu}_{n-2}^{(n-2)})\gamma_1^{(1)} - (\nu_{n-2}^{(n-2)} + \bar{\mu}_{n-2}^{(n-2)})\delta_1^{(1)}\Big) \\ & + 2(\mu_{n-1}^{(n-1)} - \bar{\nu}_{n-1}^{(n-1)})\Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_n^{(n-2)} = 2n\,\delta_n^{(n)} - \frac{1}{4}\Big[2\left(\mu_0\delta_{n-1}^{(n-1)} + \bar{\mu}_0\gamma_{n-1}^{(n-1)}\right) + \Big(\left(\nu_1^{(1)} + \bar{\mu}_1^{(1)}\right)\gamma_{n-2}^{(n-2)} \\
+ \left(\mu_1^{(1)} - \bar{\nu}_1^{(1)}\right)\delta_{n-2}^{(n-2)}\Big) \\
+ \cdots + \Big(\left(\nu_{n-2}^{(n-2)} + \bar{\mu}_{n-2}^{(n-2)}\right)\gamma_1^{(1)} + \left(\mu_{n-2}^{(n-2)} - \bar{\nu}_{n-2}^{(n-2)}\right)\delta_1^{(1)}\Big) \\
+ 2\left(\nu_{n-1}^{(n-1)} + \bar{\mu}_{n-1}^{(n-1)}\right)\Big],\ \left(\delta_0^{(0)} = \nu_0 = \bar{\nu}_0 = 0,\ \gamma_0^{(0)} = 1\right),
\end{aligned}$$

wo die μ und ν durch die Entwicklungen

$$a(x,y) = \mu_0 + (\mu_1^{(1)}\cos\theta + \nu_1^{(1)}\sin\theta)r + (\mu_2^{(2)}\cos 2\theta + \nu_2^{(2)}\sin 2\theta + \mu_3^{(2)})r^2 + \cdots,$$

$$b(x,y) = \bar{\mu}_0 + (\bar{\mu}_1^{(1)}\cos\theta + \bar{\nu}_1^{(1)}\sin\theta)r + (\bar{\mu}_2^{(2)}\cos 2\theta + \bar{\nu}_2^{(2)}\sin 2\theta + \bar{\mu}_3^{(2)})r^2 + \cdots$$

definiert sind.

Die Bedingung dafür daß $f(x,y)$ regulär ist, d. h. die Form (A) hat, ist nach dem Hülfssatze die, daß

$$p_n^{(n-2)} = q_n^{(n-2)} = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Also müssen wir haben

$$(11)\left\{\begin{aligned}
&\gamma_1^{(1)} = \frac{\mu_0}{2},\quad \delta_1^{(1)} = \frac{\bar{\mu}_0}{2}, \\
&\gamma_n^{(n)} = \frac{1}{8n}\Big\{2\left(\mu_0\gamma_{n-1}^{(n-1)} - \bar{\mu}_0\delta_{n-1}^{(n-1)}\right) + \Big(\left(\mu_1^{(1)} - \bar{\nu}_1^{(1)}\right)\gamma_{n-2}^{(n-2)} \\
&\qquad\qquad - \left(\nu_1^{(1)} + \bar{\mu}_1^{(1)}\right)\delta_{n-2}^{(n-2)}\Big) + \cdots \\
&\qquad \cdots + \Big(\left(\mu_{n-2}^{(n-2)} - \bar{\nu}_{n-2}^{(n-2)}\right)\gamma_1^{(1)} - \left(\nu_{n-2}^{(n-2)} + \bar{\mu}_{n-2}^{(n-2)}\right)\delta_1^{(1)}\Big) \\
&\qquad + 2\left(\mu_{n-1}^{(n-1)} - \bar{\nu}_{n-1}^{(n-1)}\right)\Big\}, \\
&\delta_n^{(n)} = \frac{1}{8n}\Big\{2\left(\mu_0\delta_{n-1}^{(n-1)} + \bar{\mu}_0\gamma_{n-1}^{(n-1)}\right) + \Big(\left(\nu_1^{(1)} + \bar{\mu}_1^{(1)}\right)\gamma_{n-2}^{(n-2)} \\
&\qquad\qquad + \left(\mu_1^{(1)} - \bar{\nu}_1^{(1)}\right)\delta_{n-2}^{(n-2)}\Big) + \cdots \\
&\qquad \cdots + \Big(\left(\nu_{n-2}^{(n-2)} + \bar{\mu}_{n-1}^{(n-2)}\right)\gamma_1^{(1)} + \left(\mu_{n-2}^{(n-2)} - \bar{\nu}_{n-2}^{(n-2)}\right)\delta_1^{(1)}\Big) \\
&\qquad + 2\left(\nu_{n-1}^{(n-1)} + \bar{\mu}_{n-1}^{(n-1)}\right)\Big\} \\
&\qquad\qquad\qquad n = 2, 3, \cdots.
\end{aligned}\right.$$

Durch (11) werden somit die Koeffizienten $\gamma_n^{(n)}$, $\delta_n^{(n)}$ für sinus und cosinus der höchsten Multipeln von θ in $\alpha_n(\theta)$ eindeutig bestimmt.

Wir werden jetzt sehen daß das System (8), die Funktionen $\alpha_n(\theta)$ vollständig und eindeutig bestimmt, wenn wir $\gamma_n^{(n)}$ und $\delta_n^{(n)}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ die durch (11) bestimmten Werte geben.

Wir bemerken zuerst daß die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

(B) $$\frac{d^2\alpha}{d\theta^2} + n^2\alpha = \sum_{p=0}^{n-1} (C_p \cos p\theta + D_p \sin p\theta)$$

durch die Formel

(C) $$\alpha = E \cos n\theta + F \sin n\theta + \sum_{p=0}^{n-1} \left(C_p \frac{\cos p\theta}{n^2 - p^2} + D_p \frac{\sin p\theta}{n^2 - p^2} \right),$$

wo E und F beliebige Konstanten sind, gegeben ist.

Mit dieser Formel bestimmen wir mit Bezugnahme von (11) jetzt successive die Funktionen

$$\alpha_1(\theta), \alpha_2(\theta), \cdots, \alpha_n(\theta).$$

Wir finden

$$\alpha_1(\theta) = \frac{1}{2} (\mu_0 \cos \theta + \bar{\mu}_0 \sin \theta).$$

$\alpha_2(\theta)$ ist durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha_2}{d\theta^2} + 2^2\alpha_2 = (a)_0 &\left(\cos \theta \alpha_1 - \sin \theta \frac{d\alpha_1}{d\theta}\right) \\ &+ (b)_0 \left(\sin \theta \alpha_1 + \cos \theta \frac{d\alpha_1}{d\theta}\right) \\ &+ (c)_0 \end{aligned}$$

bestimmt. Wie man leicht sieht, reduziert sich die rechte Seite auf eine Konstante. Nach (C) bekommen wir dann, da $E = \gamma_2^{(2)}$, $F = \delta_2^{(2)}$

$$\alpha_2(\theta) = \gamma_2^{(2)} \cos 2\theta + \delta_2^{(2)} \sin 2\theta + \gamma_1^{(2)}.$$

Wir bestimmen jetzt $\alpha_3(\theta)$ usw. Allgemein bekommen wir

$$\alpha_n(\theta) = \gamma_n^{(n)} \cos n\theta + \delta_n^{(n)} \sin n\theta + \gamma_{n-2}^{(n)} \cos(n-2)\theta + \delta_{n-2}^{(n)} \sin(n-2)\theta + \cdots.$$

Nehmen wir in der Tat an, daß $\alpha_1(\theta), \alpha_2(\theta), \cdots, \alpha_{n-1}(\theta)$ von dieser Form sind, so zeigt man analog wie S. 407, daß die rechte Seite in der Differentialgleichung für $\alpha_n(\theta)$ von der Form ist

$$\begin{aligned} \Gamma_{n-2}^{(n)} \cos(n-2)\theta + \Delta_{n-2}^{(n)} \sin(n-2)\theta + \Gamma_{n-4}^{(n)} \cos(n-4)\theta \\ + \Delta_{n-4}^{(n)} \sin(n-4)\theta + \cdots. \end{aligned}$$

Die endlichen Fourierentwicklungen der verschiedenen Glieder,

$$(a)_{i-1} \left[(n-i) \cos \theta \alpha_{n-i} - \sin \theta \frac{d\alpha_{n-i}}{d\theta} \right],$$

$$(b)_{i-1} \left[(n-i) \sin \theta \alpha_{n-i} + \cos \theta \frac{d\alpha_{n-i}}{d\theta} \right]$$

sind nämlich von dieser Form (weil die Koeffizienten von $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ gleich Null sind).

Nach (C) finden wir also den angegebenen Ausdruck für $\alpha_n(\theta)$ da $E = \gamma_n^{(n)}$, $F = \delta_n^{(n)}$ sein müssen.

Die formelle Bestimmung der Reihe (7) ist also ausgeführt. Wir gehen jetzt zu der Konvergenzuntersuchung über.

Der Kürze wegen nehmen wir dabei an daß $a(x, y) = b(x, y) = 0$. Der Koeffizient $c(x, y)$ sei in der Umgebung von Origo in einer gewöhnlichen Potenzreihe entwickelbar, welche konvergiert, wenn $|x| < a$, $|y| < a$. Nach dem Hülfssatze S. 405 können wir dann diese Funktion in der Umgebung eines Punktes ξ, η in der Form entwickeln

$$
\begin{aligned}
c(x, y) &= (c)_0 + (c)_1 r + (c)_2 r^2 + \cdots \\
&= \sigma_0 + (\sigma_1^{(1)} \cos\theta + \varrho_1^{(1)} \sin\theta) r \\
&\quad + (\sigma_2^{(2)} \cos 2\theta + \varrho_2^{(2)} \sin 2\theta + \sigma_1^{(2)}) r^2 \cdots,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

wo die Koeffizienten gewönliche Potenzreihen von ξ, η sind. Diese Reihe konvergiert unabhängig von ξ, η wenn $|\xi|$, $|\eta| < \varrho$, $r < R$, vorausgesetzt, daß $\varrho + R < a$. Nach dem Hülfssatze S. 405 ist dann die Reihe

$$
[(c)_0] + [(c)_1] R' + [(c)_2] R'^2 + \cdots \tag{13}
$$

konvergent, wenn $R' < R$ und dies, wie man leicht sieht — wenn man sich erinnert wie der Übergang von der Potenzreihe für $c(x, y)$ in der Entwickelung (12) ausgeführt wird — nach elementaren Eigenschaften der Potenzreihen, unabhängig von der Lage von ξ, η (reell oder komplex) in dem Gebiete $|\xi|$, $|\eta| < \varrho$. Es sei die obere Grenze von (13), wenn ξ, η in diesem Gebiete variiert, M.

Die Koeffizienten $\alpha_n(\theta)$ in (7) werden nach (8) successive aus den Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2\alpha_1}{d\theta^2} + \alpha_1 = 0, \\
&\frac{d^2\alpha_n}{d\theta^2} + n^2\alpha_n = (c)_0\,\alpha_{n-2} + (c)_1\,\alpha_{n-3} + \cdots + (c)_{n-2} \\
&\qquad (n = 2, 3, 4, \cdots)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

bestimmt. Nach (11) ist $\gamma_n^{(n)} = \delta_n^{(n)} = 0$ (und also $\alpha_1 = 0$).

Um die Koeffizienten $\alpha_n(\theta)$ zu schätzen, machen wir zuerst einige vorbereitende Bemerkungen.

Wenn $C_p^{(n)}$ $D_p^{(n)}$ die Koeffizienten von $\sin p\theta$, $\cos p\theta$ in der Fourierentwickelung der rechten Seite von (14) bezeichnen, so haben wir nach (C)

$$
[\alpha_n] < \frac{1}{4(n-1)} \sum_{p=0}^{n-2} (|C_p^{(n)}| + |D_p^{(n)}|). \tag{15}
$$

Weiter ist

$$[(c)_i \alpha_{n-i}] < [(c)_i][\alpha_{n-i}]^{*)} < \frac{M}{R'^i}[\alpha_{n-i}]$$

Durch Anwendung dieser Formeln bekommen wir successive nach (13)

$$[\alpha_2] < \frac{M}{2^2}, \quad [\alpha_3] < \frac{1}{4\cdot 2}\frac{M}{R'} < \frac{MR'}{4\cdot 2}\left(\frac{M}{2^2} + \frac{1}{R'^2}\right),$$

$$[\alpha_4] < \frac{M}{4\cdot 3}\left(\frac{M}{2^2} + \frac{1}{R'^2}\right) < \frac{MR'}{4\cdot 3}\left(\frac{MR'}{4\cdot 2} + \frac{1}{R'}\right)\left(\frac{M}{2^2} + \frac{1}{R'^2}\right),$$

$$[(c)_1\alpha_2 + (c)_2\alpha_3 + (c)_3] < \frac{M}{R'}\left(\frac{M}{2^2} + \frac{1}{R'^2}\right),$$

$$[\alpha_5] < \frac{1}{4\cdot 4}\left(\frac{M^2R'}{4\cdot 2}\left(\frac{M}{2^2} + \frac{1}{R'^2}\right) + \frac{M}{R'}\left(\frac{M}{2^2} + \frac{1}{R'^2}\right)\right) = \frac{M}{4\cdot 4}\left(\frac{MR'}{4\cdot 2} + \frac{1}{R'}\right)\left(\frac{M}{2^2} + \frac{1}{R'}\right)$$

$$< \frac{MR'}{4\cdot 4}\left(\frac{MR'}{4\cdot 3} + \frac{1}{R'}\right)\left(\frac{MR'}{4\cdot 2} + \frac{1}{R'}\right)\left(\frac{M}{2^2} + \frac{1}{R'^2}\right),$$

$$[(c)_1\alpha_3 + (c)_2\alpha_2 + (c)_3\alpha_1 + (c)_4] < \frac{M}{R'}\left(\frac{MR'}{4\cdot 2} + \frac{1}{R'}\right)\left(\frac{M}{2^2} + \frac{1}{R'^2}\right),$$

$$[\alpha_6] < \frac{1}{4\cdot 5}\left\{\frac{M^2R'}{4\cdot 3}\left(\frac{MR'}{4\cdot 2} + \frac{1}{R'}\right)\left(\frac{M}{2^2} + \frac{1}{R'^2}\right) + \frac{M}{R'}\left(\frac{MR'}{4\cdot 2} + \frac{1}{R'}\right)\left(\frac{M}{2^2} + \frac{1}{R'^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{M}{4\cdot 5}\left(\frac{MR'}{4\cdot 3} + \frac{1}{R'}\right)\left(\frac{MR'}{4\cdot 2} + \frac{1}{R'}\right)\left(\frac{M}{2^2} + \frac{1}{R'^2}\right)$$

und allgemein

$$[\alpha_n] < \frac{M}{4(n-1)}\left(\frac{MR'}{4(n-3)} + \frac{1}{R'}\right)\left(\frac{MR'}{4(n-4)} + \frac{1}{R'}\right)\cdots\left(\frac{MR'}{4\cdot 2} + \frac{1}{R'}\right)\left(\frac{M}{2^2} + \frac{1}{R'^2}\right).$$

Man findet jetzt leicht, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\alpha_n]r^n$$

konvergiert, wenn $r < R'$.

Die Reihe $u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(\theta)r^n$ konvergiert also (unabhängig von ξ, η, welche reelle oder komplexe Werte, deren absoluten Beträge kleiner als ϱ sind, annehmen dürfen) wenn $r < R$, also in demselben Gebiete wie die Reihe (12)**). Wenn man die Variabeln x, y statt r, θ einführt, so sieht

*) Diese erste Ungleichung folgt leicht, wenn man sich der Formel

$$\cos m\theta \cos n\theta = \frac{1}{2}[\cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta]$$

und der analogen für $\cos m\theta \sin m\theta$ und $\sin m\theta \sin n\theta$ bedient.

**) Wenn man auf das Erhalten des größtmöglichen Konvergenzgebiets verzichtet, so kann der Konvergenzbeweis offenbar einfacher geführt werden. Ohne eine Beschränkung zu machen, kann man annehmen daß $R > 1$; denn durch die Transformation $x - \xi = (x' - \xi)\alpha$, $y - \eta = (y' - \eta)\alpha$, wo α eine genügend klein zu nehmende Konstante ist, kann dieses immer erreicht werden. Ist G die größte der

man (nach dem Hülfssatze S. 405 und dem Weierstraßschen Doppelreihensatz) daß $u(x, y)$ eine eindeutige analytische Funktion von x, y, ξ, η ist, wenn $|\xi|, |\eta| < \varrho, |x-\xi| < \frac{R}{2}, |y-\eta| < \frac{R}{2}$. Ist z. B. $c(x, y)$ eine ganze transcendente Funktion, so wird $u(x, y, \xi, \eta)$ eine ganze transcendente Funktion von x, y, ξ, η.

Nachdem so $u(x, y)$ bestimmt ist, geschieht die Bestimmung von $v(x, y)$ aus der Gleichung $D(v) + f(x, y) = 0$ nach derselben Methode. Die Konstanten $\gamma_n^{(n)}, \delta_n^{(n)}$ sind beliebig zu nehmen, nur muß die Reihe $\sum_n (|\gamma_n^{(n)}| + |\delta_n^{(n)}|)R^n$ konvergieren. Ist $c(x, y)$ eine ganze transcendente Funktion so kann $v(x, y, \xi, \eta)$ als eine solche (von x, y, ξ, η) bestimmt werden.

Zahlen M, die zu den Funktionen a, b, c gehören (wir betrachten den allgemeinen Fall) so bekommt man $[\alpha_n] < \frac{1}{n} 7^{n-1} M^n$, $\left[\frac{d\alpha_n}{d\theta}\right] < 7^{n-1} M^n$, woraus die Konvergenz von (7) in dem Gebiete $r < \frac{1}{7M}$ sich ergibt.

Über den kartographischen Vierfarbensatz.

Von

P. WERNICKE in Göttingen.

Unter *Karte* wollen wir eine Teilung der Kugelfläche durch beliebige auf ihr gelegenen Kurven verstehen. Zerschnitte man sie längs dieser Kurven, so zerfiele sie in mehrere Teile, die *Länder* der Karte heißen sollen. Die Punkte, in denen sich die Kurven treffen, nennen wir *Ecken*, und die Kurvenstücke von einer Ecke bis zur nächsten gerechnet, aus denen die Begrenzung eines Landes besteht, *Grenzen*. Zwei Länder sind *benachbart*, wenn sie eine Grenze (oder mehrere) gemein haben.

Der Vierfarbensatz, der seit Francis Guthrie*) und De Morgan seitens der Mathematiker Beachtung gefunden hat, während er vorher nur negatives Resultat der kartographischen Erfahrung war, sagt nun aus, *daß auf jeder Karte zur Unterscheidung benachbarter Länder vier Farben ausreichen.* Wäre die Karte auf einer mehrfach zusammenhängenden Fläche ausgeführt, so wäre die *chromatische Zahl*, wie wir die geringste Anzahl von Farben bezeichnen dürfen, mit denen Nachbarländer stets unterschieden werden können, größer als vier (auf der Ringfläche z. B. sieben). Heawood**) hat, indem er zugleich die Unzulänglichkeit eines früheren Beweises des Vierfarbensatzes nachwies, obere Grenzen für die chromatischen Zahlen von Flächen beliebigen Geschlechts angeben. Heffter***) zeigte, daß bei bestimmten Werten der Geschlechtszahl p der Fläche ihre chromatische Zahl die Heawoodsche Grenze erreicht, da diese die Anzahl der „spatia confinia", d. h. Länder, die so auf die Fläche gelegt werden können, daß sie einander alle benachbart sind, für die betreffenden p-Werte angibt. Für die Kugelfläche (resp. Ebene) ist jedoch Heawoods Grenze fünf. Endlich hat G. Tait†) das Problem auf ein anderes zurückzuführen gesucht, welches er für leichter lösbar hielt, das sich aber mit dem Vierfarbensatz völlig äquivalent erweisen wird.

*) cf. F. Guthrie in Proc. Roy. Soc. Edinb. X, 1878/80.

**) Quart. Journ. of Math. 1890.

***) Über das Problem der Nachbargebiete, Math. Ann. 1891.

†) Collected papers XI, p. 7; Proc. Roy. Soc. Edinb. X, 1880, sowie in dem Aufsatz: Listings Topology. Philos. Mag. 5 ser., vol. 17, 1884.

I. Erste Spezialisierung der zu färbenden Karte.

Auf den Karten (M), die wir betrachten wollen, schließen wir zunächst das Vorkommen mehrfach zusammenhängender Länder aus. Ist nämlich L ein solches, so zerfällt seine Begrenzung in mehrere Ränder $(R_1, R_2 \cdots R_m)$, deren jeder aus „Grenzen" besteht. Nun teilt (Fig. 1) R_1 die

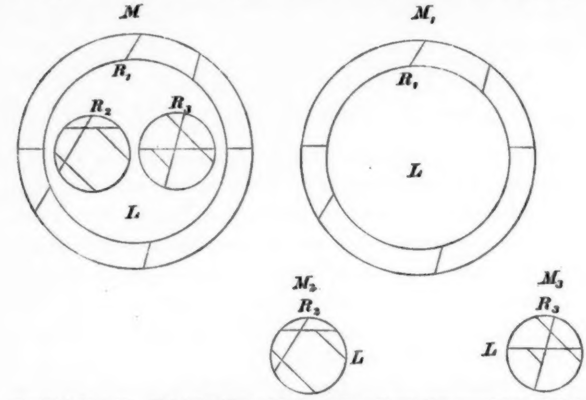


Fig. 1. $M = M_1 + M_2 + M_3$. Bei jeder Karte ist das äußere Land (der unendliche Teil der Ebene, resp. der restierende der Kugelfläche) mitzuzählen.

Kugelfläche in zwei Teile, von denen wir den L nicht enthaltenden das Innere nennen. Wir bilden Teilkarten $M_1, M_2 \cdots M_m$ bestehend aus dem Inneren je *eines* Randes $R_1 \cdots R_m$ und L (zu dessen Fläche das Innere der anderen Ränder hinzugefügt wurde). Können wir diese Teilkarten in vier Farben a, b, c, d ausführen, und benutzen wir jedesmal eine solche Permutation derselben, die L die Farbe a erteilt, so ist sofort klar, wie sich M, richtig gefärbt, aus den Teilkarten zusammensetzt.

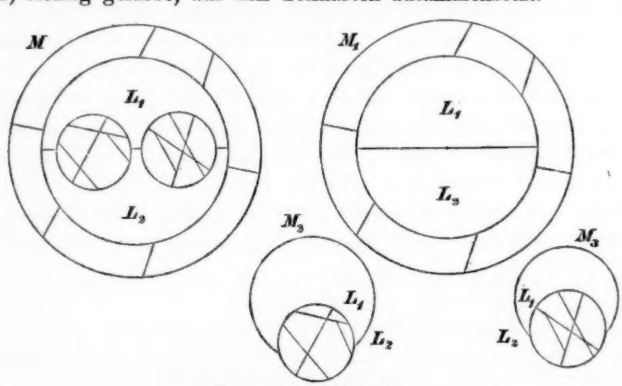


Fig. 2. $M = M_1 + M_2 + M_3$.

Analog ließen sich (Fig. 2) mehrfach zusammenhängende Gebiete von zwei oder drei Ländern ($L_1 + L_2$, $L_1 + L_2 + L_3$) ausschließen. Damit verschwänden von M alle Teile des Kartennetzes, die mit dem Übrigen nur durch zwei oder drei Grenzen verbunden sind, insbesondere zweieckige und dreieckige Länder.

Falls ein Land an sich selbst grenzt, so müßte an die Grenze beiderseits dieselbe Farbe stoßen. Für uns kommen solche „falschen Grenzen" nicht in Betracht und wir wollen sie uns von der Karte entfernt denken.

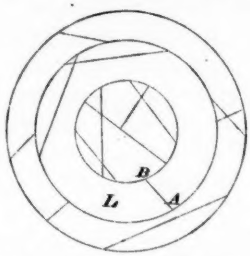


Fig. 3. AB ist eine „falsche Grenze".

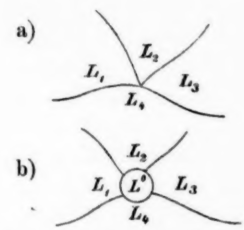


Fig. 4. Statt einer Ecke wie bei a) ist ein Ländchen L^0 wie bei b) einzuführen.

Weiter können wir annehmen, daß in jeder Ecke nur drei Grenzen zusammentreffen. Andernfalls sehen wir den Eckpunkt als Grenzfall eines dehnbaren Kreises an, der ein Ländchen $L^{(0)}$ umschließt. Dies ändert die Nachbarschaft der übrigen Länder nicht und gibt uns Ecken der gewünschten Art. Gelingt es, die Karte mit den $L^{(0)}$ wie verlangt zu färben, so ist beim Übergange zur Grenze auch die ursprüngliche Karte mit vier (oder gar drei) Farben gefärbt.

II. Das Grenzenproblem $\mathfrak{G}$. Weitere Spezialisierung.

Auf der so spezialisierten Karte betrachten wir nun das System der *Grenzen*, deren zwei wir *benachbart* nennen, wenn sie sich in einer Ecke treffen. Es läßt sich die völlige Äquivalenz der beiden Aufgaben zeigen:

$\mathfrak{L}$) Unter Anwendung von 4 Farben (a, b, c, d) benachbarte Länder zu unterscheiden,

und

$\mathfrak{G}$) Unter Anwendung von 3 Indizes (α, β, γ) benachbarte Grenzen zu unterscheiden.

Ist nämlich $\mathfrak{L}$ gelöst, so wird, da nur drei Farben an eine Ecke stoßen, keine b von c trennende Grenze mit einer a von d trennenden benachbart sein. Beide Arten können den Index α erhalten. Ebenso die c von a und die b von d trennenden den Index β; die a von b und die c von d trennenden den Index γ; wodurch $\mathfrak{G}$ gelöst ist. Liegt dagegen eine

Lösung von $\mathfrak{G}$ vor, so ordnen wir den Grenzen α, β, γ bezw. die Substitutionen $s_\alpha = (bc)(ad)$, $s_\beta = (ca)(bd)$, $s_\gamma = (ab)(cd)$ zu, geben einem Lande L eine beliebige Farbe, den benachbarten die, welche daraus durch die Substitutionen der gemeinsamen Grenzen hervorgehen, usw. Es ist zu zeigen, daß dabei kein Land mehr als eine Farbe erhält. Dazu legen wir von einem Punkte A eines Landes L einen kontinuierlichen Weg beliebig über die Karte (doch nicht gerade durch Ecken) nach einem Punkte B desselben Landes. Von A mit der Farbe des Landes L (sie sei a) ausgehend, wechseln wir beim Überschreiten jeder Grenze gemäß der zugeordneten Substitution die Farbe. Wir wollen zeigen, daß wir ohne Änderung der Endfarbe, mit der wir in B anlangen, den Weg in einen solchen zusammenziehen können, der L nicht verläßt, woraus folgt, daß die Endfarbe a ist. Das zu Beweisende folgt nun aus den Relationen der Vierergruppe: I) $s_\alpha^2 = s_\beta^2 = s_\gamma^2 = 1$, II) $s_\beta s_\gamma = s_\alpha$, $s_\gamma s_\alpha = s_\beta$, $s_\alpha s_\beta = s_\gamma$, III) $s_\alpha s_\beta s_\gamma = 1$. Wegen I) kann man ein Stück des Weges, das eine Grenze $2n$-mal hintereinander kreuzt, durch eins ersetzen, das sie nicht überschreitet, wegen II) eins, das über zwei benachbarte Grenzen geht, durch ein die dritte, beiden benachbarte, Grenze kreuzendes; endlich wegen III) ein alle drei Grenzen einer Ecke überschreitendes durch ein an der Ecke vorübergehendes Stück. Diese Umformungen leisten *auf einfach zusammenhängenden Flächen* das Verlangte, während auf einer Ringfläche z. B. der Weg sich möglicherweise überhaupt nicht so zusammenziehen ließe, daß er L nicht verläßt. Für Flächen vom Geschlecht $p = 0$ können wir daher schreiben:

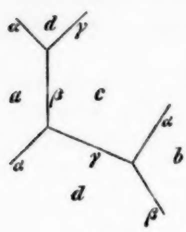


Fig. 5.

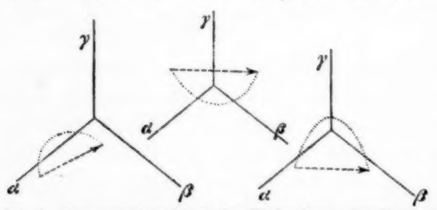


Fig. 6. Das punktierte Stück des Weges kann überall durch das gestrichelte ersetzt werden, und umgekehrt.

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{G}.$$

Nun bilden wir Ketten $K_{\alpha\beta}$ von Grenzen, indem wir von einer Ecke aus zu derjenigen weitergehen, die mit ihr durch ein α verbunden ist, dann auf einem β fortschreiten u. s. f. abwechselnd auf α und β. Man berührt so jede Ecke, zu der man gelangt, nur einmal. Wegen der endlichen Anzahl der Ecken schließt sich die Kette. Es kann mehrere $K_{\alpha\beta}$ geben, die sich aber nicht durchsetzen. Sie trennen Regionen (R_{ab}) von Ländern, die nur die Farben a und b tragen, von Regionen (R_{cd}),

auf der nur c und d vorkommen, denn die übrigbleibenden γ-Grenzen trennen nur a von b, resp. c von d. Ebenso gibt es Ketten $K_{\beta\gamma}$ und $K_{\gamma\alpha}$.

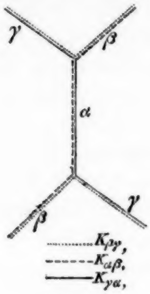


Fig. 7.

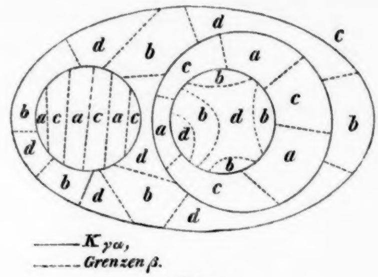


Fig. 8.

Offenbar ist es gestattet, auf einer $K_{\alpha\beta}$ für sich die Indizes α, β zu permutieren, was einer Permutation der beiden Farben auf gewissen Regionen R_{ab} und R_{cd} gleichkommt. Auch können wir mit richtiger Färbung eine Karte herstellen, die ein Land mehr enthält. Wir nehmen dazu auf zwei Grenzen *einer* $K_{\alpha\beta}$, die zugleich zur Begrenzung *eines* Landes L gehören, je eine neue Ecke an und verbinden letztere durch eine „neue" Grenze, die wir quer durch L ziehen. Von der neuen Grenze sagen wir, sie *trenne* (durch ihre Ecken) die Kette $K_{\alpha\beta}$. Auf dem einen Teile der getrennten $K_{\alpha\beta}$ vertauschen wir nun α mit β, während wir der neuen Grenze den Index γ erteilen. Die so hergestellte richtig gefärbte Karte hat ein Land, drei Grenzen und zwei Ecken mehr, als die ursprüngliche.

Jedesmal nun, wenn man auf einer Karte eine neue Grenze einführt, die einem Zweieck oder Dreieck angehört, trennt man damit eine Kette ($K_{\alpha\beta}$, $K_{\beta\gamma}$ oder $K_{\gamma\alpha}$), da die zwei neuen Ecken auf einer alten Grenze resp.

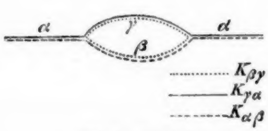


Fig. 9. Zweieck.

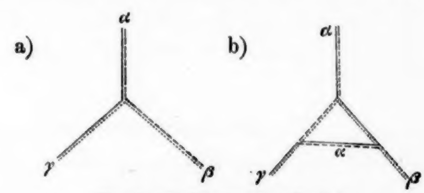
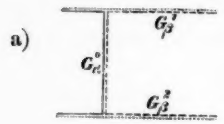


Fig. 10. Einführung eines Dreiecks. Aus a) wird b).

auf zwei benachbarten liegen werden. Es gelingt also stets, wenn eine Karte bereits richtig gefärbt ist, noch beliebig oft Zweiecke und Dreiecke einzuführen. Ist daher eine vorgelegte Karte zu färben, so entfernen wir von ihr alle Zweiecke durch Löschen je einer Grenze, sodann ein Dreieck ebenso,

dann wieder ein etwa entstandenes Zweieck, dann das nächste Dreieck, usw. bis alle Zwei- und Dreiecke verschwunden sind, oder etwa die Anzahl der Länder sich auf vier reduziert. Es ist die Aufgabe, die restierende Karte zu färben.

Doch auch die Vierecke lassen sich noch aus demselben Grunde von der Karte entfernen. Soll nämlich auf einer bereits gefärbten Karte durch Ziehen *einer* Grenze ein Viereck eingeführt werden, so mögen die neuen Ecken (Endpunkte der zu ziehenden Grenze) auf den alten Grenzen G^1 und G^2 zu liegen kommen.



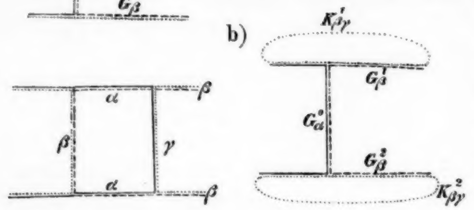


Fig. 11. Unter b) ist angedeutet daß $K^1_{\beta\gamma} \neq K^2_{\beta\gamma}$ ist.

Das neue Viereck wird außer der neuen Grenze G und Teilen der alten Grenzen G^1 und G^2 noch die G^1 und G^2 benachbarte Grenze G^0 haben. Der Kürze halber bedienen wir uns weiterhin folgender Bezeichnungen:

Es bedeute $K^{\lambda,\mu,\nu}_{\alpha\beta}$ die *Kette* der Indizes α, β, welche (unter andern) die Grenzen G^λ, G^μ, G^ν enthält, dementsprechend:

das Operationszeichen $\lfloor K^{\lambda,\mu,\nu}_{\alpha,\beta} \rceil$ die *Vertauschung der Indizes* α und β auf $K^{\lambda,\mu,\nu}_{\alpha,\beta}$.

G^λ_α schreiben wir, wenn G^λ den Index α hat.

1) Bei *gleichen* Indizes (β) von G^1 und G^2 haben wir dann das Schema G^0_α, G^1_β, G^2_β (G^0_γ ergibt nichts Neues, da es nur auf Verschiedenheit dieses Index von dem von G^1 und G^2 ankommt). Es existiert also eine $K^{0,1,2}_{\alpha\beta}$, die durch die neue Grenze G getrennt wird. (Fig. 11a.)

2) Bei *verschiedenen* Indices haben wir: G^0_α, G^1_β, G^2_γ. Existiert nun $K^{1,2}_{\beta\gamma}$, so wird sie durch G getrennt. Sind aber $K^1_{\beta\gamma}$ und $K^2_{\beta\gamma}$ verschiedene Ketten, so erhält man durch $\lfloor K^{1,2}_{\beta\gamma} \rceil$ das obige Schema G^0_α, G^1_β, G^2_γ wieder. (Fig. 11b.)

III. Die Karte ohne Zwei-, Drei- und Vierecke.

Die successive Entfernung der Zwei-, Drei- und Vierecke, wobei die Entstehung „falscher" Grenzen zu vermeiden ist*), kann auf eine Karte von nur vier Ländern führen, dann ist die Aufgabe gelöst. Im allgemeinen wird jedoch eine kompliziertere Karte übrig bleiben, von der wir beweisen:

*) Statt eine Viereckgrenze zu entfernen und dadurch die gegenüberliegende zur falschen zu machen, bildet man nach pag. 413 Teilkarten oder entfernt eine andere Vierecksgrenze, etc., s. a. pag. 425.

1) Sie enthält Fünfecke (mindestens 12).

2) Wenigstens *ein* Fünfeck grenzt an ein Land von nicht mehr als sechs Ecken. (Dies im Interesse fernerer Übersichtlichkeit.)

Sei l die Anzahl der Länder,
l_ν „ „ „ ν-ecke darunter,
g „ „ „ Grenzen,
e „ „ „ Ecken,

so gilt, wie man sich leicht überzeugt, Eulers Polyedersatz:

$$l - g + e = 2,$$

oder wegen

$$2g = 3e = \Sigma \nu l_\nu \qquad (\nu = 5, 6, \cdots)$$

und

$$l = \Sigma l_\nu,$$

$$\sum_\nu (6-\nu) l_\nu = 12,$$

d. h.

$$l_5 = 12 + \Sigma(\nu - 6) l_\nu \qquad (\nu = 7, 8, \cdots),$$

womit die erste Behauptung erwiesen ist.

Außerdem folgt $g = 3(l-2)$, $e = 2(l-2)$. Grenzten nun die Fünfecke nirgends aneinander, so trügen sie schon allein $5l_5$ zur Anzahl der Ecken bei; und grenzten auch die Sechsecke an keine Fünfecke (aber beliebig oft aneinander), so würden sie noch mehr als $\frac{6l_6}{3} = 2l_6$ hinzufügen. Es müßte daher

$$5l_5 + 3l_6 < e,$$

aber

$$e = 2\Sigma l_\nu - 4 \qquad (\nu = 5, 6, \cdots)$$

also

$$3l_5 < 2\Sigma l_\nu - 4 \qquad (\nu = 7, 8, \cdots).$$

Daraus ergäbe sich:

$$40 + \sum_\nu (3\nu - 20) l_\nu < 0 \qquad (\nu = 7, 8, \cdots)$$

was nicht angeht. Es würden sogar, wenn die Fünfecke paarweise aneinander (aber an keine Sechsecke) grenzten, noch zu viele Ecken herauskommen.

Bei der ferneren Reduktion beschränken wir uns also auf das Auslöschen von solchen Grenzen, die zwischen zwei Fünfecken oder zwischen Fünfeck und Sechseck verlaufen. Daß man auf bereits gefärbter Karte solche Grenzen wieder einführen, d. h. Sechsecke (auf sechs Weisen) in zwei Fünfecke, Siebenecke in ein Fünf- und ein Sechseck jedesmal *unter Trennung einer Kette* zerlegen kann, muß nun gezeigt werden.

IV. Teilung eines Sechsecks in zwei Fünfecke.

Die Sechsecksgrenzen seien in natürlicher Folge $G^1, G^2, G^3, \cdots G^6$ (Umlaufssinn gleichgültig). Es sei beabsichtigt, die neuen Ecken auf G^1 und G^4 zu legen, von denen wir gleich annehmen, daß sie nicht auf einer Kette liegen, und denen wir daher denselben Index geben können. G^2, G^3 müssen dann die anderen Indizes haben: so erhalten wir das Schema: G^1_β, G^2_α, G^3_γ, G^4_β, dazu G^5_α, G^6_γ (oder G^5_γ, G^6_α, was wir später betrachten), $K^{1,2}_{\alpha\beta} + K^{4,5}_{\alpha\beta}$, $K^{1,6}_{\beta\gamma} + K^{4,3}_{\beta\gamma}$ und zunächst $K^{2,3}_{\gamma\alpha} = K^{5,6}_{\gamma\alpha}$. Durch $\lfloor K^4_{\alpha\beta}\rfloor$ und $\lfloor K^1_{\beta\gamma}\rfloor$ könnte man nun eine $K^{1,2,3,4}_{\gamma\alpha}$ herstellen, wenn eine dieser Operationen die Kette der anderen intakt ließe. Es soll also ferner $\lfloor K^4_{\alpha\beta}\rfloor$ eine $K^{1,3}_{\beta\gamma}$, $\lfloor K^1_{\beta\gamma}\rfloor$ eine $K^{4,2}_{\alpha\beta}$ hervorbringen, desgl. wegen der Symmetrie $\lfloor K^4_{\beta\gamma}\rfloor$ eine $K^{1,5}_{\alpha\beta}$, $\lfloor K^1_{\alpha\beta}\rfloor$ eine $K^{4,6}_{\beta\gamma}$.

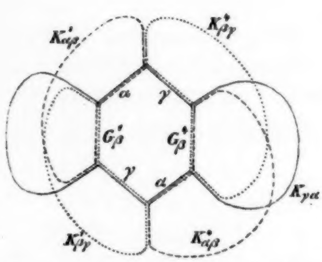


Fig. 12. Von den Ketten ist nur gezeigt, wie sie sich schließen.

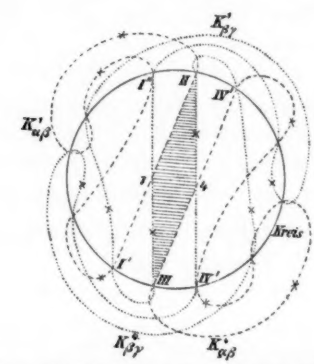


Fig. 13. Hülfsfigur zu Fig. 12. Die Ketten sind nach Belieben weiter verschlungen. Die mit Kreuzen bezeichneten Stücke bilden ein Beispiel eines „zusammengesetzten Weges“.

Nun ziehe man noch unmittelbar außerhalb der $K^1_{\gamma\alpha}$, d. h. auf der Seite, die das Sechseck nicht enthält, eine geschlossene Kurve, die der $K^1_{\gamma\alpha}$ in ihrem ganzen Verlaufe folgt, die also die β-Grenzen, welche von der $K^1_{\gamma\alpha}$ auswärts gehen — aber keine andern Grenzen — schneidet. Auf dieser Kurve, die wir einfach den *Kreis* nennen wollen, liegen also in gerader Anzahl Schnittpunkte mit Ketten $K_{\alpha\beta}$, die zugleich solche mit $K_{\beta\gamma}$ sind. Weder die $K_{\alpha\beta}$ durchdringen einander, noch die $K_{\beta\gamma}$. Insbesondere werden die Ketten $K^1_{\alpha\beta}$ und $K^4_{\alpha\beta}$ von $K^1_{\beta\gamma}$ und $K^4_{\beta\gamma}$ so durchsetzt, daß unser Sechseck, oder wenn wir sämtliche β-Grenzen so verkürzen, daß sie nur noch als Durchdringungsstellen der $K_{\alpha\beta}$ und $K_{\beta\gamma}$ anzusehen sind, ein Viereck entsteht, von dem zwei Ecken (II und III) auf dem Kreise, zwei (1 und 4) innerhalb desselben liegen.

Wir beweisen den *Hülfssatz, daß bei dieser Anordnung ein Weg, der von* 1 *auf der* $K_{\alpha\beta}$ *bis zum Kreise fortschreitet, dann von dort außerhalb des Kreises auf* $K_{\beta\gamma}$ *bis zum nächsten Schnittpunkte mit dem Kreise, dann innerhalb auf* $K_{\alpha\beta}$ *u. s. f. immer innerhalb auf* $K_{\alpha\beta}$, *außerhalb auf* $K_{\beta\gamma}$, *den Punkt* 4 *berühren muß, ehe er zu* 1 *zurückkehrt.*

Bezeichnet man noch mit I', I'' die zweiten Punkte, bei denen man von 1 ausgehend auf $K_{\beta\gamma}$, $K_{\alpha\beta}$ aus dem Kreise heraustritt, mit IV', IV'' die entsprechenden, welche man von 4 aus erreicht, und numeriert von III aus in beliebiger Richtung die Schnittpunkte des *Kreises*, so erhalten *die* Schnittpunkte, die beim Umlauf um eine *Kette* aufeinanderfolgen, abwechselnd gerade und ungerade Nummern.

Geht man nun von 1 aus über III abwechselnd innerhalb des Kreises auf $K_{\alpha\beta}$, außerhalb aber auf $K_{\beta\gamma}$ weiter, so zerschneidet dieser zusammengesetzte Weg (der sich bei 1 schließen muß, da er jeden seiner Schnittpunkte nur einmal berührt) den Kreis in eine gerade Anzahl Teile, deren jeder eine gerade Anzahl von Schnittpunkten umfaßt. Ginge der Weg durch II, so käme man von dort nach 4. Andernfalls müßten die Endpunkte des Kreisteiles, auf dem II liegt, von II selbst beide um eine ungerade (in den späteren Hülfsfiguren auch beide um eine gerade) Anzahl Schnittpunkte entfernt liegen. Hierzu zwingt an der einen Seite der Verlauf der $K^4_{\alpha\beta}$, auf der andern der der $K^1_{\beta\gamma}$, die sich in II treffen. Da II selbst noch hinzukommt, so läge eine ungerade Anzahl Schnittpunkte zwischen einem ungerade und einem gerade numerierten, worin ein Widerspruch liegt.

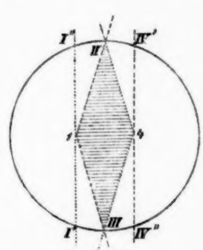


Fig. 14.

Auf der Karte können wir nun den „zusammengesetzten Weg" durch $[K_{\gamma\alpha}]$ auf allen $K_{\gamma\alpha}$ *außerhalb* $K^2_{\gamma\alpha}$ zu *einer* $K^{1,4}_{\alpha\beta}$ machen. Zugleich entsteht eine $K^{1,4}_{\beta\gamma}$. Die $[K_{\gamma\alpha}]$ vertauscht nämlich außen überall $K_{\alpha\beta}$ mit $K_{\beta\gamma}$. Auch bei G^5_γ, G^6_α führt dieses Verfahren zum Ziele, nur daß die Seiten des zu betrachtenden Vierecks *einer* $K_{\alpha\beta}$ resp. *einer* $K_{\beta\gamma}$ angehören. Den Fall endlich, daß $K^2_{\gamma\alpha} \neq K^5_{\gamma\alpha}$ ist, behandeln wir in dem Abschnitt über Kreuzung der Grenzen.

V. Teilung des Siebenecks in Fünf- und Sechseck.

Wieder seien G^1_β, G^4_β die Grenzen, welche die neuen Ecken tragen sollen. Nach dem früheren können wir gleich das Schema ansetzen, welches allein Schwierigkeiten bietet:

$$G^1_\beta,\ G^2_\alpha,\ G^3_\gamma,\ G^4_\beta,\ K^1_{\alpha\beta} \neq K^4_{\alpha\beta},\ K^1_{\beta\gamma} \neq K^4_{\beta\gamma},\ \text{zunächst } K^{2,5,7}_{\gamma\alpha};$$

dazu

1) G^6_β mit den Unterfällen G^5_α, G^7_γ oder G^5_γ, G^7_α

oder

2) $K^{5,6,7}_{\gamma\alpha}$ „ „ „ G^5_α, G^6_γ, G^7_α „ G^5_γ, G^6_α, G^7_γ.

Die 1) entsprechenden Figuren des Hülfssatzes unterscheiden sich von denen beim Sechseck dadurch, daß der Punkt III, in dem sich $K^1_{\alpha\beta}$ und $K^4_{\beta\gamma}$ treffen, in das Innere des Kreises rückt, so daß wir noch die weiteren Punkte III′ und III″ erhalten, in denen $K^4_{\beta\gamma}$, $K^1_{\alpha\beta}$ aus dem Kreise treten. Dabei können III III′, III III″, da sie ja auf der Karte in *eine* Grenze zusammenfallen, ebensowenig von einer Kette überschritten werden, wie die Seiten des charakteristischen Vierecks der Figur. Zwischen III′ und III″ kann der Kreis von $K_{\alpha\beta}$ sowohl wie von $K_{\beta\gamma}$ nur eine gerade Anzahl von Malen überschritten werden. Auf diese Figur findet die frühere Überlegung sofort Anwendung, indem man wieder dasjenige von dem „zusammengesetzten Wege“ ausgeschnittene Stück des Kreises betrachtet, welches den Punkt II enthält.

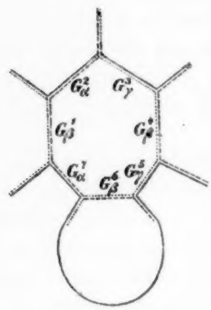


Fig. 15.

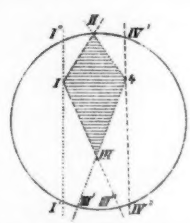


Fig. 16. Hülfsfigur zu Fig. 15.

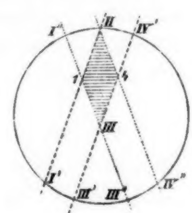


Fig. 17.

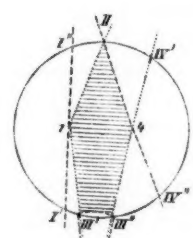


Fig. 18.

Schließlich gilt dasselbe von dem zweiten Falle, in welchem der Punkt III der Hülfsfigur in zwei, III′ und III″ auseinanderfällt, zwischen denen aber, da sie auf der Karte durch eine γ-Grenze (resp. α-Grenze) verbunden sind, keine weiteren Schnittpunkte des Kreises liegen.

VI. Das Kreuzen der Grenzen.

Um in dem noch restierenden Falle, daß $K^2_{\gamma\alpha} + K^5_{\gamma\alpha}$ ist — $K^5_{\gamma\alpha} + K^7_{\gamma\alpha}$ brauchen wir nicht zu berücksichtigen, da $[K^7_{\gamma\alpha}]$ sofort eine $K^{1,4}_{\alpha\beta}$ oder $K^{1,4}_{\beta\gamma}$ schaffen würde — den Anschluß an das Bewiesene zu gewinnen, bedienen wir uns der *Kreuzung der Grenzen.* Darunter ver-

stehen wir, falls die Grenze $\mathfrak{G}^0$ mit $\mathfrak{G}^1$ und $\mathfrak{G}^2$ in der Ecke $\mathfrak{E}^1$, mit $\mathfrak{G}^3$ und $\mathfrak{G}^4$ in $\mathfrak{E}^3$ zusammenstößt*), den Ersatz von $\mathfrak{G}^0$ durch eine Grenze $\mathfrak{G}$, die sich in einer Ecke $\mathfrak{E}^2$ mit $\mathfrak{G}^2$ und $\mathfrak{G}^3$, in der andern $\mathfrak{E}^4$ mit $\mathfrak{G}^1$ und $\mathfrak{G}^4$ trifft.

Unterscheiden wir nun die Ecken einer gefärbten Karte durch Vorzeichen ($\pm$) jenachdem die cyklische Folge $(\alpha\beta\gamma)$ ihrer Grenzen um sie herum in einer festgesetzt positiven Drehrichtung läuft oder umgekehrt, so ist klar, daß sich jede Grenze kreuzen läßt, deren Enden gleiche Vorzeichen aufweisen. (Fig. 19, 20.) Daß dann die beiden Länder, die durch die Kreuzung zu benachbarten werden, bereits verschieden gefärbt sind, kann man auch aus dem Schema der Farbenfolge in positiver Richtung bei einer + Ecke ersehen, nämlich (abc), (dba), (dac) und (dcb), während die übrigen vier Cyklen einer negativen Ecke entsprechen.

Die Vertauschung der Indizes einer Kette ändert die Vorzeichen sämtlicher Ecken, durch die sie geht.

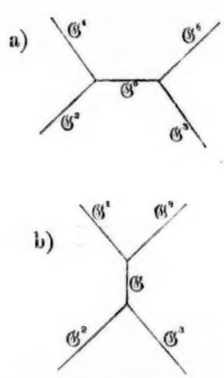


Fig. 19. „Kreuzen" einer Grenze. Aus a) wird b).

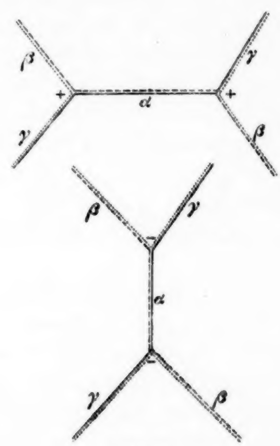


Fig. 20.

Ist nun $K^2_{\gamma\alpha} \neq K^4_{\gamma\alpha}$ und gibt es β-Grenzen, die beide verbinden, so können die $K_{\gamma\alpha}$ durch Kreuzung einer β-Grenze zusammengeschlossen werden, wobei noch $\lfloor K^4_{\gamma\alpha} \rceil$ nötig werden kann, um die Ecken der β-Grenze auf gleiches Zeichen zu bringen. Aber $\lfloor K^4_{\gamma\alpha} \rceil$ kann nur zu einem anderen bereits besprochenen Typus der Figur führen, indem für G^5_α, G^7_γ die Indizierung G^5_γ, G^7_α eintritt. Entsteht dabei etwa schon eine $K^{1,4}_{\alpha\beta}$ oder $K^{1,4}_{\beta\gamma}$, so ist die Aufgabe gelöst; andernfalls tritt das frühere Verfahren

*) $\mathfrak{G}^1\mathfrak{G}^2\mathfrak{G}^3\mathfrak{G}^4$ soll die Reihenfolge um $\mathfrak{G}_0$ herum sein.

in seine Rechte. Der Verlauf der $K_{\alpha\beta}$ und $K_{\beta\gamma}$ wird, wie man sich leicht überzeugt, durch Kreuzung einer β-Grenze nicht gestört. Die Ecken der gekreuzten Grenze haben unter sich gleiche, den früheren entgegengesetzte Vorzeichen.

Um uns nun zu überzeugen, daß die notwendigen Kreuzungen — denn es können mehrere nötig werden, um $K_{\gamma\alpha}^2$ mit $K_{\gamma\alpha}^5$ zusammenzuschließen — später wieder rückgängig gemacht werden können, bemerken wir, 1) daß die noch auszuführende „$\lfloor K_{\gamma\alpha}\rceil$ außerhalb des Kreises" die Ecken der gekreuzten Grenze, die ja innerhalb des Kreises liegen, nicht berührt, 2) daß die teilweise $\lfloor K_{\alpha\beta}\rceil$ oder $\lfloor K_{\beta\gamma}\rceil$, die beim Ziehen der Fünfecksgrenze erfolgt, beide Ecken an der gekreuzten Grenze gleichmäßig affiziert.

VII. Das Eckenproblem, Vereinfachungen und Folgerungen.

Umläuft man ein Land in positiver Richtung, so findet man, daß der Index der Grenze, auf der man sich jeweils befindet, beim Passieren einer positiven Ecke gemäß der cyklischen Substitution $(\alpha\gamma\beta)$, bei einer negativen hingegen gemäß $(\alpha\beta\gamma)$ geändert wird. Da man bei vollem Umlaufe zu demselben Index zurückkehren muß, so ist, wenn p positive, n negative Ecken auf der Begrenzung eines Landes liegen:

$$(\alpha\gamma\beta)^p \cdot (\alpha\beta\gamma)^n = 1,$$

oder wegen

$$(\alpha\beta\gamma)^2 = (\alpha\gamma\beta), \quad (\alpha\gamma\beta)^2 = (\alpha\beta\gamma), \quad (\alpha\beta\gamma)^3 = (\alpha\gamma\beta)^3 = 1,$$

$$p \equiv n, \ (3).$$

Gelingt es, alle Ecken einer Karte mit Vorzeichen $\pm$ zu versehen, so daß für die Begrenzung jedes Landes die Differenz der positiven und negativen Eckenzahlen durch drei teilbar ist, so ist dadurch offenbar sofort eine richtige Indexverteilung für die Grenzen gegeben. Bezeichnen wir die genannte Aufgabe als *Eckenproblem* ($\mathfrak{E}$), so läßt sich die auf pag. 416 gegebene Äquivalenz zu folgender ergänzen:

$$\mathfrak{L} \equiv \mathfrak{G} \equiv \mathfrak{E}.$$

Es zeigt sich von diesem Standpunkte aus:

1) Zweiecke erhalten die Signatur $+-$, welche vertauschbar ist $(-+)$.

2) Dreiecke $+++$ oder $---$, und zwar das erstere, wenn die *alte* Ecke, an der sie angebracht wurden, das Minuszeichen hatte. Daraus folgt, daß man jede Karte durch Anbringen von Dreiecken an ihren Minusecken in eine solche verwandeln kann, auf der die Eckenzahl jedes Landes durch drei teilbar ist — denn sie hat nun nur noch Plusecken. Dasselbe geschieht, wenn man Dreiecke an den Plusecken allein anbringt. Schließlich ergibt sich daraus der Polyedersatz:

Jedes Polyeder, in dessen Ecken sich je drei Kanten treffen, läßt sich durch Kappen höhstens der Hälfte seiner Ecken in ein solches verwandeln, dessen sämtliche Seiten durch drei teilbare Eckenzahlen besitzen.

3) Vierecke werden signiert $++--$ oder $+-+-$. Es ergibt sich dabei leicht, daß man sie auch durch Ziehen *zweier* ihrer Gegengrenzen einführen kann. Man trennt dadurch nämlich außer dem Viereck zwei Teile eines alten Landes ab, dessen Eckensumme durch drei teilbar war. Entweder ist die Eckensumme jedes dieser Teile durch drei teilbar, dann signieren wir das Viereck $+-+-$, wobei jedes Nachbarland den

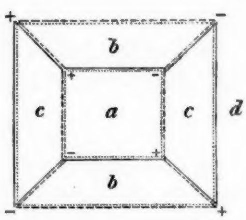


Fig. 21. Würfel (vierfarbig).

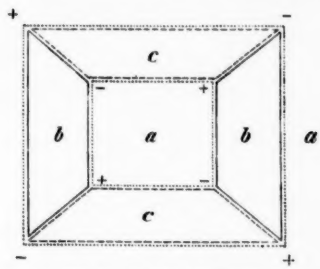


Fig. 22. Würfel (dreifarbig).

Zuwachs 0 zur Eckensumme erhält. Oder es fehlt dem einen Teile ein $+$, dem andern zwei $+$, dann signieren wir $--++$, indem wir für ein $+$ zwei $-$ geben, und umgekehrt. Auch hierdurch kann man bei der Zerstörung der Vierecke dem Auftreten falscher Grenzen vorbeugen.

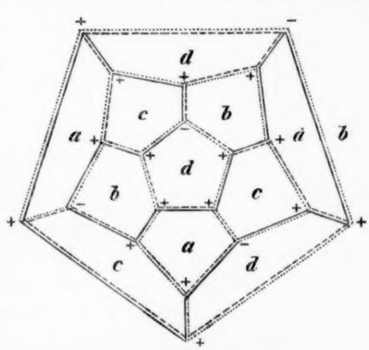


Fig. 23. Pentagon-Dodekaeder.
Die Minusecken bilden ein reg. Tetraeder, deren sich auf diese Weise zehn dem reg. Dodekaeder einschreiben lassen. Es gibt je *eine* $K_{\beta\gamma}$, $K_{\gamma\alpha}$ und $K_{\alpha\beta}$.

4) Bei Fünfecken muß eine Ecke ein von den übrigen verschiedenes Vorzeichen haben: $++++-$. Es läßt sich auch beweisen, daß jede Ecke des Fünfecks zu dieser ausgezeichneten gemacht werden kann. Beim Ikosaeder ergeben sich hieraus z. B. zehn Färbungen, welche nicht durch einfache Permutation der Farben a, b, c, d auseinander hervorgehen.

5) Man wird oft die Zerstörung der Drei-, Vier- und Fünfecke so leiten können, daß eine Karte entsteht, die nur Länder gerader Eckenzahl aufweist. Letztere ist leicht, und zwar mit drei Farben zu färben. Da die Ecken nämlich von einer be-

stimmten aus teils stets ungerade teils stets gerade Nummern erhalten, auf welcher Grenzenfolge man sie auch abzählt, so gebe man den geraden und ungeraden verschiedenes Vorzeichen. Die Folge ist, daß die Begrenzung jedes Landes eine Kette wird, und da eine Grenze, welche Ecken verschiedenen Zeichens verbindet, mit ihren Enden an gleichgefärbte Länder stößt, so ist ersichtlich, daß jede $K_{\gamma\alpha}$ dieselbe Farbe umschließt; ebenso alle $K_{\alpha\beta}$, und alle $K_{\beta\gamma}$. Man hat hier den Vorteil, daß die zunächst zu ziehende Grenze (und wahrscheinlich mehrere) ohne weiteres eine Kette trennt. (S. Fig. 21.)

6) Hieraus ergibt sich noch — was auch sonst klar ist —, daß eine Karte, in deren Ecken sich je eine *gerade* Anzahl von Grenzen treffen, in zwei Farben auszuführen ist. Die einzuführenden Hülfs-Ländchen L^0 (s. pag. 415) machen nämlich alle Begrenzungen geradzahlig, haben selbst eine gerade Anzahl Ecken und erhalten bei obiger Ausführung der Karte in drei Farben sämtlich dieselbe Farbe.

7) Der Vierfarbensatz und die Beweismethode scheinen sich auch auf Einteilungen des dreidimensionalen Raumes verallgemeinern zu lassen, wobei aber mehrfach zusammenhängende Raumzellen (etwa infolge von Röhrenleitungen usw.) nicht vorkommen dürfen. Allerdings ist die chromatische Zahl des Raumes noch nicht festgestellt.

Göttingen, 1. Mai 1903.

Neuer Beweis eines Satzes aus den „Grundlagen der Geometrie“ von Hilbert.

Von

Dimitry Schor in Göttingen.

Im Kapitel V seiner „Grundlagen der Geometrie“*) analysiert Hilbert den logischen Inhalt des Desarguesschen Satzes. Als Desarguesscher wird dabei folgender ebener Schnittpunktsatz bezeichnet:

1. *Wenn zwei Dreiecke in einer Ebene so gelegen sind, daß je zwei entsprechende Seiten einander parallel sind, so laufen die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken durch ein und denselben Punkt oder sind einander parallel;*

und umgekehrt:

2. *Wenn zwei Dreiecke in einer Ebene so gelegen sind, daß die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken durch einen Punkt laufen oder parallel sind, und wenn ferner zwei Paare entsprechender Seiten in den Dreiecken einander parallel sind, so sind auch die dritten Seiten der beiden Dreiecke einander parallel.*

Wie leicht zu sehen, ist dieser Satz eine unmittelbare Folge der Axiome der drei ersten Axiomgruppen des Hilbertschen Systems**), die räumlichen Axiome (d. h. I 3—7) eingeschlossen.

Daher kann man sagen: Die Gültigkeit des Desarguesschen Satzes ist eine *notwendige* Bedingung dafür, daß eine ebene Geometrie, in welcher die ebenen Verknüpfungsaxiome (I 1—2), die Anordnungsaxiome (II) und das Parallelenaxiom (III) erfüllt sind, sich als ein Teil der dreidimensionalen Geometrie auffassen läßt, d. h. einer solchen, in welcher noch die räumlichen Axiome I 3—7 gelten.

*) Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals; I. Theil; p. 49—71.

**) Vgl. a. a. O., p. 5—10.

Nun beweist Hilbert, daß die Gültigkeit des Desarguesschen Satzes auch eine *hinreichende Bedingung* dafür ist. Mit anderen Worten:

A. *Es ist immer möglich zu den Elementen (Punkten und Geraden) einer jeden ebenen Geometrie, in welcher die Axiome I 1—2, II und III, sowie der Desarguessche Satz erfüllt sind, ein System von Gedankendingen (welche wir auch als Punkte, Geraden und Ebenen bezeichnen) zu adjungieren, sodaß in dem auf diese Weise erweiterten System alle Axiome der Gruppen I (die räumlichen 3—7 eingeschlossen), II und III erfüllt sind. Und dabei bildet das ursprüngliche System von Elementen eine Ebene dieser räumlichen dreidimensionalen Geometrie.*

Es sei dabei ausdrücklich betont, daß die Existenz der zu adjungierenden Dinge eine Folge der genannten ebenen Axiome I 1—2, II und III und des Desarguesschen Satzes sein muß; oder, was dasselbe heißt, diese Dinge müssen aus Komplexen geeignet kombinierter ursprünglicher Elemente bestehen. So nimmt Hilbert als die hinzuzufügenden Punkte gewisse Streckentripel der gegebenen ebenen Geometrie, wobei diese Strecken (Koordinaten) durch bestimmte lineare Konstruktionen (Rechnungsregel) aufeinander bezogen werden können.

Die gegenwärtige Notiz ist einem, meines Erachtens einfacheren Beweis dieser im Theorem A ausgesprochenen Tatsache gewidmet.

Es ist also eine ebene Geometrie vorgelegt, in welcher die Axiome I 1—2, II und III erfüllt sind.

Wir legen drei feste, einander nicht parallele Geraden zu Grunde und nennen alle Dreiecke ABC, deren Seiten diesen festen Geraden parallel sind oder mit ihnen zusammenfallen, *neue Punkte*. (Diese und nur diese Dreiecke werden wir im folgenden durch die Buchstaben ABC, mit verschiedenen Indizes versehen, bezeichnen.)

Dieses neue System von Punkten adjungieren wir zu dem System von Punkten unserer ursprünglichen ebenen Geometrie.

Verbinden wir die entsprechenden Ecken zweier beliebiger solcher Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ durch gerade Linien a, b, c, so schneiden sich dieselben dem Desarguesschen Satze zufolge in einem Punkte O oder verlaufen parallel zueinander. Die so erhaltenen Strahlentripel (wir bezeichnen sie im folgenden mit abc mit verschiedenen Indizes) sollen *neue Geraden* genannt werden. Wenn im speziellen die Dreiecke $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ so gelegen sind, daß ein (oder zwei) Paar entsprechender Seiten auf ein und derselben (bezw. zwei) Geraden liegen, so arten diese Strahlentripel in Strahlenpaare aus. Solche Strahlenpaare sollen auch neue Geraden genannt werden.

Dieses neue System von geraden Linien fügen wir demjenigen unserer ursprünglichen Geometrie hinzu.

Unter den Ausdrücken „die Gerade $[abc]$ geht durch den Punkt $[ABC]$ (oder $[O]$)", „der Punkt $[ABC]$ (oder $[O]$) liegt auf der Geraden $[abc]$" und dergl. wollen wir verstehen, daß in der ursprünglichen Geometrie die Strahlen a, b, c durch die entsprechenden Eckpunkte des Dreiecks ABC oder durch den Punkt O hindurchlaufen.

Es ist leicht ersichtlich, daß dann die linearen Axiome der Verknüpfung I 1—2 erfüllt sind.

Um zu zeigen, daß auch die linearen Anordnungsaxiome II 1—4 befriedigt sind, müssen wir den Begriff „zwischen" für unsere neuen Gebilde in entsprechender Weise erweitern. — Es seien in der ursprünglichen Geometrie zwei Dreiecke $A'B'C'$, $A''B''C''$ mit dem zugehörigen Strahlentripel abc gegeben; wir nehmen auf a einen Punkt A und ziehen die Geraden $AB \| A'B' \| A''B''$ und $AC \| A'C' \| A''C''$. Dann ist nach dem Desarguesschen Satze $BC \| B'C' \| B''C''$. Und *je nachdem A innerhalb oder außerhalb der Strecke $A'A''$ liegt, liegen auch die übrigen Ecken B resp. C innerhalb oder außerhalb der entsprechenden Strecken $B'B''$ resp. $C'C''$.* Ebenso, je nachdem der Schnittpunkt O der Strahlen a, b, c innerhalb oder außerhalb einer der Strecken — z. B. der Strecke $A'A''$ — fällt, so fällt O auch innerhalb oder außerhalb der übrigen Strecken, $B'B''$ und $C'C''$. Das folgt aus den Anordnungsaxiomen II (5 eingeschlossen). Dementsprechend definieren wir:

Der Punkt $[ABC]$ (oder $[O]$) einer Geraden $[abc]$ liegt innerhalb oder außerhalb einer Strecke ($[A'B'C']$, $[A''B''C'']$) dieser Geraden, wenn in der ursprünglichen Geometrie einer der Eckpunkte, z. B. A, des Dreiecks ABC (oder der Punkt O) innerhalb bezw. außerhalb der entsprechenden Strecke $A'A''$ liegt.

Aus dieser Definition und der vorstehenden Überlegung schließen wir, daß in unserer neuen Geometrie — sie möge *Figurengeometrie* heißen — die linearen Anordnungsaxiome II 1—4 gelten.

Jetzt führen wir den Begriff „Ebene" in unsere Figurengeometrie ein.

Es seien uns drei nicht auf ein und derselben Geraden liegende Punkte $[A_1B_1C_1]$, $[A_2B_2C_2]$, $[A_3B_3C_3]$ gegeben. Wir verbinden dieselben durch gerade Linien $[a_3b_3c_3]$, $[a_2b_2c_2]$, $[a_1b_1c_1]$ paarweise miteinander und *bezeichnen den geometrischen Ort aller Geraden $[abc]$, welche mindestens zwei dieser Geraden $[a_3b_3c_3]$, $[a_2b_2c_2]$, $[a_1b_1c_1]$ schneiden, als eine Ebene α.* Weiter sagen wir, daß *ein Punkt $[ABC]$ in einer Ebene α liegt, wenn er auf einer der Geraden dieser Ebene liegt.* Durch diese Definitionen sind ohne weiteres die Axiome I 3, 5 erledigt.

Ferner folgt daraus, daß der geometrische Ort aller Geraden unserer

ursprünglichen Geometrie eine Ebene ω der Figurengeometrie darstellt. Die Punkte $[O]$ dieser Ebene sind die Punkte O unserer ursprünglichen Geometrie. Für diese Ebene ω gelten alle Axiome I, II, III.

Daß die Axiome I 1—3, 5, II 1—4 in unserer Figurengeometrie befriedigt sind, sieht man also gleich. Wir wollen nun zeigen, daß die noch bleibenden Axiome I 4, 6—7, II 5, III auch allgemein gültig sind.

Zunächst werden wir die zu der Ebene ω parallelen Ebenen konstruieren.

Man ziehe durch irgend einen von $[O]$ verschiedenen Punkt $[A_1 B_1 C_1]$ zwei Geraden $[a_2 b_2 c_2]$, $[a_3 b_3 c_3]$ auf die Weise, daß in der ursprünglichen Geometrie sowohl die Strahlen a_2, b_2, c_2, wie auch a_3, b_3, c_3, einander parallel sind. Auf einer dieser Geraden, z. B. auf $[a_3 b_3 c_3]$, wählen wir einen Punkt $[A_2 B_2 C_2]$ und ziehen durch ihn eine dritte Gerade $[a_1 b_1 c_1]$, sodaß wieder in der ursprünglichen Geometrie $a_1 \| b_1 \| c_1$ ist, aber $a_1 \nparallel a_2$. Wir behaupten, daß dann die geraden Linien $[a_1 b_1 c_1]$, $[a_2 b_2 c_2]$ sich in einem Punkte schneiden. In der Tat schneiden sich in der ursprünglichen Geometrie die Strahlen a_1 und a_2 in einem Punkte A_3, b_1 und b_2 in B_3, und es muß nach dem Desarguesschen Satze $A_3 B_3$ zu $A_1 B_1$ parallel sein; denn die Dreiecke $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ haben resp. parallele Seiten, und die Verbindungslinien $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ sind zueinander parallel. Ebenso schließt man, daß $A_3 C_3 \| A_1 C_1$ ist, und $B_3 C_3 \| B_1 C_1$.

Umgekehrt sind in der ursprünglichen Geometrie die Strahlen a_1, b_1, c_1, untereinander parallel, wenn $[a_1 b_1 c_1]$ eine Verbindungslinie zweier Punkte $[A_3 B_3 C_3]$, $[A_2 B_2 C_2]$ ist, welche resp. auf zwei sich in einem Punkte $[A_1 B_1 C_1]$ schneidenden Geraden $[a_2 b_2 c_2]$, $[a_3 b_3 c_3]$ liegen, wobei $a_2 \| b_2 \| c_2$ ist und $a_3 \| b_3 \| c_3$.

Daraus sieht man unmittelbar, daß auch I 4 und II 5 auf den so konstruierten Ebenen erfüllt sind. Ferner ist auch III (das Parallelenaxiom) befriedigt. Denn ist $[abc]$ eine Gerade einer solchen Ebene π und $[ABC]$ ein Punkt der letzteren, der nicht auf $[abc]$ liegt, so muß einerseits $a \| b \| c$ sein; andrerseits liegt jede Gerade $[a'b'c']$ durch $[ABC]$ auch in dieser Ebene π, wenn $a' \| b' \| c'$ ist. Sie schneidet $[abc]$ in einem Punkte $[A_0 B_0 C_0]$, wenn $a' \nparallel a$ ist, dagegen ist sie dann und nur dann zu $[abc]$ parallel, wenn $a' \| a$ ist. Also ist III bewiesen.

Diese Ebenen π sind, wie schon oben angedeutet, zu der Grundebene ω parallel und jede solche Ebene ist durch einen ihrer Punkte (z. B. den Ausgangspunkt der obigen Konstruktion) eindeutig bestimmt.

Jetzt wollen wir eine Ebene α von ganz allgemeiner Lage konstruieren. Drei Punkte $[A_1 B_1 C_1]$, $[A_2 B_2 C_2]$ und $[A_3 B_3 C_3]$ seien uns gegeben; ihre Verbindungslinien seien resp. $[a_3 b_3 c_3]$, $[a_2 b_2 c_2]$ und $[a_1 b_1 c_1]$. Um den schon erledigten Fall der zu ω parallelen Ebene auszuschließen, nehmen wir an, daß mindestens zwei dieser Geraden, z. B. $[a_1 b_1 c_1]$ und

$[a_2 b_2 c_2]$, so beschaffen sind, daß in der ursprünglichen Geometrie $a_1 \nparallel b_1$ und $a_2 \nparallel b_2$ (also auch $a_1 \nparallel c_1$ und $a_2 \nparallel c_2$) sind. Die Schnittpunkte der Strahlen a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 bezeichnen wir mit O_1 resp. O_2.

Wenn der allgemeinste Fall vorliegt, d. h. wenn noch $a_3 \nparallel b_3$ ist, also auch $\nparallel c_3$, so behaupten wir, daß der Schnittpunkt O_3 von a_3, b_3, c_3 auf der Geraden $O_1 O_2$ liegt. Denn wäre das nicht der Fall, so würde $O_2 O_1$ eine der Geraden a_3, b_3, c_3, sagen wir a_3, in einem von O_3 verschiedenen Punkte X schneiden (vgl. Fig. 1). Das würde aber zu einem Widerspruch führen. Zieht man nämlich durch A_3 zu $a_3 \equiv A_2 A_1$ eine Parallele, so muß dieselbe $O_2 O_1$ in einem Punkte Y schneiden. Nun wären dann nach dem Desarguesschen Satz einerseits XB_2 und YB_3 einander parallel, denn die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken der Dreiecke $A_3 B_3 Y$ und $A_2 B_2 X$ schneiden sich in einem Punkte O_1 und zwei Paare ihrer Seiten sind einander parallel ($A_3 B_3 \| A_2 B_2$ und $A_3 Y \| A_2 X$). Andrerseits müßte auf Grund analoger Überlegung $XB_1 \| YB_3$ sein. Das widerspricht aber dem Parallelenaxiom.

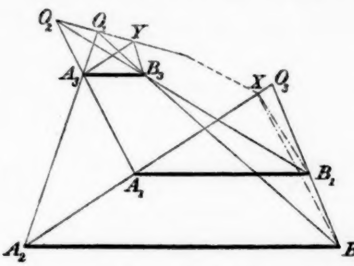


Fig. 1. — Der Übersichtlichkeit halber sind die Seiten AC, BC nicht gezeichnet.

Im Spezialfalle, wenn $a_3 \| b_3$ ist, muß, wie man aus einer ähnlichen Konstruktion ersieht, $o \equiv O_2 O_1$ parallel zu a_3 sein; und daher muß auch in der Figurengeometrie $[o] \equiv [O_2 O_1]$ zu $[a_3 b_3 c_3]$ parallel sein.

Die Gerade $[o]$ ($\equiv [O_1 O_2 O_3]$ oder $[O_1 O_2]$) der Figurengeometrie stellt die Schnittlinie der Ebene $\{[A_1 B_1 C_1] \mid [A_2 B_2 C_2] \mid A_3 B_3 C_3]\} \equiv \alpha$ mit der Grundebene ω dar.

Aus dieser Konstruktion und ihrer Umkehrung schließt man ohne weiteres, daß auch I 4 erfüllt ist; denn ersetzt man eines der Dreiecke, z. B. $A_3 B_3 C_3$, durch ein andres ABC, das in derselben Ebene liegt, so muß der Schnittpunkt O der Strahlen a, b, c, welche A, B, C mit A_2, B_2, C_2 verbinden, auf der Geraden $O_2 O_3$ liegen (oder es ist $a \| b \| c \| O_2 O_3$). Ebenso sieht man, daß auch II 5 gilt.

Auch kann man sich leicht überzeugen, daß es im Raume unserer Figurengeometrie vier Punkte gibt, welche nicht in einer Ebene liegen; wodurch I 7 erwiesen ist.

Das Parallelenaxiom (III) kann auf folgende Weise allgemein bewiesen werden. Es sei $[abc]$ eine Gerade der Figurengeometrie; $[ABC]$ ein Punkt auf dieser Geraden, $[A'B'C']$ ein Punkt außerhalb derselben. Dann bestimmen $[abc]$ und $[A'B'C']$ eine Ebene α und ihre Durch-

schnittslinie $[o]$ mit der Grundebene ω. Wenn dann O den Durchschnittspunkt der Strahlen a, b, c bezeichnet, O' denjenigen von AA', BB', CC', so liegen O und O' auf der Geraden o (vgl. Fig. 2). Zieht man jetzt durch A' eine Parallele a' zu a, so trifft dieselbe $OO' \equiv o$ in einem Punkte O'', sodaß dabei $O''B' \| b$, $O''C' \| c$ sind. Denn die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken der Dreiecke $O''B'A'$ und OBA gehen durch einen Punkt O' und zwei Paare ihrer Seiten sind einander parallel: $A'B' \| AB$, $A'O'' \| AO$.

Jetzt bleibt uns noch übrig, das räumliche Axiom I 6 zu beweisen, und unsere Aufgabe ist erledigt. Wir wollen also zeigen, daß, wenn zwei Ebenen α_1 und α_2 unserer Figurengeometrie einen Punkt $[ABC]$ gemein haben, sie eine durch ihn hindurchlaufende gerade Linie gemein haben. Im allgemeinen gehört zu jeder dieser Ebenen eine Schnittlinie mit der Ebene ω. Diese zwei Linien schneiden sich im allgemeinen in einem Punkte O. Zieht man durch O die Strahlen $OA \equiv a$, $OB \equiv b$, $OC \equiv c$, so liegt die Gerade $[abc]$ sowohl in der Ebene α_1, wie in der Ebene α_2, w. z. b. w.

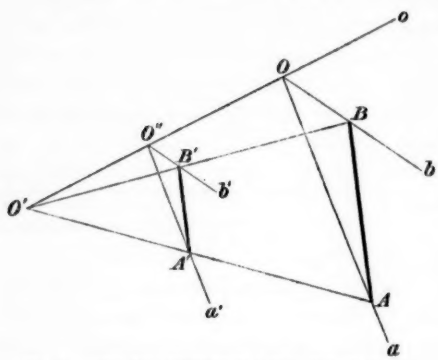


Fig. 2. — Der Übersichtlichkeit halber sind die Seiten AC, BC, $A'C'$, $B'C'$ nicht gezeichnet.

Wenn im speziellen eine der Ebenen, z. B. α_1, zu ω parallel ist, so ist die gesuchte Schnittlinie von α_1 und α_2 einfach die Gerade $[abc]$ durch $[ABC]$, für welche $a \| b \| c$ ist. Wenn weiter die Schnittgeraden $[o_1]$ und $[o_2]$ von α_1 und ω, bezw. α_2 und ω einander parallel sind, so ist die gesuchte Schnittlinie eine Gerade $[abc]$ durch $[ABC]$, die so beschaffen ist, daß $a \| b \| c \| o_1 \| o_2$ ist.

Wenn schließlich der den Ebenen α_1 und α_2 gemeinsame Punkt in der Grundebene ω liegt, so verfahren wir folgendermaßen: Wir konstruieren durch irgend einen Punkt $[A_1 B_1 C_1]$ der Ebene α_1 und irgend einen Punkt $[A_2 B_2 C_2]$ der Ebene α_2 eine Ebene α_3. Ferner konstruieren wir die Schnittlinien von α_3 und α_1 einerseits und von α_3 und α_1 andrerseits. Der Schnittpunkt $[ABC]$ dieser letzten Schnittlinien liefert uns dann den gesuchten zweiten den Ebenen α_1 und α_2 gemeinsamen Punkt.

Indem wir auf diese Weise alle Axiome nacheinander bewiesen haben, haben wir gezeigt, daß unsere Figurengeometrie nichts anderes ist als eine dreidimensionale Geometrie, in welcher Axiome I, II, III erfüllt sind. Wie schon gesagt, stellt der Inbegriff der Punkte und Geraden der ursprüng-

lichen Geometrie eine Ebene dieser dreidimensionalen Geometrie dar; d. h. die ursprüngliche Geometrie ist nach der Ausdrucksweise Hilberts ein Teil einer räumlichen Geometrie.

Göttingen, im März 1903.

Anmerkung. Nachträglich fand ich eine meiner Figurengeometrie ähnliche Abbildung des Raumes auf die Ebene bei W. Fiedler („Cyklographie“, Lpz. 1882), welcher statt der von mir benutzten Dreiecke Kreise verwendet. Er erwähnt daselbst (vgl. p. IV), daß schon J. Steiner diese letzte Art der darstellenden Geometrie benutzt hat.

Göttingen, im Oktober 1903.

Zur Theorie der kanonischen Formen.

Von

EMANUEL LASKER.

Vor einigen Jahrzehnten war bei algebraisch-geometrischen Untersuchungen die Methode der kanonischen Formen sehr in Gebrauch. Dieselbe bestand darin, daß der Gleichung oder den Gleichungen eines geometrischen Gebildes besonders einfache und übersichtliche Gestalten gegeben und daraus Gesetze abgeleitet wurden. Die Frage, ob die Gleichung einer sogenannten „allgemeinen“ Kurve, oder überhaupt ein „allgemeines“ System von Formen, in eine vorgeschlagene (kanonische) Gestalt gebracht werden könne, wurde häufig durch Abzählung der Konstanten entschieden, bis sich herausstellte, daß dabei erhebliche Irrtümer möglich seien. Um nur eines der zahlreichen Beispiele zu geben, erwähnen wir den bekannten Fall*) der ternären Formen vierter Ordnung, welche scheinbar durch:

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4$$

darstellbar sind, wo die $a \cdots e$ Linearformen; dieselben sind tatsächlich nicht allgemein, obwohl die Zahl der Konstanten von 5 Linearformen die notwendige Anzahl $5 \cdot 3 = 15$ ist. Eine Methode, die zu untersuchen gestattet, ob eine vorgelegte Form die richtige Konstantenzahl besitzt, und deren Prinzip auf der bekannten Bedeutung des Verschwindens der Funktionaldeterminante beruht, wurde von Kronecker angegeben und von Lüroth (Math. Annalen Bd. 13, S. 548 ff.) zum Beweise verwendet, daß weder die oben erwähnte, noch eine andere mit derselben zusammenhängende Form eine allgemeine Kurve vierter Ordnung darstellen können. Man kann aber, wie im folgenden gezeigt werden soll, diesem Prinzip ein, häufig mühelos anwendbares, Verfahren entnehmen, um die wahre Konstantenzahl einer kanonischen Form, oder eines kanonischen Systems von Formen zu bestimmen**).

*) Clebsch in Crelles J. 59; Lüroth in Math. Ann. Bd. 1.

**) Für das spezielle Problem der Darstellung einer Form als Summe von Potenzen linearer Formen ist die Frage kürzlich nach einer gänzlich verschiedenen, rein geometrischen Methode von Palatini (Atti d. R. Acc. d. Sc. di Torino v. 30. Nov. 1902 und Rendic. d. R. Acc. dei Lincei v. 17. Mai 1903) behandelt worden.

[Anm. der Redaktion.]

Der Ideengang soll zunächst an einem ganz einfachen Beispiele klargelegt werden. Es seien $a \cdots e$ fünf lineare ternäre Formen mit unbestimmt gelassenen Koeffizienten, sodaß also die Gesamtzahl der Koeffizienten, oder, wie man zu sagen pflegt, die „Anzahl der Konstanten" der fünf Formen 15 beträgt. Es handelt sich nun darum, zu untersuchen, wieviel Bedingungen der Kurve

$$a^4 + \cdots + e^4 = 0$$

auferlegt werden dürfen, ob 14 oder weniger.

Wir bezeichnen die Variabelen mit x_1, x_2, x_3 und setzen die unbestimmten Koeffizienten von $a \cdots e$ so an, daß ist

$$\begin{aligned} a &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \\ b &= b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e &= e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3. \end{aligned}$$

Dann bilden wir $a^4 + \cdots + e^4$ und ordnen diesen Ausdruck nach Potenzprodukten der x_1, x_2, x_3. Es sei identisch

$$a^4 + \cdots + e^4 = \varphi_{4,0,0} x_1^4 + \varphi_{3,1,0} x_1^3 x_2 + \cdots + \varphi_{0,0,4} x_3^4.$$

Die $\varphi_{i,j,k}$ sind Funktionen der $a_1 \cdots e_3$ und immer dann unabhängig von einander — d. h. imstande, jedes beliebige Wertsystem anzunehmen — wenn deren Funktionaldeterminante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_{4,0,0}}{\partial a_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_{4,0,0}}{\partial e_3} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_{0,0,4}}{\partial a_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_{0,0,3}}{\partial e_3} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet.

Genauer, sie sind durch α Funktionalbeziehungen miteinander verknüpft, wenn die $(\alpha - 1)^{\text{ten}}$ Minoren der Determinante Δ sämtlich für alle Wertsysteme der $a_1 \cdots e_3$ verschwinden.

Wir wollen nun die Konsequenz davon, daß die $(\alpha - 1)^{\text{ten}}$ Minoren von Δ identisch verschwinden, entwickeln und daraus den Wert von α herleiten. Eine notwendige Folge des erwähnten Umstandes ist, daß zwischen 15 linearen Formen, deren Koeffizienten die $\dfrac{\partial \varphi}{\partial a_1} \cdots \dfrac{\partial \varphi}{\partial e_3}$ sind, α lineare Dependenzen bestehen. Wir führen daher 15 Unbestimmte $\eta_1 \cdots \eta_{15}$ ein und setzen

$$\zeta_{4,0,0} = \frac{\partial \varphi_{4,0,0}}{\partial a_1} \cdot \eta_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_{4,0,0}}{\partial e_3} \cdot \eta_{15},$$
$$\vdots$$
$$\zeta_{0,0,4} = \frac{\partial \varphi_{0,0,4}}{\partial a_1} \cdot \eta_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_{0,0,4}}{\partial e_3} \cdot \eta_{15}.$$

Aus der Gleichung

$$a^4 + b^4 + \cdots + e^4 = \varphi_{4,0,0} x_1^4 + \cdots + \varphi_{0,0,4} x_3^4$$

folgt nun durch Differentiation

$$4a^3 \cdot x_1 = \frac{\partial \varphi_{4,0,0}}{\partial a_1} \cdot x_1^4 + \frac{\partial \varphi_{3,1,0}}{\partial a_1} \cdot x_1^3 \cdot x_2 + \cdots,$$
$$4a^3 \cdot x_2 = \frac{\partial \varphi_{4,0,0}}{\partial a_2} \cdot x_1^4 + \frac{\partial \varphi_{3,1,0}}{\partial a_2} \cdot x_1^3 \cdot x_2 + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Mithin durch Multiplikation mit den $\eta_1 \cdots \eta_{15}$ und nachherige Addition

$$\begin{aligned} 4a^3(x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3) + 4b^3(x_1\eta_4 + \cdots) + \cdots \\ = \zeta_{4,0,0} x_1^4 + \zeta_{3,1,0} x_1^3 x_2 + \cdots. \end{aligned}$$

Wenn die $(\alpha - 1)^{\text{ten}}$ Minoren von Δ verschwinden, so gibt es α lineare independente Wertsysteme $\eta_1 \cdots \eta_{15}$, die von 0 verschieden sind und die $\zeta_{4,0,0} \cdots \zeta_{0,0,4}$ sämtlich zu 0 machen. Mithin existieren dann auch α linear independente Systeme von Formen

$$a' = x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3,$$
$$b' = x_1\eta_4 + x_2\eta_5 + x_3\eta_6,$$
$$\text{etc.}$$

welche die Gleichung befriedigen

$$a^3a' + b^3b' + c^3c' + d^3d' + e^3e' = 0.$$

Diese Gleichung ist also zur Bestimmung von α geeignet. Hat dieselbe keine Lösung, so ist Δ von 0 verschieden, und jede ternäre Form 4^{ter} Ordnung ist durch $a^4 + \cdots + e^4$ darstellbar. Hat sie jedoch α linear independente Systeme von Lösungen, so muß eine ternäre Form 4^{ter} Ordnung α Beziehungen genügen, um in der Gestalt $a^4 + \cdots + e^4$ darstellbar zu sein.

Nun zeigt sich aus der Diskussion obiger Gleichung, daß $\alpha = 1$. Hat dieselbe α linear independente Lösungssysteme $(a' \cdots e')$, so gibt es auch, wie man leicht sieht, α linear independente ternäre Formen 4^{ter} Ordnung, welche $a \cdots e$ zu Doppelpunkten haben (wobei $a \cdots e$ in durchsichtiger Weise geometrisch gedeutet sind). Bei allgemeiner Lage der $a \cdots e$ gibt es aber nur *eine* solche Form, nämlich das Quadrat des durch $a \cdots e$ gelegten Kegelschnittes. Somit $\alpha = 1$. Die ternären Formen

4^{ter} Ordnung haben daher genau *einer* Bedingung zu genügen, um durch $a^4 + \cdots + e^4$ darstellbar zu sein. Da nun $a^4 + \cdots + e^4$ zu dem durch $a \cdots e$ gelegten Kegelschnitt apolar ist, und dies eine *ein*fache Bedingung ist, so ist das Vorhandensein eines zur ternären Form 4^{ter} Ordnung f apolaren Kegelschnittes auch die hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit von f durch $a^4 + \cdots + e^4$. Ist g der zu f apolare Kegelschnitt, so gibt es also ∞^1 Punktquintupel $a \cdots e$ auf g, derart daß $f = a^4 + \cdots + e^4$.

Der Gedankengang, wie er oben skizziert war, führt in jedem gegebenen Falle zum Ziel. Da auch im allgemeinen Falle keine wesentlich anderen Ideen benützt werden, als oben, so genügt es, das allgemeine Theorem auszusprechen, und den Beweis desselben durch den Hinweis auf das Obige für erledigt zu erklären. Das Theorem lautet:

Theorem: Es seien $a, b, \cdots, e$ homogene Formen irgendwelcher Systeme von Variabelen und irgendwelcher Ordnungen innerhalb dieser Variabelen. Ferner seien irgendwelche Konkomitanten der Formen $a \cdots e$, die etwa durch ihr Aronhold-Symbol oder irgendwie anders definiert seien, gegeben und durch $F_1, F_2 \cdots F_h$ bezeichnet. Schließlich seien noch die $a \cdots e$ irgendwelchen Bedingungen (B) unterworfen, denen zufolge alle Formen eines Moduls der Koeffizienten von $a \cdots e$, dessen Basis $J_1, J_2 \cdots J_k$ sei, verschwinden. Bezeichnet dann N die Anzahl der Konstanten, welches ein System $(a \cdots e)$ noch besitzt, das den Bedingungen (B) genügt, und ferner n die Anzahl der linear independenten Lösungssysteme $(a' \cdots e')$ der Gleichungen

$$0 = \lim_{\varepsilon = 0} \frac{1}{\varepsilon} (F_i(a + \varepsilon a', \; b + \varepsilon b' \cdots) - F_i(a, b \cdots))$$

und

$$0 = \lim_{\varepsilon = 0} \frac{1}{\varepsilon} (J_i(a + \varepsilon a', \; b + \varepsilon b' \cdots) - J_i(a, b \cdots))$$

wobei $a \cdots e$ noch den (B) genügt, so ist $N - n$ die genaue Konstantenzahl der $F_1 \cdots F_h$ unter Berücksichtigung der (B).

Dabei ist noch von wesentlicher Bedeutung, daß das System $(a \cdots e)$, welches den (B) genügt, innerhalb dieser Beschränkung unbestimmte Lage haben muß.

Um ein Beispiel zu geben, untersuchen wir die Konstantenzahl des Ausdrucks

$$a^3 u + bcv,$$

wo a, b, c linear, u von der Ordnung $m - 3$, v von der Ordnung $m - 2$ und das Variabelengebiet das ternäre ist. Alle diese Formen seien uneingeschränkt. Die Anzahl der Unbestimmten ist

$$N = 3 + \frac{(m-2)(m-1)}{2} + 3 + 3 + \frac{(m-1)m}{2} = m^2 - 2m + 10.$$

Um n zu finden, setzen wir an

$$(G) \qquad a^2 a' u + a^3 u' + b' c v + b c' v + b c v' = 0.$$

Da offenbar jede Beziehung der Art,

$$a^2 q + b' r + b s = 0,$$

worin a, b', b linear, dazu führt, daß b' ein Multiplum von b (von ganz besonderen Lagebeziehungen abgesehen), so muß sein

$$b' = \beta b,$$

ebenso

$$c' = \gamma c,$$

wo β, γ Konstante. Bei Substitution dieser Werte wird

$$a^2(a' u + a u') + bc((\beta + \gamma) v + v') = 0,$$

also

$$a' u + a u' = bc\Theta,$$

$$(\beta + \gamma) v + v' = - a^2\Theta.$$

Aus erster Gleichung folgt wieder

$$a' = \alpha a,$$

mithin

$$u' = - \alpha a + pbc,$$

$$v' = - a^3 p - (\beta + \gamma) v,$$

wo α eine beliebige Konstante, p eine beliebige Form $(m-5)^{\text{ter}}$ Ordnung. Damit sind alle Möglichkeiten, der Gleichung (G) zu genügen, erschöpft. Es findet sich

$$n = 3 + \frac{(m-4)(m-3)}{2},$$

also

$$N - n = \frac{(m+1)(m+2)}{2};$$

d. h. jede beliebige Form f m^{ter} Ordnung ist in der Gestalt

$$a^3 u + bcv$$

darstellbar, wobei nur $m \geqq 3$ vorausgesetzt ist.

$b = 0$ und $c = 0$ sind offenbar Inflexionstangenten von $f = 0$, a ist die Gerade, welche die resp. Berührungspunkte von b, c verbindet, $u = 0$ irgend eine Kurve, welche durch die $2(m-3)$ Punkte geht, in denen $b = 0$ und $c = 0$ die Kurve $f = 0$ noch schneiden, und $v = 0$ ist eine $f = 0$ in den $(m-2)$ Punkten, die $a = 0$ mit $f = 0$ noch gemein hat, dreifach berührende Kurve, welche außerdem noch die $(m-2)(m-3)$ Punkte enthält, die $u = 0$ und $f = 0$ außer den $2(m-3)$ genannten noch gemein haben.

Oder sei, wieder im ternären Gebiet, die Form $a^2 + b^2 + c^2$ untersucht, wo a, b, c Formen m^{ter} Ordnung; $N = 3 \cdot \frac{(m+1)(m+2)}{2}$.

Die Gleichung

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

führt nach dem Noetherschen Fundamentalsatz zu

$$\begin{aligned} a' &= \gamma b - \beta c, \\ b' &= \alpha c - \gamma a, \\ c' &= \beta a - \alpha b, \end{aligned}$$

wo α, β, γ beliebige Konstante. n ist also $= 3$ und die Konstantenzahl der Form

$$= \frac{3m}{2}(m+3).$$

Für $m = 2$ zeigt sich, daß die Formen 4^{ter} Ordnung immer durch $a^2 + b^2 + c^2$ darstellbar sind. Diese Darstellung ist offenbar mit der anderen

$$a^2 + b \cdot c$$

wo b, c von der 2^{ten} Ordnung, im wesentlichen identisch. Es zeigt sich, daß diese kanonische Gestalt mit den eine Kurve $f = 0$ vierter Ordnung in vier Punkten berührenden Kegelschnitten in Verbindung steht, sowie mit den Paaren von Punktquadrupeln auf $f = 0$, welche sowohl residual wie auch korresidual zu einander sind.

Im quaternären Felde sei

$$abc + def,$$

wo a, b, c, d, e, f linear, als Ausdruck für kubische Formen untersucht. Die Gleichung

$$\text{(G)} \qquad a'bc + ab'c + abc' + d'ef + de'f + def' = 0$$

zeigt nun, daß $a' = 0$ durch die drei Punkte geht, welche

$$\begin{aligned} a = 0, \quad d = 0, \quad e = 0, \\ a = 0, \quad d = 0, \quad f = 0, \\ a = 0, \quad e = 0, \quad f = 0 \end{aligned}$$

beziehungsweise gemein haben. Bei allgemeiner Lage der $a \cdots f$ ist also

$$a' = \alpha a$$

und ebenso

$$b' = \beta b, \quad c' = \gamma c, \quad d' = \delta d, \quad e' = \varepsilon e, \quad f' = \zeta f,$$

wobei

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \delta + \varepsilon + \zeta = 0.$$

Die Konstantenzahl des Ausdrucks ist also $6 \cdot 4 - 4 = 20$. Es zeigt sich, daß jede kubische Form in obiger Weise darstellbar ist. Die

$a = 0 \cdots f = 0$ sind Ebenen, welche die kubische Oberfläche je in drei Geraden schneiden, und aus dieser Tatsache lassen sich die Systeme $a \cdots f$ konstruieren, welche in obiger Weise die Gleichung der Oberfläche zum Ausdruck bringen. In Verbindung hiermit ist es interessant, die Konfiguration von 12 Ebenen $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2, d_0, d_1, d_2$ zu untersuchen, welche die Gleichung

$$a_0 a_1 a_2 + b_0 b_1 b_2 + c_0 c_1 c_2 + d_0 d_1 d_2 = 0$$

befriedigen. Die hierdurch ausgedrückte Bedingung ist von der 17ten Ordnung und es zeigt sich, daß (bei geeigneter Wahl der Indizes) die Ebenen a_i, b_j, c_k, d_l immer dann einen Punkt gemein haben, wenn

$$i + j + k + l \equiv 0 \pmod{3}.$$

Diese wenigen Beispiele, deren Zahl sich übrigens leicht vermehren ließe, mögen vor der Hand genügen, um die Anwendbarkeit des Theorems darzutun.

New York im Mai 1903.

Unstetigkeiten in den linearen Integralgleichungen.

Von

O. D. KELLOGG in Princeton New Jersey U. S. A.

§ 1.

Eine besondere Art von Funktionalgleichungen hat wieder in neuerer Zeit die Aufmerksamkeit auf sich gelenkt, nämlich diejenige, in welchen die gesuchte Funktion mit einer bekannten Funktion multipliziert unter einem Integralzeichen steht. Aus diesem Grunde ist für solche der Name „Integralgleichung" vorgeschlagen worden. Wichtig sind die folgenden zwei Typen:

$$f(s) = \int_0^1 \varphi(t)\, K(s,t)\, dt, \tag{1}$$

$$f(s) = \varphi(s) + \int_0^1 \varphi(t)\, K(s,t)\, dt, \tag{2}$$

wo $f(s)$ und $K(s,t)$ bekannte Funktionen sind, $\varphi(s)$ aber gesucht wird.

Die Gleichungen zweiter Art haben unter gewissen Stetigkeitsbedingungen für $K(s,t)$ eine allgemeine und elegante Lösung durch Herrn Fredholm gefunden*). Die Gleichungen erster Art sind dagegen wesentlich andere, weil das $\varphi(s)$ jetzt nicht mehr außerhalb des Integralzeichens auftritt, und man kann sich leicht davon überzeugen, daß sie nicht in derselben Allgemeinheit auflösbar sind wie die anderen, denn wäre z. B. $K(s,t)$ in bezug auf s ein Polynom n^{ten} Grades, so müßte für irgendwelches $\varphi(t)$, $f(s)$ auch ein Polynom sein, von höchstens n^{tem} Grade. Übrigens sind in folge der Anwendungen auf die mathematische Physik und die Funktionentheorie solche Integralgleichungen von Bedeutung, in denen das $K(s,t)$ eine Unstetigkeit besitzt. Die vorliegende Arbeit behandelt also Integralgleichungen der angegebenen Arten, in denen gewisse Unstetigkeiten vorkommen**).

*) Acta Mathematica Bd. 27.

**) Sie ist zum Teil eine Neubearbeitung gewisser Untersuchungen, welche ich im vorigen Jahre unter Leitung von Herrn Prof. Hilbert für meine Doktorarbeit

§ 2.

Will man eine geschlossene ebene Kurve ohne Doppelpunkte so mit Masse belegen, daß die nach dem Gesetze des logarithmischen Potentials hervorgerufene Potentialfunktion vorgeschriebene Randwerte annimmt, so führt die Frage nach dem Moment dieser Belegung auf eine Gleichung der ersten Art. Nun ist, wie schon bemerkt, für allgemeines $K(s,t)$ die Gleichung (1) von beschränkter Lösbarkeit. In einem wichtigen Fall dagegen, auf den sich auch die erwähnte Frage aus der Potentialtheorie durch teilweise Integration zurückführen läßt, können wir die Gleichung sehr allgemein lösen; das ist der Fall, wo $K(s,t)$ für $s=t$ einen Pol hat, und unter dem Integral dann der Cauchysche Hauptwert zu verstehen ist. Die Lösung ermittelt man durch die von Herrn Hilbert aufgestellten Reziprozitätsformeln:

$$
\begin{cases}
\varphi(s) = \int\limits_0^1 f(t) \operatorname{ctg} \pi(s-t)\,dt + \int\limits_0^1 \varphi(t)\,dt, & (3_1) \\
f(s) = -\int\limits_0^1 \varphi(t) \operatorname{ctg} \pi(s-t)\,dt + \int\limits_0^1 f(t)\,dt. & (3_2)
\end{cases}
$$

Ist in der ersten dieser Gleichungen das $\varphi(s)$ vorgeschrieben, so gibt die zweite das $f(s)$ an, welches, in die erste eingesetzt, sie befriedigt und umgekehrt ist (3_1) die Lösung von (3_2). Die Formeln gelten für streckenweise stetige und differentiierbare Funktionen $\varphi(s)$ und $f(s)$ vorausgesetzt, daß etwa vorhandene Unendlichkeitsstellen von niedrigerer als erster Ordnung sind. Sie können folgendermaßen abgeleitet werden. Man geht aus von einer Potentialfunktion $u(x,y)$ für die Fläche des Einheitskreises, die auf der Kreisperipherie die Werte $f(s)$ annehmen möge. Wir nehmen vorläufig an, was eine kleine Erleichterung mit sich bringt, daß

$$\int\limits_0^1 f(t)\,dt = 0;$$

später wird diese Einschränkung aufgehoben werden. Die überall im Inneren des Kreises stetige Funktion $u(x,y)$ ist eindeutig darstellbar als Potential einer Doppelbelegung, wie die Potentialtheorie lehrt:

$$u(x,y) = 2\pi \int\limits_0^1 g(t) \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{1}{\varrho\binom{t}{x,\,y}}\,dt \tag{4}$$

---

machte (vgl. meine Inauguraldissertation, Göttingen 1902). Von den Vorlesungen **Hilberts** habe ich freien Gebrauch gemacht.

wo

$$\varrho^2\binom{t}{x,\,y} = [x - x(t)]^2 + [y - y(t)]^2$$

ist; t, sowie s bezeichnen einen Parameter, welcher gleich $\frac{1}{2\pi}$ mal der von einem beliebigen Punkt gemessenen Bogenlänge des Kreises ist. Die Stetigkeit dieser Funktion $u(x, y)$ gilt auch überall *am Rande*, wo die Randwerte $f(s)$ stetig sind.

Es ist nun eine konjugierte Potentialfunktion $v(x, y)$ überall im Inneren des Kreises durch die Gleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ eindentig bis auf eine Konstante bestimmt. Diese wird im Inneren der Kreisfläche stetig sein, und auch an den Stellen *des Randes*, wo $u(x, y)$ stetig und differentiierbar ist, also wo dasselbe von $f(s)$ gilt. Nun ist, da

$$\log(x + iy) = \log \varrho e^{i\vartheta} = \log \varrho + i\vartheta$$

eine komplexe Funktion ist, $-\frac{\partial \vartheta}{\partial n}$ das zu $\frac{\partial \log \frac{1}{\varrho}}{\partial n}$ konjugierte Potential. Es gilt also für das Innere des Kreises die Darstellung

$$v(x, y) = -2\pi \int_0^1 g(t)\, \frac{\partial \vartheta\binom{t}{x,\,y}}{\partial n}\, dt, \tag{5}$$

$$\vartheta\binom{t}{x,\,y} = \operatorname{arctg} \frac{y(t) - y}{x(t) - x}.$$

Die Gleichungen (4) und (5) bilden die Grundlagen des Beweises für die Formeln (3). Der Gedankengang ist folgender: Für die „gewöhnlichen" Punkte des Randes (wo $f(s)$ stetig und differentiierbar ist) geht $u(x, y)$ stetig in $f(s)$, und $v(x, y)$ stetig in seine Randwerte $\varphi(s)$ über. Die Ausdrücke rechts in den zwei Gleichungen (4) und (5) gehen bei Annäherung des Punktes (x, y) an einen „gewöhnlichen" Punkt $(x(s), y(s))$ des Randes stetig in $\pi g(s)$ bezw. in $\pi \int_0^1 g(t) \operatorname{ctg} \pi(s - t)\, dt$ über. Da nun jede der zwei Gleichungen (4) und (5) immer innerhalb des Kreises gilt, und da bei Annäherung des Punktes (x, y) an den Rand jedes Glied sich stetig einer bestimmten Grenze nähert, so gelten die Gleichungen auch an der Grenze, und wir haben

$$\left\{\begin{aligned} f(s) &= \pi g(s), \\ \varphi(s) &= \pi \int_0^1 g(t) \operatorname{ctg} \pi(s - t)\, dt \end{aligned}\right. \tag{6}$$

oder

$$\varphi(s) = \int_0^1 f(t) \operatorname{ctg} \pi(s - t)\, dt$$

eine Formel die für alle „gewöhnlichen“ Punkte des Randes die Werte eines Potentials mit denen des konjugierten verbindet. Betrachtet man auf ganz ähnliche Weise die Funktion $v(x, y)$ und ihre konjugierte, $-u(x, y)$, so findet man zwischen $f(s)$ und $\varphi(s)$ auch die Beziehung

$$f(s) = -\int_0^1 \varphi(t) \operatorname{ctg} \pi(s-t)\, dt.$$

Es bleibt also nur noch darzutun, daß die erwähnten Übergänge in (6) stetig sind und die Einschränkungen

$$\int_0^1 f(t)\, dt = \int_0^1 \varphi(t)\, dt = 0$$

zu beseitigen. Daß

$$2\pi \int_0^1 g(t) \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{1}{\varrho\binom{t}{x, y}}\, dt$$

stetig in $\pi g(t)$ übergeht, ist der gewöhnliche Satz für die Randwerte einer Doppelbelegung, wenn man bemerkt, daß für den Kreis

$$\int_0^1 g(t) \frac{\partial \vartheta\binom{t}{s}}{\partial t}\, dt = \int_0^1 g(t)\, dt$$

ist, und, daß

$$\int_0^1 f(t)\, dt = 0$$

war. Dagegen ist die Stetigkeit des Überganges von

$$-2\pi \int_0^1 g(t) \frac{\partial \vartheta\binom{t}{x, y}}{\partial n}\, dt = -\int_0^1 g(t) \frac{\partial \log \varrho\binom{t}{x, y}}{\partial t}\, dt$$

in

$$\int_0^1 g(t) \operatorname{ctg} \pi(s-t)\, dt$$

nicht ohne weiteres klar. Wir wollen das Verhalten des Integrals betrachten, wenn der Punkt (x, y) sich einem „gewöhnlichen“ Grenzpunkte, für den wir der Bequemlichkeit halber den Punkt $(1, 0)$, $s = 0$ nehmen können, nähert. Zu diesem Zwecke teilen wir das Integral in zwei Teile — von $t = -\varepsilon$ in positiver Umlaufsrichtung bis $t = +\varepsilon$, und von $t = +\varepsilon$ weiter bis $t = -\varepsilon$, — wir denken uns naturgemäß alle vorkom-

menden Funktionen als außerhalb des Intervalles 0 bis 1 durch die Forderung definiert, daß sie die Periode 1 haben. Wir haben also

$$-\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} g(t)\,\frac{\partial \log \varrho\begin{pmatrix} t \\ x, y\end{pmatrix}}{\partial t}\,dt - \int_{+\varepsilon}^{1-\varepsilon} g(t)\,\frac{\partial \log \varrho\begin{pmatrix} t \\ x, y\end{pmatrix}}{\partial t}\,dt.$$

Sobald etwa $|x-1| + |y| < \frac{\varepsilon}{2}$ ist, ist das erste Integral immer stetig, da der Integrand eine stetige Funktion von x und y innerhalb dieses Bereiches ist. Wir wählen nun ε, über das wir frei verfügen können, so klein, daß in dem Intervalle $t = -\varepsilon$ bis $t = +\varepsilon$ $g(t) = \frac{f(t)}{\pi}$ stetig und differentiierbar ist, was möglich ist, da der betrachtete Punkt $(0, 1)$ ein „gewöhnlicher" sein sollte. Wir haben also nur noch zu zeigen, daß

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} g(t)\,\frac{\partial \log \varrho\begin{pmatrix} t \\ x, y\end{pmatrix}}{\partial t}\,dt$$

eine stetige Funktion von x und y für $x = 1$, $y = 0$ ist. Zu diesem Zwecke ziehen wir den Kreisradius durch den Punkt x, y; er möge die Peripherie im Punkte $t = t_1$ treffen. Hiermit wollen wir also nicht die Richtung in welcher (x, y) an die Peripherie heranrückt, einschränken; t_1 kann als eine Veränderliche angesehen werden. Wir haben jetzt

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} g(t)\,\frac{\partial \log \varrho}{\partial t}\,dt = \underset{\sigma=0}{L}\left\{\int_{-\varepsilon}^{t_1-\sigma} + \int_{t_1+\sigma}^{+\varepsilon}\right\};$$

denn liegt (x, y) nicht auf der Peripherie, so hat der Grenzwert rechter Hand den gewöhnlichen Sinn eines Integrals, sonst stimmt er mit dem (gemeinten) Cauchyschen Hauptwerte überein. Teilweise Integration gibt nun

$$\begin{aligned}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} g(t)\,\frac{\partial \log \varrho\begin{pmatrix} t \\ x, y\end{pmatrix}}{d t}\,dt &= \left[g(\varepsilon)\log \varrho\begin{pmatrix} \varepsilon \\ x, y\end{pmatrix} - g(-\varepsilon)\log \varrho\begin{pmatrix} -\varepsilon \\ x, y\end{pmatrix}\right] \\ &+ \underset{\sigma=0}{L}\left[g(t_1-\sigma)\log\begin{pmatrix} t_1-\sigma \\ x, y\end{pmatrix} - g(t_1+\sigma)\log \varrho\begin{pmatrix} t_1+\sigma \\ x, y\end{pmatrix}\right] \\ &- \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} g'(t)\log \varrho\begin{pmatrix} t \\ x, y\end{pmatrix} dt.\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite ist das dritte Glied wegen der absoluten Integrierbarkeit des Logarithmus durchweg stetig, das erste Glied ist für

$$|x-1| + |y| < \frac{\varepsilon}{2}$$

auch stetig, und das zweite verschwindet für jedes (x, y) in demselben Bereiche, denn

1) liegt (x, y) nicht auf der Peripherie des Kreises, so ist alles stetig, und das Glied verschwindet daher mit σ.

2) liegt (x, y) auf der Peripherie, so nimmt das Glied, da

$$\log \varrho\begin{pmatrix} t_1 \pm \sigma \\ x(t_1), y(t_1) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \log \varrho^2 = \frac{1}{2} \log[1 - 2 \cos 2\pi (t_1 \mp \sigma - t_1) + 1],$$

die Form an:

$$\underset{\sigma=0}{L}\, [g(t_1 - \sigma) - g(t_1 + \sigma)] \log 2 \sin \pi\sigma$$

und dies verschwindet wegen der Differentiierbarkeit von $g(t)$ in diesem Bereiche.

Also ist der ganze Ausdruck

$$-\int_0^1 g(t) \frac{\partial \log \varrho\begin{pmatrix} t \\ x, y \end{pmatrix}}{\partial t} dt$$

im betrachteten Punkte stetig. Man berechnet leicht seinen Wert für den Randpunkt s und findet ihn wie angegeben $= \pi \int_0^1 g(t) \operatorname{ctg} \pi (s - t) dt$. Die folgenden Formeln sind also aufgestellt:

$$\begin{cases} \varphi(s) = \displaystyle\int_0^1 f(t) \operatorname{ctg} \pi (s - t)\, dt, \\ f(s) = -\displaystyle\int_0^1 \varphi(t) \operatorname{ctg} \pi (s - t)\, dt. \end{cases}$$

In dem vorhergehenden waren $\int_0^1 f(t)\, dt = \int_0^1 \varphi(t)\, dt = 0$. Sollten nun $f(s)$ diese Bedingungen nicht befriedigen, so tun es doch

$$f(s) - \int_0^1 f(t)\, dt, \quad \varphi(s) - \int_0^1 \varphi(t)\, dt,$$

und die eben erhaltenen Formeln auf diese Funktionen angewandt, liefern die gewünschten Gleichungen (3).

Wir haben nur die Punkte betrachtet, wo $f(s)$ und $\varphi(s)$ stetig und differentiierbar waren. Nun aber kann man direkt verifizieren, daß die Formeln noch für Punkte gelten, wo die Stetigkeit unterbrochen wird. Nehmen wir z. B. an, $f(s)$ erleide einen endlichen Sprung, etwa für $s = 0$: $f(+0) - f(-0) = a\pi$, $f'(s)$ dagegen möge stetig sein. Als Integrations-

grenzen können wir die bequemeren $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ nehmen, da der Integrand die Periode 1 hat. Dann gibt (3_1)

$$\varphi(s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{s-t}\,dt + S_1(s)$$

wo S_i $(i = 1, 2, \cdots)$ hier und im folgenden eine im Punkte $s = 0$ stetige Funktion bedeuten soll. Ferner ist

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{s-t} = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{f(t)}{s-t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)-a\pi}{s-t}\,dt + a\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{s-t}\,.$$

Die zwei ersten Glieder auf der rechten Seite bilden eine für $s = 0$ stetige Funktion. Das dritte Glied aber verhält sich bis auf eine stetige Funktion wie $a\log|s|$. Wir haben also $\varphi(s) = a\log|s| + S_2(s)$. Es fragt sich, ob dieses $\varphi(s)$ in (3_2) eingesetzt wieder für $f(s)$ einen Sprung von der Größe $a\pi$ ergibt. Dies ist in der Tat der Fall, denn die Substitution $t = s + t'$ liefert

$$f(s) = \frac{a}{\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{\log|s+t'|}{t'}\,dt' + S_3(s).$$

Also ist

$$f(s) - f(-s) = \frac{a}{\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \log\frac{|t+s|}{|t-s|}\,\frac{dt}{t} + S_4(s)$$

$$= \frac{a}{\pi}\cdot \underset{\sigma=0}{L}\left\{\int_{-\frac{1}{2}}^{-\sigma} \log\frac{|t+s|}{|t-s|}\,\frac{dt}{t} + \int_{\sigma}^{\frac{1}{2}} \log\frac{|t+s|}{|t-s|}\,\frac{dt}{t}\right\}$$

$$= \frac{2a}{\pi}\cdot \underset{\sigma=0}{L}\int_{\sigma}^{\frac{1}{2}} \log\frac{|t+s|}{|t-s|}\,\frac{dt}{t}.$$

Trennt man nun das Integral in zwei Teile, je nachdem $t < s$ oder $s < t$ ist, und entwickelt dann nach Potenzen von $\frac{t}{s}$ in einen und $\frac{s}{t}$ im anderen, so kann man die Integration ausführen:

$$\int_\sigma^s \log\frac{|t+s|}{|t-s|}\frac{dt}{t} = 2\int_\sigma^s \left\{\frac{1}{s}+\frac{t^2}{3s^3}+\cdots+\frac{t^{2n}}{(2n+1)s^{2n+1}}+\cdots\right\}dt$$

$$= 2\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right] - 2\left[\frac{\sigma}{s}+\frac{\sigma^3}{3^2s^3}+\cdots\right]$$

$$\int_s^{\frac{1}{2}} \log\frac{|t+s|}{|t-s|}\frac{dt}{t} = 2\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right] + s\cdot S_6(s).$$

Also ist

$$\underset{\sigma=0}{L}\int_\sigma^{\frac{1}{2}} \log\frac{|t+s|}{|t-s|}\frac{dt}{t} = 4\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right] + s\cdot S_6(s)$$

$$= 4\left[\frac{\pi^2}{8}\right] + s\cdot S_6(s).$$

Also finden wir schließlich

$$f(s) - f(-s) = \frac{8a}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{8} + s\cdot S_6(s)$$

und $f(s)$ zeigt also das behauptete Verhalten.

Auf ganz ähnliche Weise findet man, daß die Formeln auch für algebraische Unendlichkeitsstellen erhalten bleiben. Man findet nämlich, daß $f(s) = \frac{1}{|s|^\alpha}\cdot\cos\frac{\alpha\pi}{2}$, in (3_1) eingesetzt, $\varphi(s) = \frac{1}{|s|^\alpha}\sin\frac{\alpha\pi}{2}$ für positives s, $\varphi(s) = \frac{-1}{|s|^\alpha}\sin\frac{\alpha\pi}{2}$ für negatives s liefert; und umgekehrt liefert dies $\varphi(s)$, in (3_2) eingesetzt, jenes $f(s)$.

Man kann sich auch leicht durch teilweise Integration überzeugen, daß sich Unstetigkeiten in den Ableitungen von $f(s)$ und $\varphi(s)$ genau ebenso reproduzieren.

§ 3.

Mit Hilfe dieser Hilbertschen Formeln (3) können wir gleich zwei Integralgleichungen lösen. Erstens

$$f(s) = \int_0^1 \varphi(t)\,[a \operatorname{ctg} \pi(s-t) + S(s,t)]\,dt \tag{7}$$

wo $S(s, t)$ eine endliche und bis auf einzelne Linien stetige und differentiierbare Funktion ist. Multiplizieren wir nämlich die Gleichung mit $-\frac{1}{a}\operatorname{ctg}\pi(r-s)$ und integrieren in Bezug auf s von 0 bis 1, so bekommen wir

$$(8) \qquad f_1(r) = \varphi(r) + \int_0^1 \varphi(t) K(r, t)\, dt$$

wo

$$f_1(r) = -\frac{1}{a} \int_0^1 f(s) \operatorname{ctg} \pi (r-s)\, ds$$

und

$$K(r, t) = -1 - \frac{1}{a} \int_0^1 S(s, t) \operatorname{ctg} \pi (r-s)\, ds$$

beides bekannte Funktionen sind. Hierin ist eine Vertauschung einer Integrationsfolge vorgenommen worden, diese ist aber berechtigt unter den für $S(s, t)$ gemachten Voraussetzungen. Nun ist (8) eine der Fredholmschen Methode vollkommen zugängliche Gleichung, und durch sie wird die Lösung der Gleichung (7) geleistet, falls diese überhaupt eine Lösung besitzt.

§ 4.

Die Gleichung

$$(9) \qquad f(s) = \varphi(s) + \int_0^1 \varphi(t) \left[a \operatorname{ctg} \pi (s-t) + S(s, t)\right] dt$$

behandelt man auf ähnliche Weise. Multiplikation mit $\operatorname{ctg} \pi (r-s)$ und Integration von 0 bis 1 in Bezug auf s gibt

$$(10) \qquad f_1(r) = \int_0^1 \varphi(s) \operatorname{ctg} \pi (r-s)\, ds - a\varphi(r) + a \int_0^1 \varphi(t)\, dt$$
$$+ \int_0^1 \int_0^1 \varphi(t)\, S(s, t) \operatorname{ctg} \pi (r-s)\, dt\, ds,$$

und wenn wir die Benennung der Integrationsveränderlichen passend vertauschen und die mit a multiplizierte Gleichung (10) von der Gleichung (9) abziehen, so bekommen wir wieder eine der Fredholmschen Methode zugängliche Gleichung, deren Lösung auch eine Lösung von (9) ist, falls diese lösbar ist.

§ 5.

Es war eine Eigenschaft der Hilbertschen Formeln, die Randwerte einer Potentialfunktion auf einer Kreisperipherie anzugeben, ausgedrückt mittelst der Randwerte des konjugierten Potentials. Liegen aber die Randwerte längs der Begrenzung eines anderen Gebietes Ω an Stelle der Kreisperipherie vor, so bedürfen die Formeln einer kleinen Erweiterung, die wir eintreten lassen können, falls wir eine konforme Abbildung des Gebietes Ω auf den Kreis kennen.

Für den Kreis lauteten die Formeln

$$(11)\qquad \begin{cases} g(\sigma) = \displaystyle\int_0^1 f(\tau)\,\mathrm{ctg}\,\pi(\sigma-\tau)\,d\tau + \int_0^1 g(\tau)\,d\tau, \\ f(\sigma) = -\displaystyle\int_0^1 g(\tau)\,\mathrm{ctg}\,\pi(\sigma-\tau)\,d\tau + \int_0^1 f(\tau)\,d\tau. \end{cases}$$

Sind nun die Randwerte $\varphi(s)$ einer Potentialfunktion $U(x, y)$ des Gebietes Ω gegeben, so können wir offenbar die Randwerte $\psi(s)$ des konjugierten Potentials $V(x, y)$ auf folgende Weise bekommen. Die konforme Abbildung des Gebietes Ω der $z = x + iy$-Ebene auf einen Kreis der $\zeta = \xi + i\eta$-Ebene, dessen Peripherie gleich der Längeneinheit (eine Voraussetzung die wir der Bequemlichkeit halber auch für die Länge der Begrenzung von Ω machen), verwandelt $U(x, y)$ in eine Funktion

$$U(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = u(\xi, \eta),$$

die auf der Begrenzung des Kreises die Werte $\varphi(s(\sigma)) = f(\sigma)$ annimmt. Wir bestimmen die Randwerte $g(\sigma)$ des zu $u(\xi, \eta)$ konjugierten Potentials $v(\xi, \eta)$ und machen die zur eben angewandten Transformation inverse Transformation, womit wir $\varphi(\sigma(s)) = \psi(s)$ bekommen, da bei einer solchen Transformation konjugierte Potentiale ebensolche bleiben. All' diese Operationen können wir mit den Formeln (11) vereinigen, falls wir nur die Abbildung der Randpunkte $\sigma = \sigma(s)$ ermittelt haben:

$$(12_1)\qquad \psi(s) = \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{ctg}\,\pi[\sigma(s) - \sigma(\tau)]\sigma'(t)\,dt + \int_0^1 \psi(t)\,\sigma'(t)\,dt,$$

$$(12_2)\qquad \varphi(s) = -\int_0^1 \psi(t)\,\mathrm{ctg}\,\pi[\sigma(s) - \sigma(\tau)]\sigma'(t)\,dt + \int_0^1 \varphi(t)\,\sigma'(t)\,dt.$$

Die Funktion $\sigma = \sigma(s)$ wird durch die konforme Abbildung bestimmt. Ist die Funktion, welche die Abbildung vermittelt

$$z = F(\zeta) = F(\varrho e^{i\vartheta})$$

so ist

$$dz = F'(\zeta)\,d\zeta,$$

und wenn wir die konjugiert imaginäre Größe durch einen Strich andeuten,

$$dz \cdot \overline{dz} = F'(\zeta) \cdot \overline{F'(\zeta)} \cdot d\zeta \cdot \overline{d\zeta}$$

oder

$$dx^2 + dy^2 = F'(\zeta) \cdot \overline{F'(\zeta)}\,(d\xi^2 + d\eta^2)$$

d. h.

$$ds^2 = \left[F'(\zeta) \cdot \overline{F'(\zeta)}\right]_{\varrho = \frac{1}{2\pi}} d\sigma^2$$

also

$$(12_3)\qquad s = \int\limits_0^\sigma \left[F'(\zeta)\cdot \overline{F'(\zeta)}\right]^{\frac{1}{2}}_{\varrho = \frac{1}{2\pi}} d\sigma,$$

dies gibt die verlangte Beziehung zwischen s und σ an.

Die Formeln (12) sind also die erweiterten Hilbertschen Formeln, welche auch gerade wie (3) ein reziprokes Verhalten zeigen. Spezielle Gebiete liefern sehr interessante Formelpaare, wie z. B. die Halbebene:

$$\begin{cases} \psi(s) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\frac{1+st}{s-t}\,\frac{dt}{1+t^2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\,\frac{dt}{1+t^2}, \\ \varphi(s) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\,\frac{1+st}{s-t}\,\frac{dt}{1+t^2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\frac{dt}{1+t^2}. \\ s = \operatorname{tang} \pi\sigma. \end{cases}$$

Wenn man nach der Grenze der Gültigkeit der Formeln (12) fragt, so sieht man, indem man sie als Formeln in σ und τ auffaßt, daß $\varphi(s(\sigma))$ und $\psi(s(\sigma))$ stückweise stetige und differentiierbare Funktionen von σ sein müssen, welche durchweg integrierbar sind. (Cf. Formeln (3)). Wir nehmen an, daß sie solche Funktionen von s seien. Falls nun die Begrenzung von Ω in Strecken zerfällt, längs deren sich die Tangente stetig ändert, so ist $s(\sigma)$ stückweise stetig und differentiierbar in σ; dieselben Eigenschaften folgen dann aber auch für $\varphi(s(\sigma))$ und $\psi(s(\sigma))$. Was die Integrierbarkeit von diesen Funktionen anbelangt, so sieht man, daß $\varphi(s)\,\sigma'(s)$ und $\psi(s)\,\sigma'(s)$ integrierbar sein müssen, was nur in den Punkten, wo die Tangente an die Begrenzungskurve einen Sprung erleidet, eine neue *Bedingung* mit sich bringt: wenn die Tangente durch einen Winkel $\alpha\pi$ springt, so müssen $\varphi(s)\,s^{\frac{1}{1-\alpha}}$ und $\psi(s)\,s^{\frac{1}{1-\alpha}}$ mit s verschwinden. Insbesondere haben wir *keine* neueren Bedingungen, falls alle Winkel der Berandung ihre Spitzen nach außen gekehrt haben.

§ 6.

Eine dritte Art mit Unstetigkeiten behafteter Integralgleichungen tritt im Fall der Doppelbelegung einer Kurve mit Ecken auf, obgleich ihre Anwendung nicht auf dies Gebiet beschränkt ist. Nehmen wir an, zwei analytische Kurvenstücke, die einen Teil der Begrenzung von Ω ausmachen, begegnen sich unter einem Winkel $\alpha\pi$, und rechnen wir die Bogenlänge s der Randkurve, $x = x(s)$, $y = y(s)$, von diesem Punkte aus. Dann findet man für $K(s,t) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\operatorname{arctg}\frac{y(t)-y(s)}{x(t)-x(s)}$ die folgende Gestalt:

$$\text{für} \quad s < 0,\ t < 0 \quad \text{oder für} \quad s > 0,\ t > 0$$

ist $K(s,t)$ eine stetige, analytische Funktion, für $s < 0$, $t > 0$ ist

$$K(s,t) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \cdot \frac{-s}{s^2 - 2st\cos\alpha\pi + t^2} + E_-(s,t),$$

für $s > 0$, $t < 0$ ist

$$K(s,t) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \cdot \frac{s}{s^2 - 2st\cos\alpha\pi + t^2} + E_+(s,t)$$

wo $E_-(s,t)$ und $E_+(s,t)$ zwei endliche Funktionen sind. Speziell für rechte Winkel hat man $K(s,t) = \frac{1}{\pi} \frac{\pm s}{s^2 + t^2} + E_\pm(s,t)$, wenn s und t entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Die Integralgleichung

$$f(s) = \varphi(s) + \int_0^1 \varphi(t) K(s,t)\, dt, \tag{13}$$

wo $K(s,t)$ die obige Form hat, läßt sich nun mittelst der erweiterten Hilbertschen Formeln lösen. Hierin sind $\pi f(s)$ die Randwerte der Potentialfunktion, welche die Belegung $\varphi(s)$ im Innern von Ω hervorruft. Sind $\pi f_a(s)$ die Randwerte der Potentialfunktion, welche $\varphi(s)$ im Außengebiete hervorruft, so hat man bekanntlich nach der Potentialtheorie:

$$\varphi(s) = \frac{f(s) - f_a(s)}{2}. \tag{14}$$

Die Gleichung ist also gelöst, sobald wir $f_a(s)$ ermittelt haben. Das Gebiet, für das das vorliegende $K(s,t)$ charakteristisch ist, möge von Teilen analytischer Kurven begrenzt werden. Es läßt sich also konform auf den Kreis abbilden, und wir können die Hilbertschen Formeln aufstellen, sowohl für das Gebiet Ω, wie für das Gebiet Ω_a, welches aus der Ebene entsteht, wenn man Ω davon ausschneidet. Dann betrachten wir die zwei Potentialfunktionen $u_i(x,y)$ und $u_a(x,y)$, welche $\varphi(s)$ in Ω und in Ω_a hervorruft, und die zu ihnen konjugierten Potentiale $v_i(x,y)$ und $v_a(x,y)$. Mittelst der Hilbertschen Formeln bekommen wir die Randwerte $v_i(s)$ aus $f(s)$. Dann erhalten wir, da am Rande $\frac{\partial u_i}{\partial n} = \frac{\partial u_a}{\partial n}$, folglich auch $\frac{\partial v_i}{\partial s} = \frac{\partial v_a}{\partial s}$ ist, durch Integration:

$$v_a(s) = v_i(s) + c. \tag{15}$$

Eine nochmalige Anwendung der Hilbertschen Formeln liefert, bis auf eine Konstante, die man durch Einsetzen in (12) und (13) bestimmen kann, $f_a(s)$. Nur ist es wichtig zu bemerken, daß man auf die Gleichung (15) aus der vorhergehenden schließen kann; denn es könnte möglich sein, daß die Konstante c nur für gewisse Strecken und nicht für

den ganzen Rand denselben Wert behielte, da wir nur von $v_i(s)$ und $v_a(s)$ wissen, daß sie streckenweise stetig sind. Wir wollen aber zeigen, daß $v_a(s)$ immer dieselben Sprünge erleidet wie $v_i(s)$, daß also c durchweg konstant ist.

Es erleide also $\frac{v_i(s)}{\pi}$ einen Sprung

$$\underset{s=0}{L}\left(\frac{v_i(s)}{\pi} - \frac{v_i(-s)}{\pi}\right) = a$$

an der Stelle $s = 0$, wobei wir, um ganz allgemein zu sein, annehmen, daß die Tangente an die Randkurve von Ω einen Sprung durch den Winkel $\alpha\pi$ macht. Wollen wir dann eine Stelle betrachten, wo die Randlinie stetig gekrümmt ist, so brauchen wir nur $\alpha = 0$ zu setzen. Der vorausgesetzte Sprung von $\frac{v_i(s)}{\pi}$ hat nun die Bedeutung, daß $f(s)$ im Punkte $s = 0$ logarithmisch unendlich wird wie

$$-\frac{a}{\pi(1-\alpha)}\log|s|$$

$\left(\frac{v_i(s)}{\pi} = \varphi(s)\right.$ springt um a, $\varphi(s(\sigma))$ ebenfalls, also wird $f(s(\sigma))$ unendlich wie $-\frac{a}{\pi}\log|\sigma| = -\frac{a}{\pi(1-\alpha)}\log|s|$, da in diesem Punkte $\left.s = \sigma^{1-\alpha} + \cdots\right)$.

Springt dagegen $\frac{v_a(s)}{\pi}$ um b, so wird $f_a(s)$ unendlich wie

$$+\frac{b}{\pi(1+\alpha)}\log|s|$$

(da für das Außengebiet $s = \sigma^{1+\alpha} + \cdots$; das positive Vorzeichen kommt daher, daß der positive Umlaufssinn der Begrenzung von Ω_a dem der Begrenzung von Ω entgegengesetzt ist). Wenn wir nun diese Werte für $f(s)$ und $f_a(s)$ in (14) und dann das so gefundene $\varphi(s)$ in (13) einsetzen und die Glieder betrachten, welche logarithmisch unendlich werden, so haben wir

$$f(s) + f_a(s) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} (f(t) - f_a(t))\, K(s, t)\, dt \tag{16}$$

worin links

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{b}{1+\alpha} - \frac{a}{1-\alpha}\right)$$

der Koeffizient von $\log|s|$ ist, und wenn wir etwa s positiv annehmen, so ist rechts das gesuchte Glied enthalten in

$$\frac{1}{\pi^2}\left(-\frac{a}{1-\alpha} - \frac{b}{1+\alpha}\right)\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\log|t|\,\frac{\sin\alpha\pi\cdot s}{s^2 - 2st\cos\alpha\pi + t^2}\,dt.$$

Das Integral ermitteln wir nun, indem wir das Intervall teilen:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \log|t| \frac{\sin\alpha\pi\cdot s}{s^2 - 2st\cot\alpha\pi + t^2}\,dt$$

$$= -\int_{-\frac{1}{2}}^{-s} \log|t| \frac{\sin\alpha\pi\cdot d\left(\frac{s}{t}\right)}{1 - 2\frac{s}{t}\cos\alpha\pi + \frac{s^2}{t^2}} + \int_{-s}^{0} \log|t| \frac{\sin\alpha\pi\cdot d\left(\frac{t}{s}\right)}{1 - 2\frac{t}{s}\cos\alpha\pi + \frac{t^2}{s^2}}.$$

Die Substitutionen $\frac{s}{t} = x$ und $\frac{t}{s} = x$ geben dann

$$-\int_{-2s}^{-1} (\log s - \log|x|) \frac{d\left(\frac{x}{\sin\alpha\pi}\right)}{1 + \left(\frac{x}{\sin\alpha\pi} - \operatorname{ctg}\alpha\pi\right)^2}$$

$$+\int_{-1}^{0} (\log s + \log|x|) \frac{d\left(\frac{x}{\sin\alpha\pi}\right)}{1 + \left(\frac{x}{\sin\alpha\pi} - \operatorname{ctg}\alpha\pi\right)^2}$$

und der Teil hiervon, welcher für $s = 0$ logarithmisch unendlich wird, ist

$$2\log s\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sin\alpha\pi} - \operatorname{ctg}\alpha\pi\right)\right]_{-1}^{0} = \alpha\pi\log s\,.$$

Also ist der Koeffizient von $\log s$ rechts in der Gleichung (16),

$$\frac{\alpha}{\pi}\left(-\frac{a}{1-\alpha} - \frac{b}{1+\alpha}\right)$$

welches nur dann dem Koeffizienten von $\log s$ auf der linken Seite gleich wird, falls $a = b$ ist.

§ 7.

Um nun die Gleichung

$$(17)\qquad f(s) = \varphi(s) + \int_0^1 \varphi(t)\,[K(s,t) + E(s,t)]\,dt$$

zu lösen, wo $K(s,t) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{arctg}\frac{y(t) - y(s)}{x(t) - x(s)}$, also Unstetigkeiten der S. 452 betrachteten Form hat, wobei $E(s,t)$ eine endliche, bis auf einzelne Linien stetige und differentiierbare Funktion ihrer beiden Argumente ist, brauchen wir die Lösung von

$$f(s) = \varphi(s) + \int_0^1 \varphi(t) K(s,t)\, dt, \tag{18}$$

wo $f(s)$ die spezielle, einen Parameter enthaltende Form $K(s, t)$ hat. Die Lösung $\varphi(s)$ möge mit $R(s, t)$ bezeichnet werden, so daß wir die Gleichung haben:

$$K(s,t) = R(s,t) + \int_0^1 R(r,t) K(s,r)\, dr. \tag{19}$$

Um die Lösung $R(s, t)$ nach dem vorigen Paragraphen erlangen zu können, müssen wir wissen, daß $K(s, t)$ für alle in Betracht kommenden Werte von t eine streckenweise stetige und differentiierbare Funktion von s ist, welche auch Bedingungen in Bezug auf die Integrabilität unterliegen muß. Man findet aber, das für die Werte $t = s_i$ welche den Ecken von Ω entsprechen, $K(s, t)$ in Bezug auf s analytisch und auch sogar für $t = s_i$ stetig ist, ausgenommen für $s = s_i$. $R(s, t)$ hat also auch diese Eigenschaften und man findet, daß auch in Bezug auf t $R(s, t)$ sich genau so verhält wie $K(s, t)$.

Nun verifiziert man leicht durch einsetzen, daß

$$\varphi(s) = f(s) - \int_0^1 f(t) R(s,t)\, dt \tag{20}$$

die Gleichung (18) löst. Ferner ist sie die einzige Lösung; denn der Unterschied zwischen zwei verschiedenen Lösungen würde der Gleichung

$$0 = \varphi(s) + \int_0^1 \varphi(t) K(s,t)\, dt$$

genügen, was, wie die Potentialtheorie zeigt, bei nichtverschwindendem $\varphi(s)$ unmöglich ist.

Wenn wir nun umgekehrt (18) in (20) einsetzen, so bekommen wir

$$\int_0^1 \varphi(t) K(s,t)\, dt = \int_0^1 \varphi(t) R(s,t)\, dt + \int_0^1 \varphi(r) K(t,r) R(s,t)\, dr\, dt$$

für beliebiges $\varphi(t)$, — also

$$K(s,t) = R(s,t) + \int_0^1 K(r,t) R(s,r)\, dr. \tag{21}$$

Mittelst dieser Formel können wir nun die Gleichung (17) lösen. Schreiben wir nämlich in dieser Gleichung r für s, multiplizieren $R(s, r)$ und

integrieren von 0 bis 1 in Bezug auf r, so haben wir, wenn wir (21) beachten:

$$f_1(s)=\int_0^1\varphi(t)\,K(s,t)\,dt+\int_0^1\int_0^1\varphi(t)\,E(r,t)\,R(s,r)\,dr\,dt,$$

oder wenn wir diese Gleichung von (17) abziehen:

$$f(s)-f_1(s)=\varphi(s)+\int_0^1\varphi(t)\left[E(s,t)-\int_0^1 E(r,t)\,R(s,r)\,dr\right]dt;$$

was eine der Fredholmschen Methode zugängliche Gleichung ist.

Sul *valor medio* di Pringsheim e sulla sua applicazione alla teoria delle funzioni analitiche.

di

G. Vivanti a Messina.

1. Or sono alcuni anni, Pringsheim*) ha mostrato come l'uso d'una certa espressione, da lui denominata *valor medio*, permetta di stabilire *elementarmente*, cioè in base a sole nozioni d'Algebra, e con grande semplicità molti importanti teoremi della teoria delle funzioni analitiche, tra gli altri il teorema di Laurent, di cui erano state date precedentemente due dimostrazioni, indipendenti bensì dal concetto d'integrale curvilineo, ma che certo non possono dirsi elementari.

Io ho riprodotto i procedimenti di Pringsheim nella mia *Teoria delle funzioni analitiche***), applicandoli anche alla dimostrazione di alcuni teoremi sulle funzioni intere trascendenti. Riporto qui, con qualche modificazione, questi teoremi, aggiungendone parecchi altri che mi sembrano non privi d'interesse.

2. Importa anzitutto ricordare la definizione di valor medio e alcuni dei risultati stabiliti da Pringsheim o da questi immediatamente deducibili.

Sia $f(x)$ una funzione, monogena o no, della variabile complessa x, definita per tutti i punti d'una circonferenza di raggio r col centro nell'origine, e continua su questa circonferenza. Posto:

$$\alpha_n = e^{\frac{2\pi i}{2^n}},$$

l'espressione:

$$\mathfrak{M}_n(f(r)) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} f(r\alpha_n^k)$$

---

*) *Über die Entwickelung eindeutiger analytischer Funktionen in Potenzreihen,* Sitzungsberichte d. K. bay. Ak. d. Wiss., T. XXV (1895), p. 75—92. — *Über Vereinfachungen in der elementaren Theorie der analytischen Funktionen,* Math. Ann., T. XLVII (1896), p. 121—154.

**) Manuale Hoepli, Milano, 1901.

al crescere indefinito di n tende ad un limite determinato, che si indica con $\mathfrak{M}(f(r))$:

$$\mathfrak{M}(f(r)) = \lim_{n=\infty} \mathfrak{M}_n(f(r)),$$

e che si dice *valor medio della funzione* $f(x)$ *sulla circonferenza* r.

Il valor medio ha le proprietà seguenti:

$$(1) \qquad \mathfrak{M}(c) = c,$$

$$(2) \qquad \mathfrak{M}(cf(r)) = c\mathfrak{M}(f(r)),$$

dove c denota una costante,

$$(3) \qquad \mathfrak{M}\left(\sum_{h=1}^{m} f_h(r)\right) = \sum_{h=1}^{m} \mathfrak{M}(f_h(r)),$$

$$(4) \qquad \mathfrak{M}\left(\sum_{h=1}^{\infty} f_h(r)\right) = \sum_{h=1}^{\infty} \mathfrak{M}(f_h(r)),$$

dove la serie $\sum_{h=1}^{\infty} f_h(x)$ si suppone equiconvergente sulla circonferenza r,

$$(5) \qquad \mathfrak{M}(r^{\mu}) = \begin{Bmatrix} 1 \text{ per } \mu = 0 \\ 0 \text{ per } \mu \text{ intero positivo o negativo} \end{Bmatrix},$$

$$(6) \qquad \mathfrak{M}\left(\frac{r f(r)}{r-x}\right) = \begin{Bmatrix} \sum_{h=0}^{\infty} x^h \mathfrak{M}\left(\frac{f(r)}{r^h}\right) & \text{per } |x| < r \\ -\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{x^h} \mathfrak{M}(r^h f(r)) & \text{per } |x| > r \end{Bmatrix},$$

$$(7) \qquad \mathfrak{M}\left(\frac{r}{r-x}\right) = \begin{Bmatrix} 1 \text{ per } |x| < r \\ 0 \text{ per } |x| > r \end{Bmatrix},$$

$$(8) \qquad \mathfrak{M}\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty} a_h r^h\right) = a_0,$$

$$(9) \qquad \mathfrak{M}\left(r^{\pm\mu} \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_h r^h\right) = a_{\mp\mu}.$$

Se $f(x)$ è una funzione analitica il cui elemento relativo all' origine ha raggio di convergenza $\varrho > r$, indicando questo elemento con $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$, si ha dalle (6), per le (8), (9):

$$\mathfrak{M}\left(\frac{r f(r)}{r-x}\right) = \begin{Bmatrix} \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h & \text{per } |x| < r \\ 0 & \text{per } |x| > r \end{Bmatrix},$$

ossia:

$$\mathfrak{M}\left(\frac{rf(r)}{r-x}\right)=\begin{Bmatrix} f(x) & \text{per } |x|<r \\ 0 & \text{per } |x|>r \end{Bmatrix}. \tag{10}$$

3. Premesso tutto questo, prendiamo ancora a considerare la funzione analitica $f(x)$. È noto che gli elementi di tutte le sue derivate relativi all' origine hanno raggio di convergenza ϱ, sicchè le serie:

$$f^{(s)}(x)=\sum_{h=0}^{\infty}(h+s)(h+s-1)\cdots(h+1)a_{h+s}x^h \quad (s=1,2,\cdots)$$

rappresentano funzioni finite e continue sulla circonferenza r, e sono equiconvergenti su di essa. L'espressione di $f^{(s)}(x)$ può scriversi, per le (8), (9):

$$f^{(s)}(x)=\sum_{h=0}^{\infty}(h+s)(h+s-1)\cdots(h+1)x^h\mathfrak{M}\left(\frac{f(r)}{r^{h+s}}\right),$$

od anche, per le (2), (4):

$$f^{(s)}(x)=\mathfrak{M}\left(f(r)\sum_{h=0}^{\infty}(h+s)(h+s-1)\cdots(h+1)\frac{x^h}{r^{h+s}}\right).$$

Ora si ha dall' Algebra per $|t|<1$:

$$\frac{1}{(1-t)^s}=\sum_{h=0}^{\infty}\binom{h+s-1}{h}t^h=\frac{1}{(s-1)!}\sum_{h=0}^{\infty}(h+s-1)(h+s-2)\cdots(h+1)t^h\text{*)}.$$

*) Questa formola, che per $s=1$ si riduce a quella ben nota:

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{h=0}^{\infty}t^h,$$

si dimostra molto semplicemente per induzione completa. Supposto che essa sussista per un certo esponente s, ne segue:

$$\frac{1}{(1-t)^{s+1}}=\sum_{h=0}^{\infty}\binom{h+s-1}{h}t^h\cdot\sum_{h=0}^{\infty}t^h$$

$$=\sum_{h=0}^{\infty}\left[\binom{h+s-1}{h}+\binom{h+s-2}{h-1}+\cdots+\binom{s}{1}+1\right]t^h;$$

ora:

$$\binom{h+s-1}{h}+\binom{h+s-2}{h-1}+\cdots+\binom{s}{1}+1=\binom{h+s}{h},$$

quindi:

$$\frac{1}{(1-t)^{s+1}}=\sum_{h=0}^{\infty}\binom{h+s}{h}t^h.$$

Ne segue per $|x| < r$, scrivendo $s+1$ invece di s:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x}{r}\right)^{s+1}} = \frac{1}{s!}\sum_{h=0}^{\infty}(h+s)(h+s-1)\cdots(h+1)\frac{x^h}{r^h},$$

sicchè:

$$f^{(s)}(x) = s!\,\mathfrak{M}\left(\frac{r f(r)}{(r-x)^{s+1}}\right) \text{ per } |x| < r. \tag{11}$$

4. Sia ancora $f(x)$ la stessa funzione analitica, e denotiamo con $P(x)$, $i\,Q(x)$ le sue parti reale e imaginaria:

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h = P(x) + i\,Q(x).$$

Le $P(x)$, $Q(x)$ sono funzioni non monogene della variabile complessa x, continue in tutto il campo d'esistenza di $f(x)$. Se indichiamo in generale con $\bar{t}$ il numero coniugato di t, avremo:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \bar{a}_h \bar{x}^h = P(x) - i\,Q(x);$$

anche $\bar{x}$ è funzione non monogena di x, continua in tutto il piano, che denoteremo con $\bar{x}(x)$. Segue di qui:

$$P(x) = \frac{1}{2}\left[\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h + \sum_{h=0}^{\infty} \bar{a}_h \bar{x}^h\right],$$

e per conseguenza, in virtù delle (2), (3), (4), μ designando un numero intero positivo qualunque:

$$\mathfrak{M}\left(\frac{P(r)}{r^\mu}\right) = \frac{1}{2}\left[\sum_{h=0}^{\infty} a_h \mathfrak{M} r^{h-\mu} + \sum_{h=0}^{\infty} \bar{a}_h \mathfrak{M}\left(\frac{[\bar{x}(r)]^h}{r^\mu}\right)\right].$$

Ora, posto $x = re^{i\theta}$, si ha $\bar{x} = re^{-i\theta} = \frac{r^2}{x}$, quindi, per la (5):

$$\mathfrak{M}\left(\frac{[\bar{x}(r)]^h}{r^\mu}\right) = r^{2h}\,\mathfrak{M}\left(\frac{1}{r^{h+\mu}}\right) = 0;$$

ne segue, in virtù delle (5):

$$\mathfrak{M}\left(\frac{P(r)}{r^\mu}\right) = \frac{1}{2}\,a_\mu. \tag{12}$$

Siccome poi, per le (2), (3), (9):

$$\mathfrak{M}\left(\frac{P(r)}{r^\mu}\right) + i\,\mathfrak{M}\left(\frac{Q(r)}{r^\mu}\right) = \mathfrak{M}\left(\frac{f(r)}{r^\mu}\right) = a_\mu,$$

così:

$$\mathfrak{M}\left(\frac{Q(r)}{r^\mu}\right) = \frac{1}{2i}\,a_\mu. \tag{13}$$

5. Dalle (12), (13) si ricava una conseguenza notevole.

Fondandosi sulla (9), si dimostra immediatamente*) che, date due quantità positive qualunque ϱ, R, possono sempre trovarsi valori di x di modulo maggiore di ϱ pei quali una data funzione intera $f(x)$ prende valori di modulo maggiore di R. Nello stesso modo di deduce dalle (12), (13) che, date ϱ, R, possono trovarsi valori di x di modulo maggiore di ϱ pei quali la parte reale di $f(x)$ prende valori di modulo maggiore di R, ed altri pei quali ha luogo la stessa cosa per la parte imaginaria di $f(x)$.

6. Sia $f(x)$ una funzione meromorfa, cioè non avente a distanza finita altre singolarità che poli. La sua forma generale è:

$$f(x) = e^{g(x)} x^m \frac{\prod\limits_{h=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{C_h(x)}}{\prod\limits_{h=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{d_h}\right) e^{D_h(x)}},$$

dove $g(x)$ è una funzione intera razionale o trascendente, m un numero intero positivo, nullo o negativo, $c_1, c_2, \cdots$ sono gli zeri e $d_1, d_2, \cdots$ i poli della funzione, ripetuti ciascuno un numero di volte eguale al suo ordine di moltiplicità e disposti in ordine crescente di modulo, e infine:

$$C_h(x) = \sum_{k=1}^{r_h} \frac{x^k}{k c_h^k}, \quad D_h(x) = \sum_{k=1}^{s_h} \frac{x^k}{k d_h^k},$$

r_h, s_h essendo i *numeri di convergenza* relativi agli zeri ed ai poli, cioè numeri non negativi e non decrescenti al crescere di h, tali da rendere assolutamente convergenti le serie:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{r_h+1}}{c_h^{r_h+1}}, \quad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{s_h+1}}{d_h^{s_h+1}}$$

per ogni valore finito di x. Ne risulta, con un facile calcolo:

$$\frac{xf'(x)}{f(x)} = x\left\{g'(x) + \frac{m}{x} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{r_h}}{c_h^{r_h}(x - c_h)} - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{s_h}}{d_h^{s_h}(x - d_h)}\right\},$$

dove le serie del 2^0 membro sono equiconvergenti in ogni campo finito non contenente alcuno dei punti c_h, d_h, e quindi, in particolare, su ogni circonferenza col centro nell' origine non passante per alcuno di questi punti. Detto r il raggio di una tale circonferenza, si avrà, per le formole del § 2:

*) V. Pringsheim, *Über Vereinfachungen* etc.

$$\mathfrak{M}\left(\frac{rf'(r)}{f(r)}\right)=\mathfrak{M}(rg'(r))+\mathfrak{M}(m)+\sum_{h=1}^{\infty}\mathfrak{M}\left(\frac{r^{r_h+1}}{c_h^{r_h}(r-c_h)}\right)-\sum_{h=1}^{\infty}\mathfrak{M}\left(\frac{r^{s_h+1}}{d_h^{s_h}(r-d_h)}\right).$$

Ora, poichè $xg'(x)$ è una funzione intera col termine costante nullo, si ha per la (8):

$$\mathfrak{M}(rg'(r))=0;$$

inoltre, per la (1):

$$\mathfrak{M}(m)=m.$$

Facendo poi nelle (6) $f(x)=\left(\frac{x}{c_h}\right)^{r_h}$ e scrivendo in esse c_h in luogo di x, si ha, tenuto conto delle (5):

$$\mathfrak{M}\left(\frac{r^{r_h+1}}{c_h^{r_h}(r-c_h)}\right)=\left\{\begin{array}{ll}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}c_h^{k-r_h}\mathfrak{M}(r^{r_h-k})=1 & \text{per } |c_h|<r\\ \displaystyle-\sum_{k=1}^{\infty}c_h^{-k-r_h}\mathfrak{M}(r^{k+r_h})=0 & \text{per } |c_h|>r\end{array}\right\},$$

ed analogamente:

$$\mathfrak{M}\left(\frac{r^{s_h+1}}{d_h^{s_h+1}(r-d_h)}\right)=\left\{\begin{array}{l}1 \text{ per } |d_h|<r\\ 0 \text{ per } |d_h|>r\end{array}\right\}.$$

Supposto quindi che entro il cerchio r stieno gli zeri $c_1, c_2, \cdots, c_\varrho$ ed i poli $d_1, d_2, \cdots, d_\sigma$, si avrà:

$$\mathfrak{M}\left(\frac{rf'(r)}{f(r)}\right)=m+\varrho-\sigma. \tag{14}$$

Cioè: *Il valor medio di $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ sopra una circonferenza non passante per alcuno zero nè per alcun polo di $f(x)$ è sempre un numero intero, ed è eguale alla differenza tra il numero degli zeri e quello dei poli contenuti entro la circonferenza, tenuto conto dell' ordine di moltiplicità degli uni e degli altri.*

7. Vogliamo calcolare il valor medio di $\lg|1-x|$ sopra una circonferenza, col centro nell' origine, di raggio $r \neq 1$. Qui lg rappresenta il logaritmo iperbolico, preso nel senso aritmetico.

Indicando con $x=re^{i\theta}$ un punto qualunque della circonferenza considerata, si ha:

$$1-x=1-r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta),$$

$$|1-x|^2=(1-r\cos\theta)^2+r^2\operatorname{sen}^2\theta=1+r^2-2r\cos\theta$$
$$=(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta}),$$

quindi, posto come prima $\alpha_n=e^{\frac{2\pi i}{2^n}}$:

$$\mathfrak{M}(\lg|1-r|) = \frac{1}{2}\lim_{n=\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\lg\left[(1-r\alpha_n^k)(1-r\alpha_n^{-k})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n=\infty}\frac{1}{2^n}\lg\left[\prod_{k=0}^{2^n-1}(1-r\alpha_n^k)\cdot\prod_{k=0}^{2^n-1}(1-r\alpha_n^{-k})\right].$$

Ora:

$$\prod_{k=0}^{2^n-1}(1-r\alpha_n^{\pm k}) = 1-r^{2^n},$$

quindi:

$$\mathfrak{M}(\lg|1-r|) = \frac{1}{2}\lim_{n=\infty}\frac{1}{2^n}\lg(1-r^{2^n})^2 = \lim_{n=\infty}\lg\sqrt[2^n]{|1-r^{2^n}|},$$

ossia:

$$\mathfrak{M}(\lg|1-r|) = \left\{\begin{array}{ll}\lim\limits_{n=\infty}\lg\sqrt[2^n]{1-r^{2^n}} & \text{per } r<1 \\ \lim\limits_{n=\infty}\lg\sqrt[2^n]{r^{2^n}-1} = \lg r + \lim\limits_{n=\infty}\lg\sqrt[2^n]{1-\frac{1}{r^{2^n}}} & \text{per } r>1\end{array}\right\}.$$

Per $r<1$, 2^n al tendere di n ad ∞ tende ad ∞ e $1-r^{2^n}$ tende ad 1, sicchè $\sqrt[2^n]{1-r^{2^n}}$ tende ad 1; la stesso può dirsi di $\sqrt[2^n]{1-\frac{1}{r^{2^n}}}$ per $r>1$. Dunque:

$$\mathfrak{M}(\lg|1-r|) = \left\{\begin{array}{ll}0 & \text{per } r<1 \\ \lg r & \text{per } r>1\end{array}\right\}. \tag{15}$$

8. Riprendiamo la funzione meromorfa del § 6, facendo però l'ipotesi che essa non sia nulla nè infinita nell' origine, sicchè $m=0$. Indicando in generale con $R\varphi(x)$ la parte reale della funzione $\varphi(x)$, avremo:

$$|f(x)| = e^{Rg(x)}\frac{\prod\limits_{h=1}^{\infty}\left|1-\frac{x}{c_h}\right|e^{RC_h(x)}}{\prod\limits_{h=1}^{\infty}\left|1-\frac{x}{d_h}\right|e^{RD_h(x)}},$$

e quindi:

$$\lg|f(x)| = Rg(x) + \sum_{h=1}^{\infty}\left[\lg\left|1-\frac{x}{c_h}\right| + RC_h(x)\right] - \sum_{h=1}^{\infty}\left[\lg\left|1-\frac{x}{d_h}\right| + RD_h(x)\right],$$

dove le serie del 2^0 membro sono equiconvergenti su ogni circonferenza, col centro nell' origine, non passante per alcuno dei punti c_h, d_h. Sia r il raggio di una tale circonferenza. Osservando che i polinomi $C_h(x)$, $D_h(x)$ hanno il termine costante nullo, si ha, per la (8):

$$\mathfrak{M}(RC_h(r)) = \mathfrak{M}(RD_h(r)) = 0;$$

inoltre, per le (8), (15):

$$\mathfrak{M}(Rg(x)) = Rg(0) = \lg |f(0)|,$$

$$\mathfrak{M}\left(\lg\left|1-\frac{r}{c_h}\right|\right) = \begin{Bmatrix} 0 & \text{per } |c_h| > r \\ \lg\frac{r}{|c_h|} & \text{per } |c_h| < r \end{Bmatrix},$$

$$\mathfrak{M}\left(\lg\left|1-\frac{r}{d_h}\right|\right) = \begin{Bmatrix} 0 & \text{per } |d_h| > r \\ \lg\frac{r}{|d_h|} & \text{per } |d_h| < r \end{Bmatrix}.$$

Supponendo, come prima, che entro la circonferenza r sieno contenuti gli zeri $c_1, c_2, \cdots, c_\varrho$ ed i poli $d_1, d_2, \cdots, d_\sigma$, si avrà dunque:

$$\mathfrak{M}(\lg|f(r)|) = \lg|f(0)| + \sum_{h=1}^{\varrho}\lg\frac{r}{|c_h|} - \sum_{h=1}^{\sigma}\lg\frac{r}{|d_h|},$$

ossia:

(16) $$\mathfrak{M}(\lg|f(r)|) = \lg\left[|f(0)|\, r^{\varrho-\sigma}\frac{|d_1\,d_2\cdots d_\sigma|}{|c_1\,c_2\cdots c_\varrho|}\right],$$

formola che può considerarsi come l'equivalente del *teorema di Jensen**).

9. *Se $f(x)$ è una funzione intera di rango p***), *il valor medio di $\frac{f'(x)}{x^p f(x)}$ sopra una circonferenza r tende a zero al tendere di r ad infinito****).

Sia:

$$f(x) = e^{g(x)}x^m\prod_{h=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{c_h}\right)e^{\sum_{k=1}^{p}\frac{x^k}{k c_h^k}},$$

*) Jensen, *Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions*, Acta math., T. XXII (1899), p. 359—364. — Goursat, *Sur un théorème de M. Jensen*, Bull. des sc. math S. II, T. XXVI (1902), p. 298—302. — Lindelöf, *Mémoire sur les fonctions entières de genre fini*, Acta Societatis Scientiarum Fennicae, T. XXXI (1902), N. 1. — Petersen, *Vorlesungen über Functionstheorie*, Kopenhagen, Høst, 1898. — Petersen, *Quelques remarques sur les fonctions entières*, Acta math., T. XXIII (1900), p. 85—90.

**) Secondo la nomenclatura stabilita nel mio *Manuale*, una funzione intera di *rango* p è il prodotto d'un' esponenziale avente per esponente un polinomio di grado non superiore a p per una potenza intera e positiva di x (che può anche mancare) e per un prodotto infinito di *fattori primi* della forma $\left(1-\frac{x}{c_h}\right)e^{\sum_{k=1}^{p}\frac{x^k}{k c_h^k}}$; p si suppone essere il minimo numero intero non negativo che rende assolutamente convergente la serie $\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h^{p+1}}$.

***) *Manuale*, p. 235. — S'intende che r, nel tendere ad ∞, dovrà saltare i valori dei moduli delle c_h.

dove $g(x) = \sum_{h=0}^{p} b_h x^h$; ne segue:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x) + \frac{m}{x} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^p}{c_h^p (x - c_h)},$$

quindi, per le (2), (3), (4):

$$\mathfrak{M}\left(\frac{f'(r)}{r^p f(r)}\right) = \mathfrak{M}\left(\frac{g'(r)}{r^p}\right) + \mathfrak{M}\left(\frac{m}{r^{p+1}}\right) + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p}\, \mathfrak{M}\left(\frac{1}{r - c_h}\right),$$

dove s'intende che la circonferenza r non passi per alcuno dei punti c_h. Ora:

$$\frac{1}{x^p}\, g'(x) = \sum_{h=0}^{p-1} (h+1)\, b_{h+1}\, x^{h-p},$$

e quindi, per le (2), (3), (5):

$$\mathfrak{M}\left(\frac{g'(r)}{r^p}\right) = 0;$$

parimenti, per le (2), (5):

$$\mathfrak{M}\left(\frac{m}{r^{p+1}}\right) = 0.$$

Inoltre, se nelle (6) si pone $f(x) = \frac{1}{x}$ e si scrive c_h in luogo di x, si ha:

$$\mathfrak{M}\left(\frac{1}{r - c_h}\right) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{k=0}^{\infty} c_h^k\, \mathfrak{M}(r^{-k-1}) = 0 & \text{per } |c_h| < r \\ -\sum_{k=1}^{\infty} c_h^{-k}\, \mathfrak{M}(r^{k-1}) = -\frac{1}{c_h} & \text{per } |c_h| > r \end{array} \right\}.$$

Quindi, supposto che nell' interno della circonferenza r sieno contenuti gli zeri $c_1, c_2, \cdots, c_\varrho$:

$$\mathfrak{M}\left(\frac{f'(r)}{r^p f(r)}\right) = -\sum_{h=\varrho+1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{p+1}}. \tag{17}$$

Al crescere indefinitamente di r, cresce indefinitamente anche ϱ, e quindi, poichè la serie $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{p+1}}$ è convergente, il 2^0 membro della (17) tende a zero; si ha dunque:

$$\lim_{r=\infty} \mathfrak{M}\left(\frac{f'(r)}{r^p f(r)}\right) = 0. \tag{18}$$

La formola (17) è interessante anche per sè stessa, e potrebbe dar luogo a varie conseguenze. È evidente che essa sussiste ancora quando invece di p si ponga qualunque altro numero intero più grande.

10. *Se $f(x)$ è una funzione intera, e se ha luogo la relazione:*

$$\lim_{r=\infty} \mathfrak{M}\left(\frac{f'(r)}{r^t f(r)}\right) = 0$$

per tutti e soli i numeri interi t non inferiori ad un numero non negativo p, $f(x)$ è di rango p).*

Sia:

$$f(x) = e^{g(x)} x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{r_h} \frac{x^k}{k c_h^k}},$$

dove $g(x) = \sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h$; ne segue:

$$\frac{f'(x)}{x^t f(x)} = \sum_{h=0}^{\infty} (h+1) b_{h+1} x^{h-t} + \frac{m}{x^{t+1}} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{r_h - t}}{c_h^{r_h}(x - c_h)},$$

quindi, per le (2), (3), (4):

$$\mathfrak{M}\left(\frac{f'(r)}{r^t f(r)}\right) = \sum_{h=0}^{\infty} (h+1) b_{h+1} \mathfrak{M}(r^{h-t}) + m \mathfrak{M}(r^{-t-1}) + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{r_h}} \mathfrak{M}\left(\frac{r^{r_h - t}}{r - c_h}\right).$$

Ora, per la (5):

$$\mathfrak{M}(r^{h-t}) = \begin{cases} 0 & \text{per } h \neq t \\ 1 & \text{per } h = t \end{cases},$$

$$\mathfrak{M}(r^{-t-1}) = 0;$$

inoltre, facendo nelle (6) $f(x) = x^{r_h - t - 1}$ e scrivendo c_h in luogo di x, si ha:

$$\mathfrak{M}\left(\frac{r^{r_h - t}}{r - c_h}\right) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_h^k \mathfrak{M}(r^{r_h - k - t - 1}) & \text{per } |c_h| < r \\ \displaystyle -\sum_{k=1}^{\infty} c_h^{-k} \mathfrak{M}(r^{r_h + k - t - 1}) & \text{per } |c_h| > r \end{cases}.$$

Noi possiamo imaginare i numeri r_h indefinitamente crescenti con h, giacchè, se non lo fossero, si potrebbero sempre aggiungere termini in numero indefinito ai polinomi che figurano come esponenti togliendo termini eguali a $g(x)$, ed è facile vedere che ciò non altererebbe la convergenza assoluta del prodotto infinito. Possiamo anzi supporre tutte le r_h

*) *Manuale*, p. 239. — Laguerre (*Sur la détermination du genre d'une fonction transcendante entière*, C. R. de l'Ac. de Paris, T. XCIV (1882), p. 635—638) ha dimostrato che, se al tendere di x ad infinito $\frac{f'(x)}{x^p f(x)}$ tende a zero, $f(x)$ è di rango p.

maggiori di p. Presa quindi r abbastanza grande perchè a tutte le c_h di modulo maggiore di r corrispondano numeri r_h maggiori di t, sarà:

$$\mathfrak{M}\left(r^{r_h+k-t-1}\right)=0 \quad \text{per} \quad |c_h|>r, \quad k=1,2,\cdots.$$

Invece, per $|c_h|<r$, sarà:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_h^k\, \mathfrak{M}\left(r^{r_h-k-t-1}\right)=\left\{\begin{array}{cc} 0 & \text{per } r_h \leq t \\ \dfrac{1}{c_h^{t+1-r_h}} & \text{per } r_h>t \end{array}\right\}.$$

Tenendo dunque conto dell' ipotesi del teorema, avremo:

$$0=\lim_{r=\infty} \mathfrak{M}\left(\frac{f'(r)}{r^t f(r)}\right)=(t+1) b_{t+1}+\sum_{h=\sigma_t+1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{t+1}},$$

dove σ_t+1 è l'indice del primo dei punti c_h per cui $r_h>t$. Ne risulta:

$$b_{t+1}=-\frac{1}{t+1} \sum_{h=\sigma_t+1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{t+1}};$$

e questa formola, che sussiste per ogni $t \geq p$, ci mostra anzitutto che $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{p+1}}$ è convergente. Moltiplichiamo ambi i membri per x^{t+1} e sommiamo da $t=p$ a $t=\infty$; avremo:

$$\sum_{t=p}^{\infty} b_{t+1} x^{t+1}=-\sum_{t=p}^{\infty} \frac{x^{t+1}}{t+1} \sum_{h=\sigma_t+1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{t+1}},$$

dove il primo membro, che è una parte dello sviluppo della funzione intera $g(x)$, converge assolutamente per tutti i valori di x. Nel secondo membro una data c_h figura con tutti gli esponenti $t+1$ in cui $t<r_h$; quindi può anche scriversi:

$$\sum_{t=p}^{\infty} b_{t+1} x^{t+1}=-\sum_{h=1}^{\infty} \sum_{t=p}^{r_h-1} \frac{x^{t+1}}{(t+1) c_h^{t+1}},$$

ossia:

$$\sum_{t=p+1}^{\infty} b_t x^t=-\sum_{h=1}^{\infty} \sum_{t=p+1}^{r_h} \frac{x^t}{t c_h^t}.$$

Ne segue:

$$g(x)=\sum_{t=0}^{p} b_t x^t-\sum_{h=1}^{\infty} \sum_{t=p+1}^{r_h} \frac{x^t}{t c_h^t},$$

quindi:

$$f(x) = e^{\sum_{t=0}^{p} b_t x^t} x^m \prod_{h=1}^{\infty} e^{-\sum_{t=p+1}^{r_h} \frac{x^t}{t c_h^t}} \cdot \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{r_h} \frac{x^k}{k c_h^k}},$$

e finalmente:

$$f(x) = e^{\sum_{t=0}^{p} b_t x^t} x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k c_h^k}},$$

donde risulta che $f(x)$ è al più di rango p.

Essa però non può essere di rango inferiore, perchè in tal caso l'ipotesi del teorema sarebbe soddisfatta anche per valori di t minori di p (§ 9), quindi essa è necessariamente di rango p.

Messina, 13 agosto 1903.

Über zyklische Bewegung.

Von

A. Brill in Tübingen.

1.

Einige von den Begriffen, um die in jüngster Zeit die theoretische Physik bereichert worden ist, hat auch die Mechanik bereits in dauernden Besitz genommen; andere harren noch der Prüfung auf ihre Verwendbarkeit in dem systematischen Aufbau. Zu ihnen gehört der Begriff der zyklischen Bewegung. Um einen Beitrag zu dem Studium desselben zu liefern, versuche ich es im folgenden, eine gewisse Art von dizyklischer Bewegung verborgener Massen auf dem von Hertz in seinen „Prinzipien der Mechanik" vorgezeichneten Wege zu behandeln.

Zyklisch*) nennt Helmholtz „ein solches mechanisches System, in dessen Innerem eine oder mehrere stationäre in sich zurücklaufende Bewegungen vorkommen". In weiterer Fassung bezeichnet Hertz**) ein solches System als zyklisch, in welchem zyklische (von J. J. Thomson***) „kinosthenische", Lord Kelvin and Tait 'ignored' genannte) Koordinaten vorkommen (mit übrigens noch einer unten zu besprechenden Beschränkung). Er versteht darunter solche Bestimmungsgrößen für die Bewegung, welche in dem Ausdruck für die Lagrangesche Funktion — diejenige Funktion L der Koordinaten und Geschwindigkeiten, deren Zeitintegral ein Minimum wird,

$$\delta\int L\,dt = \delta\int (T+U)\,dt = 0,$$

wo T die kinetische, $(-U)$ die potentielle Energie ist — nicht selbst, sondern nur in der Form von Differentialquotienten nach der Zeit auf-

*) von Helmholtz, Studien zur Statik monocyklischer Systeme, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1884 und Journal für Mathematik Bd. 97.

**) Hertz, Prinzipien der Mechanik Art. 546 ff.

***) Vergl. Routh-Schepp, Dynamik I, § 422 S. S. 378, 467.

treten. Die Folge dieser Annahme für die Koordinate p ist, daß in der bei Ausführung der Variation sich ergebenden Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{p}} = \frac{\partial L}{\partial p},$$

wo $\dot{p} = \frac{dp}{dt}$ ist, die rechte Seite verschwindet, daß also das der Koordinate p entsprechende Bewegungsmoment

$$q = \frac{\partial}{\partial \dot{p}}\,(T + U)$$

eine konstante Größe ist.

Das Auftreten solcher zyklischen Koordinaten führt somit zu einer Gleichung, welche die „zyklische Geschwindigkeit" $\dot{p}$ durch die anderen auszudrücken und aus der Lagrangeschen Funktion zu eliminieren gestattet. Diese letztere ist dann nicht mehr notwendig eine homogene Funktion der übrigen Geschwindigkeiten, und die Bewegung, wenn die Einwirkung auf die zyklische Geschwindigkeit wegfällt, nicht mehr in der umgekehrten Reihenfolge durchlaufbar. Bekanntlich tritt dieser Umstand u. a. bei den mit Wärmeumsatz verbundenen Prozessen auf, deren Studium denn auch Helmholtz zur Bildung des genannten Begriffes veranlaßt zu haben scheint.

2.

In den Mittelpunkt der ganzen Mechanik aber müßte der Begriff der zyklischen Bewegung dann rücken, wenn, wie dies Hertz annimmt, jede Art von potentieller Energie, welche die Mechanik bisher den Wirkungen einer Fernkraft oder einer elastischen Spannung zuschrieb, sich auf die kinetische Energie verborgener Massen zurückführen ließe, die, zwischen den sichtbaren eingeschaltet, sich in zyklischer Bewegung befinden.

Diese dynamische Auffassung des Kraftbegriffs bildet den Kernpunkt des Hertzschen Werkes, sie bedingt die Form, in der das Axiom eingeführt wird, und die ganze Anordnung des Stoffes. „Beispiele aber, die erläutern könnten", so sagt von Helmholtz in dem Vorwort zu dem Werke von Hertz, „wie er sich solche hypothetische Zwischenglieder [verborgene Massen] dachte, hat er leider nicht mehr gegeben, und es wird offenbar noch ein großes Aufgebot wissenschaftlicher Einbildungskraft dazu gehören, um auch nur die einfachsten Fälle physikalischer Kräfte danach zu erklären. Er scheint hierbei hauptsächlich auf die Zwischenschaltung zyklischer Systeme mit unsichtbaren Bewegungen Hoffnung gesetzt zu haben." In der Tat begnügt sich Hertz bezüglich der Begründung seiner Hypothese damit, auf die bisherige Entwicklung der Lehre von den Kräften in der Physik hinzuweisen, besonders auf die in

dieser Richtung am weitesten fortgeschrittene Theorie der elektrodynamischen Erscheinungen und auf Lord Kelvins Wirbelatome. Allerdings besteht für den Physiker kein Grund, jene Hypothese abzulehnen. Die von Faraday und Maxwell ausgesprochene Überzeugung, daß Fernkräfte nicht existieren, hat sich inzwischen Bahn gebrochen. Aber wenn es sich um das Studium mechanischer Begriffe handelt, sind im einzelnen durchgeführte Beispiele unentbehrlich, und von dieser Art sind die angezogenen nicht. Man könnte eher etwa an Bjerknes' Theorie der Wirkung zweier in eine Flüssigkeit eingetauchten pulsierenden Kugeln denken und an seinen Versuch, durch sie die Erscheinungen der Gravitation zu erklären. Er bietet in der Tat ein wertvolles Beispiel zur Lehre von den verborgenen Bewegungen. Aber zyklisch ist diese Flüssigkeitsbewegung nicht, weil diejenigen Größen, von denen sie abhängt, die Volumina der Kugeln, in dem Ausdruck für die Energie nicht nur durch ihre Ableitungen nach der Zeit vertreten sind, sondern auch selbst vorkommen. So dürfte der folgende Versuch nicht überflüssig sein. Es handelt sich dabei gleichfalls um eine Nachbildung der Gravitationswirkungen; nur wird von vornherein auf jede Realisierbarkeit der zu Grunde liegenden Annahme verzichtet.

3.

In einer hinterlassenen Schrift von B. Riemann (Mathematische Werke, her. von H. Weber 1876, S. 503) „Neue mathematische Prinzipien der Naturphilosophie“ (1853) findet sich folgende These: „Nimmt man an, daß der raumerfüllende Stoff eine inkompressible homogene Flüssigkeit ohne Trägheit sei, und daß in jedes ponderable Atom in gleichen Zeiten stets gleiche seiner Masse proportionale Mengen einströmen [und dort verschwinden, s. d. Anmerkung a. a. O.], so wird offenbar der Druck, den das ponderable Atom erfährt, (der Geschwindigkeit der Stoffbewegung an dem Orte des Atoms proportional sein?)“ An der Hand der in dem Vordersatz (auf den Nachsatz kommen wir in Art. 6 zurück) ausgesprochenen Hypothese (modifiziert nur bezüglich der in das Atom einströmenden Stoffmenge) läßt sich in der Tat, wie man sehen wird*), die gegenseitige Anziehung zweier Massenpunkte in ihren Wirkungen nachahmen.

Eine Flüssigkeit der angegebenen Art, im Unendlichen ruhend, erfülle wirbelfrei den Raum und ströme in zwei sehr kleine Kugeln (die wir später als Massenpunkte auffassen werden) als „Senken“ ein, wo sie verschwindet. α, α_1 seien die im Verhältnis zu ihrem Abstand sehr kleinen Radien der Kugeln, die wir ebenfalls mit α, α_1 bezeichnen wollen. Inner-

*) Das Folgende wurde im wesentlichen in einer Vorlesung im Winter 1902/3 vorgetragen.

halb desjenigen Raumes τ, der durch die Oberflächen dieser Kugeln und eine Kugel mit unendlich großem Halbmesser begrenzt wird, existiert dann ein Geschwindigkeitspotential φ. Sind u, v, w die Komponenten der Geschwindigkeit in einem Punkt x, y, z, so ist die Divergenz

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\Delta\varphi$$

innerhalb der Kugeln α, α_1 von Null verschieden, etwa beziehungsweise

$$\Delta\varphi=-4\pi\varepsilon, \qquad \Delta\varphi=-4\pi\varepsilon_1,$$

während in dem Raume τ $\Delta\varphi=0$ ist. Die Voraussetzung des Ruhens im Unendlichen werde (vergl. H. Weber, partielle Differentialgleichungen II. Bd. § 150) genauer dahin festgelegt, daß für $\mathfrak{R}=\infty$ die Grenzwerte $\mathfrak{R}\cdot\varphi$ und $\mathfrak{R}^2\cdot\partial\varphi/\partial\mathfrak{R}$ endlich bleiben. Durch diese Annahmen ist die Funktion φ völlig definiert (H. Weber l. c. I § 105). Es sind genau dieselben Bedingungen, denen das Newtonsche Potential für zwei kugelförmige Massen von den Dichten $\varepsilon, \varepsilon_1$ genügt, die sich an der Stelle der Senken α befinden, oder auch für zwei materielle Punkte mit den Massen

$$e=\frac{4}{3}\pi\alpha^3\varepsilon, \qquad e_1=\frac{4}{3}\pi\alpha_1^3\varepsilon_1$$

in den Mittelpunkten (a, b, c) und (a_1, b_1, c_1) der Senken; φ hat die Form

$$\varphi=\frac{e}{r}+\frac{e_1}{r_1}, \tag{1}$$

wo

$$r^2=(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2,$$
$$r_1^2=(a_1-x)^2+(b_1-y)^2+(c_1-z)^2$$

ist, und x, y, z ein Punkt des Raumes τ ist. Die Größen e, e_1 haben, wenn wieder φ als Geschwindigkeitspotential aufgefaßt wird, die Dimension $[l^3t^{-1}]=[lt^{-1}]l^2$ des Produktes einer Geschwindigkeit in eine Fläche; sie lassen sich auch als die Volumina der in der sehr kleinen Zeiteinheit in die Kugeloberflächen einströmenden Flüssigkeitsmengen deuten, oder auch, bei gleichbleibender Kugeloberfläche, als Ausflußgeschwindigkeiten. Und zwar spielen sie die Rolle von *zyklischen Geschwindigkeiten* (Hertz, Mechanik, Art. 548), weil die Koordinaten der einzelnen bewegten Flüssigkeitsteilchen in dem Ausdruck für die Energie, wie wir sehen werden, nicht auftreten.

Wir machen nun die Annahme, daß die Senken sich räumlich fortbewegen und dabei ihre Saugkraft ändern. Wir werden also die Koordinaten a, b, c; a_1, b_1, c_1 der Mittelpunkte der Kugeln und die zyklischen Geschwindigkeiten e, e_1 als Funktionen der Zeit auffassen, während α, α_1 Konstante sind. Das Potential φ (1) ergibt dann immer noch eine mögliche Flüssigkeitsbewegung, wenn jene Funktionen stetige sind, weil die

Bewegung in jedem Augenblick räumlich eine mögliche ist, während die Geschwindigkeiten in jedem Raumpunkt stetige, eindeutige Funktionen der Zeit sind. Dabei verändert sich das System der Strömungslinien in der Weise, daß es *simultan* aus einer einem stationären Zustand entsprechenden Lage in die Nachbarlage übergeht; als ob die Wirkung der Verschiebung der Senken mit unendlicher Geschwindigkeit durch das Medium hindurch sich fortpflanzte.*)

Indem wir die $a, \cdots, a_1, \cdots, e, e_1$ als Funktionen der Zeit einführen, wollen wir zugleich annehmen, daß die Fortschreitungsgeschwindigkeiten v, v_1 der Senken, wo

$$v^2 = \dot{a}^2 + \dot{b}^2 + \dot{c}^2, \qquad v_1^2 = \dot{a}_1^2 + \dot{b}_1^2 + \dot{c}_1^2$$

ist, im Vergleich mit den zyklischen Geschwindigkeiten e, e_1 sehr kleine Größen seien, daß also a, b, c; a_1, b_1, c_1 „langsam veränderliche Parameter" seien. Wir erteilen damit der Flüssigkeit das zweite wesentliche Merkmal, das Hertz von einem zyklischen Systeme fordert, nämlich (Artt. 549, 551 a. E.) die Eigenschaft, daß gegenüber den zyklischen die Änderungsgeschwindigkeiten der Parameter (insbesondere in dem Ausdrucke für die Energie des zyklischen Systems) vernachlässigt werden können.

---

*) Wollte man eine Fortpflanzung der Wirkung mit endlicher Geschwindigkeit annehmen, also an Stelle von φ ein „retardiertes Potential" — ähnlich etwa dem von Herrn Schwarzschild für elektrodynamische Wirkungen aufgestellten (Göttinger Nachrichten 1903) — einführen, so wäre die Divergenz $\Delta\varphi$ im Inneren des Raumes τ von Null verschieden, also entweder das ganze Medium mit Quellen und Senken angefüllt, oder das Mittel ein elastisches, also fähig, potentielle Energie aufzuspeichern oder abzugeben. Damit wären aber die Grundvoraussetzungen der Hertzschen Mechanik verletzt. Man entgeht diesem Vorwurf durch Annahme eines inkompressibelen Mediums. Denn die Bedingungsgleichung für Inkompressibilität

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

hat eben die von Hertz (Artt. 131, 132) zugelassene Form der Bedingungsgleichungen für ein holonomes System, wie man einsieht, wenn man an Stelle der diskreten Massenpunkte ein Kontinuum treten läßt, das Hertz aus seinem Werk gewiß nur der Einfachheit wegen ausgeschlossen hat, ohne daß diese Beschränkung in der Natur der Sache gelegen wäre (Vergl. eine Note des Verf. in den Jahresber. der D. Mathematiker-Vereinigung VIII, 1900, S. 203). Jene Gleichung sagt ja nur aus, daß der Inhalt des (der Form nach veränderlichen) Volumelementes der Flüssigkeit in der Zeit konstant bleibt (Mitt. des math. naturwiss. Vereins in Württemberg, 1900, S. 15). Dagegen besitzt die bekannte Kontinuitätsgleichung für elastische Mittel nicht mehr den Charakter einer geometrischen Bedingungsgleichung, weil der Differentialquotient der Dichte nach der Zeit eingeht.

4.

Der durch das Potential

$$\varphi = \frac{e}{r} + \frac{e_1}{r_1}$$

definierten Flüssigkeitsbewegung entspricht in jedem Augenblick ein Betrag $\mathfrak{T}$ von kinetischer Energie,

$$\mathfrak{T} = \int \frac{\varrho}{2} (u^2 + v^2 + w^2) d\tau = \int \frac{\varrho}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau,$$

wo ϱ die Dichte ist, also eine Konstante, und das Integral sich über das Innere des Raumes τ erstreckt. Man kann nun, genau wie im Falle konstanter $a, \cdots, a_1, \cdots, e, e_1$, das Integral $\mathfrak{T}$, genommen über denjenigen Raum τ, innerhalb dessen jeweilig $\Delta \varphi = 0$ ist, mittelst des Gaußschen Integralsatzes durch ein Integral über die begrenzende Oberfläche σ von τ ausdrücken, und erhält:

$$\mathfrak{T} = -\frac{\varrho}{2} \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma,$$

wo n die nach innen von τ gerichtete Normale zu dem Oberflächenelement $d\sigma$ bedeutet.

Die Oberfläche σ setzt sich zusammen aus:

1. Einer die unendlich ferne Begrenzung von τ bildenden Fläche, etwa einer Kugelfläche mit unendlich großem Radius $\mathfrak{R}$. — Der Beitrag aber, den dieser Teil zu dem Integral liefert, ist Null, weil $\varphi \cdot \partial \varphi / \partial n$ Null wird wie $1/\mathfrak{R}^3$, und

$$d\sigma = \mathfrak{R}^2 dw,$$

wo dw das Element einer Kugelfläche w vom Halbmesser 1 ist, unendlich wird wie $\mathfrak{R}^2$, das Produkt also nach Ausführung der Integration über w verschwindet wie $1/\mathfrak{R}$.

2. Aus der Oberfläche der die Senken umschließenden kleinen Kugeln α, α_1. — In einem Punkt der Oberfläche von α hat r den Wert α. Ferner ist, wenn R den Abstand der beiden Kugelmittelpunkte bezeichnet, also:

$$R^2 = (a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 + (c - c_1)^2,$$

und γ der Neigungswinkel von r gegen R ist,

$$r_1^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \gamma,$$

oder, wenn man $\frac{\alpha}{R} = \mathfrak{r}$ setzt,

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\mathfrak{r} \cos \gamma + \mathfrak{r}^2}}$$

$$= \frac{1}{R} (1 + P_1 \mathfrak{r} + P_2 \mathfrak{r}^2 + \cdots)$$

wo

$$P_1 = \cos \gamma; \quad P_2 = \frac{3}{2} \cos^2 \gamma - \frac{1}{2}; \cdots$$

Kugelfunktionen sind. Daher wird für einen Punkt in der Nähe der Oberfläche von α:

$$\varphi_\alpha = \frac{e}{r} + \frac{e_1}{r_1} = \frac{e}{\alpha} + \frac{e_1}{R}(1 + P_1\mathfrak{r} + P_2\mathfrak{r}^2 + \cdots)$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \alpha} = -\frac{e}{\alpha^2} + \frac{e_1}{R^2}(P_1 + 2P_2\mathfrak{r} + \cdots).$$

Bildet man das Produkt, ordnet nach Potenzen von $\mathfrak{r} = \alpha/R$, multipliziert mit

$$d\sigma = \alpha^2 dw$$

und integriert über die Oberfläche der Kugel α, so erhält man:

$$\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = -\frac{4\pi e}{\alpha}(e + e_1\mathfrak{r}) + \frac{ee_1}{\alpha}\mathfrak{r}^3 \int P_2 dw + \cdots,$$

oder, bis auf Glieder 3. Ordnung hinsichtlich der sehr kleinen Grösse $\mathfrak{r}$ genau,

$$\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = -4\pi\left(\frac{e^2}{\alpha} + \frac{ee_1}{R}\right).$$

Einen analogen Beitrag liefert die Kugel α_1. Man erhält so, bis auf Glieder von der Ordnung von $e^2\alpha^2/R^3$ genau, als Gesamtbetrag der kinetischen Energie der strömenden Flüssigkeit im Innern des Raumes τ

$$\mathfrak{T} = 2\pi\varrho\left(\frac{e^2}{\alpha} + \frac{2ee_1}{R} + \frac{e_1^2}{\alpha_1}\right).$$

Die kinetische Energie ist damit in einen Ausdruck von der Form

$$\text{const.} + \frac{ee_1}{R} 4\pi\varrho$$

übergeführt, und würde, wenn man e, e_1 als konstante Größen ansähe, der Form nach mit dem Ausdruck für die potentielle Energie zweier elektrischer Massenpunkte übereinstimmen.

5.

Wir nehmen nun weiter an, daß unser in zyklischer Bewegung befindliches flüssiges Medium den Sinnen verborgen sei, daß jedoch die beiden kugelförmigen Senken als materielle Punkte der Wahrnehmung zugänglich seien. Wir teilen ihnen die Massen m, m_1 zu und behandeln das aus ihnen und der strömenden Flüssigkeit bestehende Gesamtsystem im Sinne der Mechanik von Hertz (Artt. 340, 358) als ein *freies*, d. h. wir nehmen an,

1. daß die Gesamtenergie konstant sei, und

2. daß die Variation des Zeitintegrals dieser Energie verschwinde, m. a. W., daß das Hamiltonsche Prinzip auf das Gesamtsystem anwendbar sei.

Die Energie setzt sich zusammen aus der der sichtbaren Massen

$$T = \frac{1}{2}\,m(\dot{a}^2 + \dot{b}^2 + \dot{c}^2) + \frac{1}{2}\,m_1(\dot{a}_1{}^2 + \dot{b}_1{}^2 + \dot{c}_1{}^2)$$

und der der verborgenen, die oben bestimmt wurde,

$$\text{(A)} \qquad \mathfrak{T} = 2\pi\varrho\left(\frac{e^2}{\alpha} + \frac{2ee_1}{R} + \frac{e_1{}^2}{\alpha_1}\right);$$

die Bewegungsgleichungen ergeben sich dann aus der Forderung

$$\delta\int(T + \mathfrak{T})\,dt = 0.$$

Bei ihrer Bildung sind acht unabhängige Veränderliche zu berücksichtigen, die Koordinaten der Kugelzentren und die Geschwindigkeiten e, e_1.

Man erhält nach bekannten Regeln

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{a}}\right) = \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial a}; & \ldots\ldots\ldots \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{a}_1}\right) = \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial a_1}; & \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$\text{(C)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial e}\right) = 0; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial e_1}\right) = 0,$$

wo die analog zu bildenden Gleichungen in b, c; b_1, c_1 durch Punkte angedeutet sind. Aus den zwei letzten ergibt sich

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial e} = 4\pi\varrho\left(\dfrac{e}{\alpha} + \dfrac{e_1}{R}\right) = \mathfrak{q}, \\[2ex] \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial e_1} = 4\pi\varrho\left(\dfrac{e}{R} + \dfrac{e_1}{\alpha_1}\right) = \mathfrak{q}_1, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}_1$ Konstante sind. Die Ausflußgeschwindigkeiten e, e_1 müssen sich hiernach im Verlaufe der Bewegung ändern, wenn nicht der Abstand R der Senken unveränderlich sein soll. Die Bewegung der Flüssigkeit kann also, wenn man diesen Sonderfall ausschließt, keine „isozyklische" sein; sie ist eine „adiabatische", bei welcher nämlich die Bewegungsmomente $\partial\mathfrak{T}/\partial e$, $\partial\mathfrak{T}/\partial e_1$ konstant bleiben. Bei der hier gewählten Auffassung der Größen e, e_1 als Geschwindigkeiten geht es also nicht an, die konstanten Massen m, m_1 den veränderlichen Größen e, e_1, wie Riemann dies verlangt (s. oben Art. 3), proportional zu setzen; wir werden sie unten mit den $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}_1$ vergleichen.

6.

Löst man die Gleichungen (D) nach den e auf, so erhält man

$$e = \frac{\alpha\alpha_1}{4\pi\varrho}\left(\frac{\mathfrak{q}}{\alpha_1} - \frac{\mathfrak{q}_1}{R}\right)\left(1 - \frac{\alpha\alpha_1}{R}\right)^{-1},$$

$$e_1 = \frac{\alpha\alpha_1}{4\pi\varrho}\left(-\frac{\mathfrak{q}}{R} + \frac{\mathfrak{q}_1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{\alpha\alpha_1}{R}\right)^{-1}.$$

Nun ist aber $\mathfrak{T}$ als homogene Funktion der e in der Form darstellbar:

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}(e\mathfrak{q} + e_1\mathfrak{q}_1)$$

oder

$$\mathfrak{T} = \frac{\alpha\alpha_1}{8\pi\varrho}\left(\frac{\mathfrak{q}^2}{\alpha_1} - \frac{2\mathfrak{q}\mathfrak{q}_1}{R} + \frac{\mathfrak{q}_1^2}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{\alpha\alpha_1}{R^2}\right)^{-1},$$

ein Ausdruck, der wegen der Kleinheit des Gliedes $\alpha\alpha_1/R^2$ ersetzbar ist durch

(E) $$\mathfrak{T} = \frac{\alpha\alpha_1}{8\pi\varrho}\left(\frac{\mathfrak{q}^2}{\alpha_1} - \frac{2\mathfrak{q}\mathfrak{q}_1}{R} + \frac{\mathfrak{q}_1^2}{\alpha}\right) \equiv \mathfrak{T}_\mathfrak{q}.$$

Zur Unterscheidung von diesem Ausdruck $\mathfrak{T}_\mathfrak{q}$ in den Momenten $\mathfrak{q}$ möge die frühere Darstellung (A) von $\mathfrak{T}$ in den e mit $\mathfrak{T}_e$ bezeichnet werden. Beide Ausdrücke enthalten noch die Veränderliche R (oder auch die $a, \cdots, a_1, \cdots$). Nun knüpft sich aber an die Einführung der Momente an Stelle der entsprechenden Geschwindigkeiten ein bekannter Satz (s. z. B. Jakobi's Dynamik, herausgegeben von Clebsch, S. 353, oder Hertz' Mechanik, Art. 292), nach welchem

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_e}{\partial R} = -\frac{\partial \mathfrak{T}_\mathfrak{q}}{\partial R},$$

oder:

(F) $$\frac{\partial \mathfrak{T}_e}{\partial a} = -\frac{\partial \mathfrak{T}_\mathfrak{q}}{\partial a}; \cdots \qquad \frac{\partial \mathfrak{T}_e}{\partial a_1} = -\frac{\partial \mathfrak{T}_\mathfrak{q}}{\partial a_1}; \cdots$$

ist, Gleichungen, die sich auch unmittelbar durch Rechnung verifizieren lassen, wenn man berücksichtigt, daß bis auf Glieder höherer Ordnung

$$\mathfrak{q}\mathfrak{q}_1\alpha\alpha_1 = 16\pi^2\varrho^2 ee_1$$

ist. — Während nun die Gesamtenergie des Systems durch

(G) $$T + \mathfrak{T}_e = T + \mathfrak{T}_\mathfrak{q} = \text{const.}$$

darstellbar ist, läßt sich in der Lagrangeschen Funktion unter dem Integralzeichen:

(H) $$\delta\int (T + \mathfrak{T}_e)\, dt = 0$$

$\mathfrak{T}_e$ nicht durch $\mathfrak{T}_\mathfrak{q}$ ersetzen; vielmehr gehen vermöge der Gleichungen (F) die sechs Gleichungen (B), die nach Einführung der Konstanten $\mathfrak{q}$ statt der Veränderlichen e noch übrig bleiben, in sechs andere über, wenn man in (H) statt $\mathfrak{T}_e \cdots - \mathfrak{T}_\mathfrak{q}$ einführt. Die Bedingung (H) ist also zu ersetzen durch

(I) $$\delta\int (T - \mathfrak{T}_\mathfrak{q})\, dt = 0.$$

Die durch (E) definierte Funktion $(-\mathfrak{T}_\mathfrak{q})$ spielt nun in den Gleichungen (G), (I) ganz die Rolle einer Kräftefunktion von der Form:

$$U = -\mathfrak{T}_\mathfrak{q} = \frac{\alpha\mathfrak{q}\alpha_1\mathfrak{q}_1}{4\pi\varrho}\,\frac{1}{R} - h,$$

wo die Konstante $h = (\alpha \mathfrak{q}^2 + \alpha_1 \mathfrak{q}_1^2)/8\pi\varrho$ einen erheblich größeren Wert hat, als das erste Glied rechts. Setzt man noch die Massen m, m_1 des sichtbaren Systems den Konstanten $\alpha\mathfrak{q}$, $\alpha_1\mathfrak{q}_1$ des verborgenen proportional,

$$m = \alpha \mathfrak{q} \sigma; \qquad m_1 = \alpha_1 \mathfrak{q}_1 \sigma_1$$

und deutet

$$\frac{1}{4\pi\varrho\sigma^2} = k$$

als Gravitationskonstante, so gehen mit Hilfe von

$$U = -\mathfrak{T}_{\mathfrak{q}} = \frac{m m_1}{R} k - h$$

die aus der Variation (I) sich ergebenden sechs Bewegungsgleichungen in in diejenigen für zwei gegeneinander gravitierende Massenpunkte über. Der Druck, den das ponderable Atom α von α_1 aus erfährt,

$$\frac{\partial U}{\partial R} = -\frac{m m_1}{R^2} k,$$

ist jedoch nicht der Geschwindigkeit e der Stoffbewegung in α, sondern dem Bewegungsmoment $\mathfrak{q}$ an dieser Stelle proportional, und demnach erscheint das Fragezeichen, das Riemann an der oben (Art. 3) zitierten Stelle seiner eigenen Bemerkung beisetzt, wohl berechtigt.

Tübingen, den 3. Januar 1904.

Die Beweise der ebenen Geometrie ohne Benutzung der Gleichheit und Ungleichheit der Winkel.

Von

J. Mollerup in Kopenhagen.

In meiner Dissertation: Studier over den plane Geometris Aksiomer, København 1903, habe ich ein System von Kongruenzaxiomen aufgestellt, in welchem die Kongruenz der Winkel nicht benutzt wird. Diese Axiome sind erstens die drei Hilbertschen III, 1, 2, 3 (Grundlagen der Geometrie); hierauf setze ich folgende *Definition* fest:

Die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ sind kongruent, wenn

$$AB \equiv A_1B_1, \quad AC \equiv A_1C_1, \quad BC \equiv B_1C_1.$$

Die drei Hilbertschen Axiome III, 4, 5, 6 werden nun durch die folgenden zwei ersetzt:

4. Es sei ein Dreieck ABC und eine Strecke $A_1C_1 \equiv AC$ gegeben; dann gibt es zwei und nur zwei Punkte B_1 und B_1', so daß

$$\Delta A_1B_1C_1 \equiv \Delta ABC \quad \text{und} \quad \Delta A_1B_1'C_1 \equiv \Delta ABC.$$

5. (Ax. V, Veroneses in „Grundzüge der Geometrie“, übersetzt von A. Schepp).

Es sei $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$; man trägt die paarweise kongruenten Strecken AD und A_1D_1 auf AB und A_1B_1 (oder A_1C_1) und AE und A_1E_1 auf AC und A_1C_1 (oder A_1B_1) ab; dann ist immer $DE \equiv D_1E_1$.

Ich werde nun zeigen, wie man mit Hilfe der Axiome: I, 1, 2, 3, II, 1, 2, 3, 4 (Grundlagen der Geometrie), der eben genannten fünf Kongruenzaxiome und endlich des Parallelenaxioms die ebene Geometrie *ohne Winkelkongruenz zu benutzen*, aufbauen kann. Vorläufig wird das Parallelenaxiom nicht vorausgesetzt.

Mit Zuhilfenahme der Axiome I, 1, 2 und II, 1, 2, 3, 4 leuchtet unmittelbar folgender Hilfssatz ein:

Die Ebene wird von jedem Dreiecke in acht Gebiete zerteilt: die Punkte der Seiten, das Innere, drei äußere Seitengebiete und drei äußere Winkelgebiete.

Nunmehr beweisen wir der Reihe nach folgende Sätze:

Satz 1. Die zwei Punkte B_1 und B_1' des Axioms 4 liegen auf verschiedenen Seiten von A_1C_1.

Es seien $A_1B_1C_1$ und $A_1B_1'C_1$ zwei Dreiecke auf ein und derselben Seite von A_1C_1 und seien sie beide mit ΔABC kongruent; nehmen wir weiter an, daß B_1' in dem äußeren Seitengebiete des A_1B_1 liegt (Fig. 1),

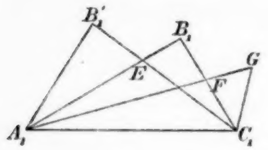


Fig. 1.

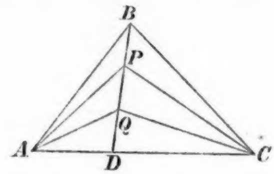


Fig. 1a.

so daß C_1B_1' A_1B_1 in E schneidet. Tragen wir nun $C_1F \equiv C_1E$ auf C_1B_1 ab, dann ist $\Delta A_1EC_1 \equiv \Delta A_1FC_1$ (Ax. 5); also ist

$$A_1F \equiv A_1E < A_1B_1.$$

Wird nun A_1F nach G verlängert, so daß $A_1G \equiv A_1B_1$, dann ist $\Delta A_1GC_1 \equiv \Delta A_1B_1C_1$, was mit Axiom 4 in Widerspruch steht.

Derselbe Beweis gilt, wenn B_1' ins Innere des Dreiecks $A_1B_1C_1$ fällt; es ist also bewiesen, daß zwei Dreiecke nicht kongruent sein können, wenn sie eine Seite gemein haben und eine Ecke des einen Dreiecks ins Innere des anderen fällt. B_1' liegt dann nicht in dem äußeren Winkelgebiete von B_1. Wenn B_1' im äußeren Seitengebiete von BC liegt, dann schneidet A_1B_1' B_1C_1, und der Beweis bleibt wie früher. Andere Gebiete als die eben betrachteten gibt es auf derselben Seite von A_1C_1 als B_1 nicht.

Satz 2. In einem Dreiecke ist eine Seite der Summe der zwei andern nicht gleich.

Sei das Dreieck ABC und sei D ein Punkt der Seite AC, so daß $AB \equiv AD$ und $CB \equiv CD$. Auf BD trägt man die Punkte P und Q ab, so daß $BP \equiv DQ$; wenn nun $\Delta ABD \equiv \Delta ADB$, so ist nach Axiom 5 $AP \equiv AQ$; ebenso ist $CP \equiv CQ$. Es wäre dann $\Delta APC \equiv \Delta AQC$, was unmöglich ist (1).

Satz 3. Eine Strecke hat immer eine Mitte.

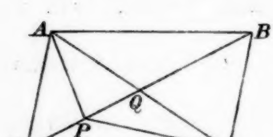


Fig. 2.

(Fig. 2). Sei die Strecke BD, und seien A und C zwei Punkte auf verschiedenen Seiten der Geraden BD, so daß $\Delta CBD \equiv \Delta ADB$ (Ax. 4). AC schneidet BD im Punkte Q. Es sei nun $BQ < DQ$; man trägt $DP \equiv BQ$ auf DQ ab. Aus $DP \equiv BQ$ und $PQ \equiv QP$ entnehmen wir $DQ \equiv BP$

(Axiom III, 3). Wenn $\Delta ABD \equiv \Delta CDB$, $DC \equiv BA$ und $DP \equiv BQ$, so ist $AQ \equiv CP$ (Ax. 5); ebenso ist $AP \equiv CQ$. Wenn man diese Gleichungen addiert, bekommt man (Ax. III, 3), $AC \equiv AP + CP$, was unmöglich ist (2). Also ist Q die Mitte von BD.

Definition. Es sei ΔABC gegeben, auf der Verlängerung von AC wird ein Punkt A_1 bestimmt, so daß $CA_1 \equiv AC$; ΔA_1BC wird dann *Nebendreieck* des Dreiecks ABC genannt. *Wenn die zwei Dreiecke kongruent ausfallen, wird das gegebene Dreieck rechtwinklig bei C genannt; AB ist die Hypotenuse, AC und BC sind die Katheten.*

Satz 4. Wenn zwei Dreiecke kongruent sind, dann fallen ihre entsprechenden Nebendreiecke auch kongruent aus.

Die kongruenten Dreiecke seien ABC und $A_1B_1C_1$, ihre entsprechenden Nebendreiecke ABD und $A_1B_1D_1$. Aus $AC \equiv A_1C_1$ und $DA = D_1A_1$ entnehmen wir bei Addition $DC \equiv D_1C_1$; hieraus folgt aber $BD = B_1D_1$ (Ax. 5), und die Dreiecke ABD und $A_1B_1D_1$ sind dann kongruent.

Folgerung. Ein Dreieck, welches einem rechtwinkligen Dreiecke kongruent ausfällt, ist selbst rechtwinklig.

Satz 5. Es gibt rechtwinklige Dreiecke.

Denn verbinden wir die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Mitte der Grundlinie, so wird das Dreieck in zwei kongruente Nebendreiecke zerlegt.

Die Sätze:

Wenn ΔABC rechtwinklig bei C ist, dann ist auch ΔAB_1C rechtwinklig bei C, wenn B_1 ein beliebiger Punkt der Halbgeraden CB ist, und

wenn ΔABC rechtwinklig bei C ist, dann ist auch ΔA_1BC rechtwinklig bei C, wenn A_1 ein beliebiger Punkt der Halbgeraden CA ist,

werden unmittelbar durch Ax. 5 bewiesen.

Hieraus folgt:

Satz 6. Wenn ΔABC rechtwinklig bei C ist, dann ist auch ΔA_1B_1C rechtwinklig bei C, wenn A_1 ein beliebiger Punkt der Halbgeraden CA und B_1 ein beliebiger Punkt der Halbgeraden CB ist.

Satz 7. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn die Katheten einander paarweise kongruent sind.

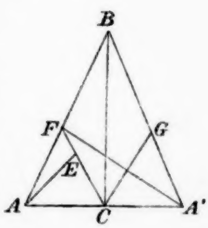


Fig. 3.

Seien die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$, die rechtwinklig bei C und C_1 sind, $AC \equiv A_1C_1$, $BC \equiv B_1C_1$. Sei E ein Punkt auf derselben Seite von AC als B, so daß $\Delta ACE \equiv \Delta A_1C_1B_1$; sei weiter $A'CB$ das Nebendreieck von ACB bei BC. Die Gerade CE wird AB oder $A'B$, zum Beispiel AB in F schneiden; wird nun $BG \equiv BF$ auf BA' abgetragen,

so ist $AF \equiv A'G$ (Ax. III, 3) und deshalb $\Delta ACF \equiv \Delta A'CG$ (Ax. 5). Es ist aber auch $\Delta ACF \equiv \Delta A'CF$ (6), also $\Delta A'CG \equiv \Delta A'CF$, was unmöglich ist (1). Der Punkt E fällt also mit B zusammen.

Folgerung. Satz 6 gilt nun auch, wenn A_1 und B_1 beliebige Punkte der Geraden CA und CB sind.

Die vorstehenden Sätze erlauben die folgende

Definition. Die Gerade l ist senkrecht auf die sie im Punkte A schneidende Gerade m, wenn die Strecken DC und DB von einem beliebigen Punkte D in l zu den Punkten C und B in m, die auf verschiedenen Seiten und in gleichem Abstande von A liegen, gleich sind.

Satz 8. Wenn l senkrecht auf m ist, dann ist auch m senkrecht auf l (7, Folgerung).

Satz 9a. In einem gegebenen Punkte einer Geraden gibt es nur eine senkrechte Gerade.

Seien AD und BD zwei Lote (Senkrechte) auf EC im Punkte D; $DE \equiv DC$; $DA \equiv DB$. Es ist dann $EA \equiv CA$ und $EB \equiv CB$, aber auch $EA \equiv EB$ (7). Es sollte dann $\Delta AEC \equiv \Delta BEC$ sein, was mit dem Satze 1 in Widerspruch steht.

Satz 9b. Von einem gegebenen Punkte außerhalb einer Geraden gibt es nur ein Lot auf die Gerade.

Der Beweis wird ganz einfach aus 9a hergeleitet.

Nun wird auch das Axiom der Parallelen (IV, Grundlagen der Geometrie) *vorausgesetzt.*

Definition. Ein Viereck, worin je zwei gegenüberstehende Seiten einander parallel sind, wird *Parallelogramm* genannt.

Satz 10. Jedes Viereck, worin je zwei gegenüberstehende Seiten einander gleich sind, ist ein Parallelogramm.

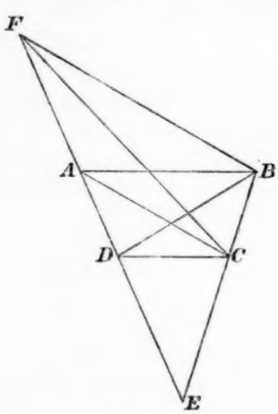


Fig. 4.

Sei das Viereck $ABCD$ (Fig. 4),

$$AB \equiv DC, \quad AD \equiv BC;$$

mögen weiter die Verlängerungen von AD und BC einander im Punkte E schneiden; sei DA bis zum Punkte F verlängert, so daß

$$DF \equiv BE.$$

Wenn

$$\Delta ABC \equiv \Delta CDA, \; BA \equiv DC, \; BE \equiv DF,$$

dann ist

$$AE \equiv CF \text{ (Ax. 5)};$$

wenn

$$\Delta DBC \equiv \Delta BDA, \; BD \equiv DB, \; BE \equiv DF,$$

dann ist

$$DE \equiv BF \text{ (Ax. 5)}.$$

Wenn man nun subtrahiert, bekommt man

$$AD \equiv CF - BF$$

oder

$$BC + BF \equiv CF,$$

was unmöglich ist (2).

Also sind *je* zwei Gegenseiten einander parallel.

Satz 11. In jedem Viereck, in welchem je zwei Gegenseiten einander gleich sind, halbieren sich die beiden Diagonalen gegenseitig (3).

Satz 12. Jedes Viereck, in welchem sich die Diagonalen gegenseitig halbieren, ist ein Parallelogramm.

Das Viereck sei $ABCD$, die Diagonalen schneiden sich im Punkte O; die Dreiecke OBC und ODA sind beide Nebendreiecke des Dreiecks OCD, aber an verschiedenen Seiten. Wir werden beweisen, daß sie kongruent sind (Erweiterung des Satzes 4). Auf OC wird D' und auf OD C' abgetragen, so daß

$$OD' \equiv OD \quad \text{und} \quad OC' \equiv OC;$$

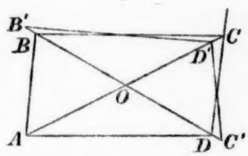


Fig. 5.

$OB'D'$ ist Nebendreieck des Dreiecks $OC'D'$. Es ist nun: $\Delta OC'D' \equiv \Delta OCD$ (Axiom 5); $\Delta OB'D' \equiv \Delta OBC$ (Ax. 5); $\Delta OB'D' \equiv \Delta OAD$ (4); also ist $B'D' \equiv BC \equiv AD$ und $\Delta OAD \equiv \Delta OBC$. Ebenso ist $AB \equiv DC$, und also ist das Viereck ein Parallelogramm (10).

Satz 13. In jedem Parallelogramme halbieren sich die beiden Diagonalen gegenseitig.

Sei $ABCD$ ein Parallelogramm, dessen Diagonalen sich im Punkte O schneiden; sei M die Mitte von BD und sei AM bis E verlängert, so daß $AM \equiv ME$. DE ist dann mit AB parallel (12), und E fällt also in die Gerade DC (Ax. III). Ebenso ist dann BE mit AD parallel, was mit demselben Axiom in Widerspruch steht.

Satz 14. In jedem Parallelogramme sind je zwei gegenüberstehende Seiten einander gleich (13, 12).

Satz 15. Verbindet man die Mitten der zwei Seiten eines Dreiecks durch eine Strecke, so ist diese der dritten Seite parallel und der Hälfte derselben gleich.

Wird ohne Schwierigkeit mittels der vorherstehenden Sätze bewiesen.

Satz 16. Eine Gerade, die auf einer von zwei parallelen Geraden senkrecht ist, ist auch auf der anderen senkrecht.

Seien die parallelen Geraden BC und AD und sei weiter BA auf BC senkrecht; BA wird bis P verlängert, so daß $PA \equiv AB$. PC schneidet AD im Punkte D; ΔPBC_1 ist Nebendreieck des Dreiecks PBC;

PC_1 schneidet AD im Punkte D_1. Es ist nun $AD \equiv \frac{1}{2}BC$ (15); $BC \equiv BC_1$; $AD_1 \equiv \frac{1}{2}BC_1$ (15); also ist $AD \equiv AD_1$. Weiter ist: $PD \equiv \frac{1}{2}PC$; $PD_1 \equiv \frac{1}{2}PC_1$; $PC \equiv PC_1$, also ist $PD \equiv PD_1$. Dann ist aber PB auf AD senkrecht.

Folgerung. Zwei Geraden, die je auf ihrer von zwei parallelen Geraden senkrecht sind, sind parallel.

Hieraus entnehmen wir ohne Schwierigkeit

Satz 17. Die drei Perpendikel, die man in den Halbierungspunkten der Seiten eines Dreiecks errichten kann, schneiden sich in einem Punkte.

Satz 18. Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

Wird wie gewöhnlich aus dem Satze 17 ermittelt.

Definition. Sei (a, b) ein Winkelraum von den Halbgeraden a und b gebildet; sei a_1 die entgegengesetzte Halbgerade zu a; der gemeinsame Scheitel der drei Halbgeraden sei O. d ist eine Halbgerade senkrecht auf a im Punkte O; b und d liegen auf ein und derselben Seite von a. *Fällt nun d in den Winkelraum (a_1, b), so wird dieser stumpf genannt, während der Winkelraum (ab) ein spitzer ist.*

Satz 19. In einem gleichschenkeligen Dreiecke sind die Winkelräume an der Grundlinie spitz.

Sei das Dreieck ABC mit dem Scheitel A; nehmen wir an, daß CC_1 die Senkrechte auf BC im Punkte C ist und daß sie die Strecke AB im Punkte C_1 schneidet; auf CA wird $CB_1 \equiv BC_1$ abgetragen. BB_1 und CC_1 schneiden sich im Punkte O. Nach Ax. 5 sind die Dreiecke CBB_1 und BCC_1 einander kongruent, also ist das Dreieck CBB_1 rechtwinklig bei B (4, Folgerung). Dieses ist aber unmöglich (9b).

Satz 20. Wenn der Winkelraum (ab) spitz (oder stumpf) ist, dann ist der Winkelraum (ba) ebenso spitz (oder stumpf).

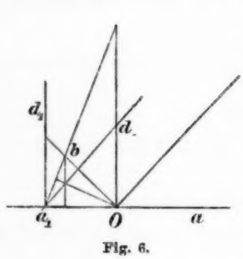


Fig. 6.

Seien a und a_1 zwei entgegengesetzte Halbgeraden und O der gemeinsame Endpunkt der drei Halbgeraden a, a_1 und b; sei weiter d die Senkrechte auf a im Punkte O. Sie fällt in den Winkelraum (ab), der also ein stumpfer ist. Es werden die kongruenten Strecken Oa_1 und Ob auf a_1 und b abgetragen; die Senkrechte d_1 auf Oa_1 im Punkte a_1 fällt außerhalb des Dreiecks Oa_1b (19) und ist mit d parallel (16). Die Verlängerung von a_1b schneidet dann d. Eine Höhe des Dreiecks Oa_1b verbindet O mit der Mitte von a_1b; sie fällt also ins Innere des Dreiecks; die Höhe von b ist mit d und d_1 parallel, fällt also auch ins Innere des Dreiecks. Diese zwei Höhen schneiden sich

dann in einem Punkte P im Innern des Dreiecks. $a_1 P$ ist nun die dritte Höhe (18); sie schneidet Ob in einem Punkte, die Senkrechte auf Ob im Punkte O ist mit dieser Höhe parallel und fällt also in den Winkelraum ad. Der Satz ist nun in einer erweiterten Fassung bewiesen.

Satz 21. Unter allen Strecken, die man nach einer gegebenen Geraden von einem außerhalb derselben liegenden Punkte ziehen kann, ist die senkrechte die kürzeste.

Die Gerade sei NM, der Punkt P; wir nehmen an, daß die senkrechte PM größer als PN ist und tragen $PQ \equiv PN$ auf PM ab; PO ist mit NM parallel und also auf PM senkrecht. PM' ist die Verlängerung von MP. Im Winkelraum OM' gibt es eine Parallele zu NQ; denn jede Gerade durch P im Winkelraume OM schneidet NQ. Der Winkelraum MPR ist stumpf, denn er enthält PO; die Senkrechte auf PR im Punkte P fällt dann in den Winkelraum OPM (20). Dieses ist aber unmöglich, denn die Gerade, die P mit der Mitte von NQ verbindet, ist auf NQ und deshalb auch auf PR senkrecht. Also ist PM nicht größer als PN.

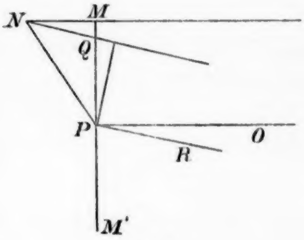


Fig. 7.

PM ist auch nicht gleich PN; denn alsdann könnte man noch eine Senkrechte von P nach der Geraden NM ziehen, nämlich nach der Mitte der Strecke NM.

Dieser Beweis findet sich in: *Elementi di Geometria* von *Veronese* (Parte I, pag. 51); er stützt sich aber dort auf die Vorstellung von gleichen und ungleichen Winkeln, welche hier nicht zu Hilfe genommen ist.

Satz 22. In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite.

Sei BC die größte Seite des Dreiecks ABC; auf BC wird $BD \equiv BA$ abgetragen. Die Senkrechte auf BC im Punkte D wird die Strecke AC im Punkte E schneiden (19). Es ist nun $CD < CE < CA$ (21).

Folgerung. Wir können nun ohne Schwierigkeit die gewöhnlichen Sätze über die Gleichheit und Ungleichheit von den Strecken, die einen Punkt und eine Gerade verbinden, herleiten.

Die Lehre von den Proportionen.

Wie in meiner Abhandlung: *Die Lehre von den geometrischen Proportionen* (diese Annalen Bd. 56, pag. 277) stellen wir die folgende *Definition* auf:

Auf dem einen Schenkel eines rechten Winkels O (ich erlaube mir diese Ausdrucksweise zu benutzen) werden die Punkte A und B, auf dem anderen C und D abgetragen; AC ist parallel zu BD. Diese Lage der vier Strecken OA, OB, OC und OD wird durch die Gleichung

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$$

ausgedrückt. Die Gleichung wird eine Proportion genannt. Man kann auch schreiben

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC}$$

oder

$$\frac{OC}{OD} = \frac{OA}{OB} \quad \text{(Ax. 5)}.$$

Es ist einleuchtend, daß drei von den Gliedern der Proportionen das vierte eindeutig bestimmen.

Satz 23. Wenn DE eine Transversale parallel zu der Kathete OC im rechtwinkligen Dreiecke OAC (rechtwinklig bei O) ist, dann ist

$$\frac{AD}{AO} = \frac{DE}{OC}.$$

Sei EF auf OC im Punkte F senkrecht, FG zu CA parallel, und sei G der Schnittpunkt der Geraden FG und OA. Es ist dann $OG \equiv DA$; denn trägt man $OH \equiv DA$ auf OA ab, dann ist $\Delta OHF \equiv \Delta DAE$ (7); es ist dann auch $FH \equiv EA \equiv FG$ (14). Also fällt H in den Punkt G (22, Folgerung). Nach der Definition ist nun

$$\frac{OG}{OA} = \frac{OF}{OC}$$

oder

$$\frac{AD}{AO} = \frac{DE}{OC}.$$

Satz 24. Wenn das Dreieck AOC rechtwinklig bei O, und DE eine Transversale zwischen AO und AC ist, die senkrecht auf die letztere gezogen ist, dann ist

$$\frac{AE}{AO} = \frac{DE}{OC}.$$

Tragen wir $AF \equiv AE$ auf AO und $AG \equiv AD$ auf AC ab, dann sind die Dreiecke AFG und AED einander kongruent; mithin ist FG auf OA senkrecht (4, Folgerung). Es ist nun

$$\frac{AF}{AO} = \frac{FG}{OC} \quad (23)$$

oder

$$\frac{AE}{AO} = \frac{DE}{OC}.$$

Satz 25. Wenn

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

und

$$\frac{a}{e} = \frac{c}{f},$$

dann ist auch

$$\frac{b}{e} = \frac{d}{f} \quad \text{(Ax. III)}.$$

Satz 26. (Das kommutative Gesetz.) Wenn die Proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

gilt, hat man auch

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Sei $B\beta$ auf AC im Punkte β senkrecht, $\beta A \equiv a$, $\beta B \equiv b$; auf βB wird $\beta O \equiv c$ abgetragen. Es ist nun ein Dreieck ABC bestimmt, worin O der Höhenschnittpunkt ist; die Höhen sind $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$. In den rechtwinkligen Dreiecken $A\beta O$ und $B\alpha O$ sind die Katheten proportional. Zum Beweise tragen wir $OB' \equiv OB$ auf $O\alpha$ und $O\alpha' \equiv O\alpha$ auf OB ab; es sind dann die Dreiecke $OB'\alpha'$ und $OB\alpha$ einander kongruent (Ax. 5); $B'\alpha'$ ist deshalb auf βB im Punkte α' senkrecht und also auch mit AC parallel. Wir beweisen nun ohne Schwierigkeit, daß

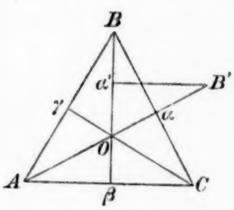


Fig. 8.

$$\frac{O\alpha'}{O\beta} = \frac{B'\alpha'}{A\beta} \quad (12, 14)$$

oder

$$\frac{O\alpha}{O\beta} = \frac{B\alpha}{A\beta}.$$

Weiter ist

$$\frac{O\alpha}{C\beta} = \frac{B\alpha}{B\beta} \quad (24).$$

Aus diesen zwei Proportionen entnehmen wir

$$\frac{B\beta}{A\beta} = \frac{C\beta}{O\beta};$$

diese Proportion zeigt, daß die Katheten der Dreiecke $B\beta C$ und $A\beta O$

proportional sind, und auch, daß $C\beta$ gleich d ist. Ebenso sind die Katheten der Dreiecke $B\beta A$ und $C\beta O$ proportional und also

$$\frac{B\beta}{C\beta} = \frac{A\beta}{O\beta}$$

oder

$$\frac{b}{d} = \frac{a}{c},$$

was zu beweisen war.

Satz 27. Wenn

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

und

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{f},$$

dann ist

$$\frac{c}{d} = \frac{e}{f}.$$

Satz 28. (Das distributive Gesetz.) Wenn

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

dann ist

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

Satz 29. Wenn

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

dann ist

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Die Sätze 27, 28 und 29 sind in der oben zitierten Abhandlung bewiesen.

Definition. Sei A der Scheitel des gleichschenkligen Dreiecks ABC; P ist ein beliebiger Punkt in der Höhe von A oder ihrer Verlängerung, PQ und PR sind die Lote von P aus auf die Schenkel AB und AC. Es ist dann $PR \equiv PQ$; denn trägt man auf die Gerade AC AR_1 gleich AQ ab, dann sind die Dreiecke APR_1 und APQ einander kongruent (Ax. 5) und deshalb PR_1 auf AC senkrecht. Es fällt dann R_1 in den Punkt R (9b), und also ist $PQ \equiv PR$. *AP wird die Winkelhalbierende der Halbgeraden AB und AC genannt*, und es leuchtet ein, daß zwei Halbgeraden nur eine Winkelhalbierende haben.

Folgerung. Die Seiten eines Dreiecks bestimmen drei Winkelhalbierende, die sich in einem Punkte O schneiden, der von allen drei Seiten denselben Abstand hat. Ist das Dreieck ABC und sind die Abstände von BC, CA und AB $O\alpha$, $O\beta$ und $O\gamma$, dann ist $C\alpha \equiv C\beta$, $A\beta \equiv A\gamma$, $B\gamma \equiv B\alpha$

Definition. *Die Dreiecke AB_1C_1 und ABC sind in Bezug auf A in ähnlicher Lage, wenn B_1 auf der Geraden AB und C_1 auf AC liegt und B_1C_1 parallel zu BC ist.*

Hilfssatz. Wenn zwei Dreiecke in ähnlicher Lage sind, dann sind die entsprechenden Winkelhalbierenden parallel.

Seien die Dreiecke ABC und AB_1C_1; die Winkelhalbierende der Geraden AB und AC schneidet B_1C_1 und BC in den Punkten D und E. Die Strecke DF parallel zu AB schneidet BC im Punkte F, die Strecke FG parallel zu AD schneidet AB im Punkte G; es sind dann die Dreiecke AB_1D und GBF einander kongruent. B_1H ist die Winkelhalbierende der Halbgeraden B_1A und B_1C_1, die AD im Punkte H schneidet, der in gleichen Abständen HJ und HK von AB_1 und B_1C_1 entfernt ist. Die Strecke HI parallel zu AB schneidet FG im Punkte I, und es sind die Dreiecke BIG und B_1HA, ebenso die Dreiecke BIF und B_1HD einander kongruent. Auf BA wird $BM \equiv B_1J$ abgetragen, und es sind nach Ax. 5 die Dreiecke BIM und B_1HJ einander kongruent; IM ist also auf AB senkrecht und HJ kongruent. Ebenso wird IL senkrecht auf BC und mit HK kongruent bestimmt. Also ist $IM \equiv IL$, BI ist die Winkelhalbierende der Halbgeraden BA und BC und mit B_1H parallel.

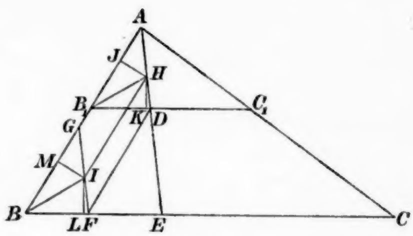


Fig. 9.

Definition. *Die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ sind ähnlich, wenn es ein Dreieck $AB'C'$ gibt, welches in ähnlicher Lage mit dem Dreiecke ABC und dem Dreiecke $A_1B_1C_1$ kongruent ist.*

Satz 30. In zwei ähnlichen Dreiecken sind die entsprechenden Seiten proportional.

Der Beweis ist in der oben zitierten Abhandlung zu finden und ist, wie ich auch dort bemerkt habe, nur in der Form von dem Hilbertschen zum Satze 22, Grundlagen der Geometrie, verschieden.

Satz 31. (Das assoziative Gesetz.) Wenn

(1) $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

und

(2) $$\frac{a}{e} = \frac{f}{d},$$

dann ist auch $$\frac{b}{e} = \frac{f}{c}.$$

Aus der Proportion

$$\frac{b}{m} = \frac{e}{d}, \tag{3}$$

wird m bestimmt. Aus (2) entnehmen wir

$$\frac{a}{f} = \frac{e}{d},$$

also

$$\frac{b}{m} = \frac{a}{f}. \tag{4}$$

Setzt man nun

$$\frac{b}{e} = \frac{x}{c}, \tag{5}$$

dann ist

$$\frac{x}{c} = \frac{m}{d}$$

(mittelst (3) und (5)).

Es ist dann

$$\frac{x}{m} = \frac{c}{d}. \tag{6}$$

Aus (1) und (6) bekommt man

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{m},$$

und aus (4)

$$\frac{a}{b} = \frac{f}{m}.$$

Die zwei letzteren Proportionen zeigen, daß $x = f$; (5) wird dann als

$$\frac{b}{e} = \frac{f}{c}$$

geschrieben, was zu beweisen war.

Diese formelle Herleitung des assoziativen Gesetzes durch die anderen Sätze der Proportionenlehre rührt von A. Kneser her (Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 1. Jahrgang 1. Stück 1902). Hiermit ist der Pascalsche Satz bewiesen.

Verhältnisrechnung.

Die nachfolgenden Definitionen und Beweise der Sätze sind in meiner Dissertation pag. 63—71 zu finden.

Wir geben einem Verhältnis $\frac{a}{b}$ einen andern Nenner c, indem wir $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$ setzen; aus dieser Proportion wird x bestimmt.

Definition: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$; $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{x}{b} = \frac{a+x}{b}$,

wo x aus der Proportion

$$\frac{c}{d} = \frac{x}{b}$$

bestimmt wird.

Satz 32. Addition ist eindeutig d. h.: Wenn

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{n}$$

und

$$\frac{c}{b} = \frac{y}{n},$$

dann ist

$$\frac{a+c}{b} = \frac{x+y}{n}.$$

Satz 33. Subtraktion ist eindeutig d. h.: Wenn

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{e}{f},$$

dann bestimmt diese Gleichung $\frac{c}{d}$ eindeutig (die Gleichung hat nicht mehr als eine Lösung).

Definition. Wir wählen zunächst eine beliebige Strecke, die für die ganze Betrachtung die nämliche bleibt, und bezeichnen dieselbe mit 1. Nunmehr definieren wir:

$$\frac{a}{1} \cdot \frac{1}{d} = \frac{a}{d}$$

und zunächst

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{x}{1} \cdot \frac{1}{y},$$

indem wir

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{1}$$

und

$$\frac{c}{d} = \frac{1}{y}$$

setzen.

Satz 34. Multiplikation ist eindeutig.

Satz 35. Division ist eindeutig d. h.: Aus der Gleichung

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = \frac{c}{d}$$

wird x eindeutig bestimmt.

Satz 36. Addition und Multiplikation sind kommutativ.

Satz 37. Addition und Multiplikation sind assoziativ.

Satz 38. Multiplikation ist distributiv.

Definition. $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ oder $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ bedeutet, daß wenn

$$\frac{a}{b} = \frac{c_1}{d},$$

dann ist

$$c < c_1.$$

Satz 39. Wenn $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, und $\frac{c}{d} > \frac{e}{f}$, dann ist auch $\frac{a}{b} > \frac{e}{f}$;

wenn $\frac{a}{b} \gtrless \frac{c}{d}$, dann ist $\frac{a}{b} + \frac{e}{f} \gtrless \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$;

wenn $\frac{a}{b} \gtrless \frac{c}{d}$, dann ist $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \gtrless \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$;

wenn $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, dann ist $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$.

Satz 40. Der Archimedische Satz: Wenn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, so ist es stets möglich eine ganze, positive Zahl n zu bestimmen, so daß

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \cdots + \frac{a}{b}\ (n \text{ Mal}) > \frac{c}{d},$$

kann durch die aufgestellten Axiome nicht bewiesen werden.

Folgerung. Indem wir eine von Hilbert (Grundlagen der Geometrie § 13) eingeführte Redeweise benutzen, können wir sagen: Die Verhältnisse bilden ein reelles, Nichtarchimedisches Zahlensystem. Diese Verhältnisse sind die Zahlen der sogenannten Nichtarchimedischen Geometrie. Hierzu gehört ein Teil der Zahlen der Arithmetik, nämlich die rationalen und solche irrationale Zahlen, die nur Quadratwurzeln enthalten, wo eine n faltige Quadratwurzel 2^n reelle Werte hat (Hilbert: Grundlagen der Geometrie Satz 44).

Definition. Wir setzen $\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{r}{s}$, wenn

$$\frac{p}{q} = \left(\frac{r}{s}\right)^2 = \frac{r}{s} \cdot \frac{r}{s}.$$

Satz 41. $\sqrt{\frac{p}{q}}$ kann nur bestimmt werden, wenn man die mittlere Proportionale zwischen p und q bestimmen kann.

Dieses ist im allgemeinen nicht der Fall (Hilbert: Grundlagen der Geometrie Satz 44).

Definition. Die Proportion $\frac{a}{b} = \frac{x}{m}$ bestimmt eindeutig die Strecke x, wir schreiben

$$x = m \cdot \frac{a}{b} = \frac{ma}{b}.$$

Satz 42. $\frac{ma}{b} = \frac{am}{b}$.

Satz 43. Wenn $m \cdot \frac{a}{b} = m \cdot \frac{c}{d}$, dann ist auch

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Von dem Projektionsparameter zweier Halbgeraden.

Definition. Seien L und M zwei beliebige Halbgeraden mit dem gemeinsamen Endpunkt O; *unter dem Projektionsparameter* M_L *verstehen wir ein Verhältnis* $\frac{OA_1}{OA}$, *dessen Nenner eine beliebige Strecke* OA, *auf* M *abgetragen, und dessen Zähler die Projektion* OA_1 *dieser Strecke auf* L *ist; fällt* A_1 *auf* L, *so ist der Projektionsparameter positiv; fällt* A_1 *auf die entgegengesetzte Halbgerade, so ist der Parameter negativ.* Die Proportionenlehre zeigt, daß die Strecke OA von einer andern beliebigen Strecke ersetzt werden kann.

Satz 44. Wenn L und M einen spitzen Winkelraum bilden, ist M_L positiv; wenn L und M einen stumpfen Winkelraum bilden, ist M_L negativ; wenn L und M aufeinander senkrecht sind, setzen wir $M_L = 0$.

Satz 45. $L_M = M_L$.

Dieser Satz wird sogleich durch Ax. 5 bewiesen.

Satz 46. Wenn L und L' zwei parallele Halbgeraden auf derselben Seite von M sind, dann ist $L_M = L'_M$; wenn L und L' auf verschiedenen Seiten von M sind, dann ist $L_M = -L'_M$.

Satz 47. (Der Pythagoräische Lehrsatz.)

Seien M und P zwei aufeinander senkrechte Halbgeraden; sei weiter L eine beliebige Halbgerade; es ist dann immer

$$L_M^2 + L_P^2 = 1.$$

Wir können immer voraussetzen, daß L durch den gemeinsamen Endpunkt O von M und P geht (46). Wir wählen auf L einen Punkt A, der auf M in einen Punkt A_1 projiziert wird, welcher wieder auf L im Punkte A_2 projiziert wird. Sei M' die entgegengesetzte Halbgerade von M, und nehmen wir an, daß L in den Winkelraum MP oder $M'P$ fällt. In beiden Fällen ist $OA = OA_2 + A_2A$; im ersten Fall ist

$$OA_2 = OA_1 L_M = OA \cdot L_M^2;$$

im zweiten Fall ist

$$OA_2 = OA_1(-L_M) = OA \cdot L_M^2;$$

in beiden Fällen ist

$$A_2A = A_1A \cdot L_Q = OA \cdot L_Q^2,$$

wenn Q die Halbgerade A_1A parallel zu P ist. Hieraus entnehmen wir

$$1 = L_M^2 + L_Q^2$$

oder

$$1 = L_M^2 + L_P^2.$$

Der Parameter zweier Halbgeraden ändert nur das Vorzeichen, wenn die eine durch die entgegengesetzte ersetzt wird; wir haben also nicht nötig, mehrere Lagen von L in Betracht zu nehmen.

Definition. Im Dreiecke ABC werden die Seiten AB, BC und CA c, a und b genannt. Die Parameter a_b, b_c und c_a sind dann die Parameter der Halbgeraden CA und CB, AC und AB, BA und BC.

Satz 48. In einem Dreiecke mit den Seiten a, b und c, ist immer

$$a_b^2 + b_c^2 + c_a^2 + 2a_b b_c c_a = 1.$$

Von B aus fällen wir das Lot BD auf AC; D fällt entweder auf die Strecke AC oder auf eine ihrer Verlängerungen. In allen Fällen ist

$$b = c \cdot c_b + a \cdot a_b,$$

ebenso

$$a = b \cdot b_a + c \cdot c_a$$

und

$$c = a \cdot a_c + b \cdot b_c.$$

Aus diesen Gleichungen leiten wir bei Elimination von a, b und c die gesuchte Gleichung her.

Folgerung. Diese Gleichung behält ihre Gültigkeit wenn a zum Punkte A parallel verschoben wird mit der Ausnahme, daß a_b oder a_c ihr Vorzeichen ändert. Sind also a, b und c drei Halbgeraden durch denselben Endpunkt, so ist immer

$$a_b^2 + b_c^2 + c_a^2 - 2a_b \cdot b_c \cdot c_a = 1.$$

Satz 49. In einem Dreiecke mit den Seiten a, b und c ist immer

$$1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 + 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} \cdot b_c.$$

Diese Gleichung leiten wir in gewöhnlicher Weise aus den Gleichungen

$$a \cdot a_b = b - c \cdot c_b,$$
$$a \cdot a_h = c \cdot c_h$$

durch Quadrieren und Addieren her; h ist die Höhe des Dreiecks von B.

Hilfssatz. Wenn die Mediane von A im Dreiecke ABC gleich der halben Seite BC ist, dann ist das Dreieck rechtwinklig bei A.

Sei AD die Mediane; es ist dann $AD \equiv BD \equiv CD$. Auf die Verlängerung von BA tragen wir $AB' = BA$ ab; nun ist $CB' \equiv 2DA \equiv CB$. Hiermit ist der Satz bewiesen.

Definition. Wenn M ein beliebiger Punkt ist, so heißt die Gesamtheit aller Punkte A, für welche die Strecken MA einander kongruent sind, ein Kreis; M heißt der Mittelpunkt des Kreises; MA heißt Radius. Eine Strecke, die zwei Punkte des Kreises verbindet, wird eine Sehne und wenn sie durch den Mittelpunkt geht ein Durchmesser genannt. Wenn zwei Sehnen die Endpunkte eines Durchmessers mit einem dritten Punkte des Kreises verbinden, werden sie Supplementsehnen genannt.

Satz 50. Zwei Supplementsehnen sind aufeinander senkrecht.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des obengenannten Hilfssatzes.

Satz 51. Werden von einem beliebigen Punkte eines Kreises aus gerade Strecken zu den Endpunkten einer gegebenen Sehne gezogen, dann ist der Projektionsparameter dieser Strecken mit Ausnahme des Vorzeichens völlig bestimmt.

Sei die gegebene Sehne $BC \equiv a$, der Punkt A, $AB \equiv c$, $AC \equiv b$; die Halbgerade durch A, welche den Mittelpunkt enthält, werde mit R bezeichnet. Mit demselben Buchstaben bezeichnen wir auch den Radius. Es ist

$$1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 - 2\,\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}\cdot b_c \quad (49);$$

weiter ist

$$b = 2R \cdot R_b \quad \text{und} \quad c = 2R \cdot R_c \quad (50).$$

Hieraus entnehmen wir

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{2R}{a}\right)^2 \cdot R_b^2 + \left(\frac{2R}{a}\right)^2 \cdot R_c^2 - 2\cdot\frac{2R}{a}\cdot\frac{2R}{a}\cdot R_b \cdot R_c \cdot b_c \\ &= 4\cdot\left(\frac{R}{a}\right)^2 (R_b^2 + R_c^2 - 2R_b \cdot R_c \cdot b_c); \end{aligned}$$

es ist aber

$$1 = R_b^2 + R_c^2 + b_c^2 - 2R_b \cdot R_c \cdot b_c \quad (48)$$

und also

$$1 = 4\left(\frac{R}{a}\right)^2 (1 - b_c^2).$$

Hiermit ist der Satz bewiesen.

Wir unterscheiden leicht den größeren und den kleineren von den zwei *Bogen*, die beide zu der Sehne BC gehören. Wenn A auf dem größeren dieser Bogen liegt, wird der Durchmesser von B den Kreis in einem Punkte des kleineren der zwei Bogen AC schneiden, und es sind AD und AB aufeinander senkrecht. Hierdurch sieht man, daß der Winkelraum zwischen AB und AC ein spitzer ist; b_c ist deshalb positiv. Wenn A dagegen auf dem kleineren der zwei Bogen BC liegt, wird b_c negativ.

Folgerung. Hat ein Kreisviereck die Seiten a, b, c, d, dann ist immer

$$a_b = -c_d$$

und

$$a_d = -b_c.$$

Es ist kaum notwendig zu bemerken, daß die gewöhnlichen Kongruenzsätze von Dreiecken ohne die geringste Schwierigkeit hieraus hergeleitet werden können. Ebenso gilt auch hier die Hilbertsche Lehre

von den Flächeninhalten; doch ist in meiner Darstellung diejenige Form für diese Lehre die natürliche, die ich in meiner Dissertation pag. 74—79 angegeben habe.

Hiermit habe ich also bewiesen, daß von den zwei meßbaren Größen, die man der Geometrie zu Grunde legt, nämlich „Strecke" und „Winkel", die erstere allein für den Aufbau dieser Wissenschaft ausreicht. An die Stelle des Winkels tritt hier der Projektionsparameter zweier Geraden, der durch ein Verhältnis zweier Strecken ausgedrückt ist. Dieses Verhältnis ist durch zwei Strecken bestimmt.

Kopenhagen, Oktober 1903.

Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen*).

Von

Otto Blumenthal in Göttingen.

(Zweite Hälfte.)

Vorbemerkungen. Die Weierstraßschen Sätze.

Eine eindeutige Funktion von n Veränderlichen $x, x', \cdots, x^{(n-1)}$ heißt um einen Punkt $(a, a', \cdots, a^{(n-1)})$ herum *analytisch*, wenn sie sich in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-a, \cdots, x^{(n-1)}-a^{(n-1)})$ entwickeln läßt. Sie hat an der Stelle $(a, a', \cdots, a^{(n-1)})$ einen *Pol*, wenn sie sich in der Umgebung des Punktes als Quotient zweier Potenzreihen, $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{Q}}$, darstellen läßt**). Alle übrigen Stellen sind wesentliche Singularitäten. Eine Funktion *verhält sich* innerhalb eines $(2n)$-dimensionalen Gebietes *wie eine rationale Funktion*, wenn sie innerhalb und auf dem Rande dieses Gebietes bis auf Pole analytisch ist.

Wir wollen diese allgemeinen Sätze auf die Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen anwenden. Den Fundamentalbereich dieser Funktionen bezeichnen wir mit D. Er hat einen einzigen Punkt im Unendlichen und ist einfach zusammenhängend.

Wir haben in Teil II dieser Arbeit gesehen***), daß es n voneinander unabhängige Funktionen $\chi_1, \cdots, \chi_n$ der n Variabelen $x, \cdots, x^{(n-1)}$ gibt, welche folgende Eigenschaften besitzen:

*) Die erste Hälfte dieser Arbeit ist in diesen Annalen, Bd. 56 (1903) p. 509—548 erschienen. Unterdessen hat Herr Poincaré in Acta 26, (1902), p. 46—56, seinen früheren Beweis (s. Comptes Rendus, 124 (1897), p. 1407) der in der vorliegenden Arbeit behandelten „Weierstraßschen Sätze" ausführlich dargestellt. (Vgl. p. 518 dieser Arbeit).

**) Siehe Weierstraß, Einige auf die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze, Werke II, p. 156, Abhandlungen aus der Funktionenlehre p. 128.

***) l. c. p. 542 ff.

1) *Sie haben den Bereich D zum Fundamentalbereich.*

2) *Sie verhalten sich innerhalb und an allen endlichen Stellen des Randes von D wie rationale Funktionen.*

3) *Sie lassen sich im Unendlichen als Quotienten von Potenzreihen nach gewissen Variabelen $U', \cdots, U^{(n)}$ darstellen.*

Funktionen dieses Typus werden wir *rationale Funktionen des Fundamentalbereichs* nennen und über sie die folgenden von Weierstraß zuerst ausgesprochenen Sätze*) beweisen:

I. *Alle rationalen Funktionen des Fundamentalbereichs lassen sich algebraisch ausdrücken durch n voneinander unabhängige unter ihnen.*

II. *Sie lassen sich rational ausdrücken durch $n+1$ geeignet gewählte.*

Betreffs der Darstellung bemerken wir vorweg, daß kompliziertere Beweise in der Regel für spezielle kleine Werte der Variabelenzahlen (3 oder 4) gegeben sind, dagegen die Sätze stets für allgemeines n ausgesprochen werden. Die Beweismethoden lassen sich ohne weiteres auf den allgemeinen Fall übertragen. Innerhalb des $(2n)$-dimensionalen Raumes der komplexen Variabelen $x, \cdots, x^{(n-1)}$ werden 6-dimensionale Mannigfaltigkeiten häufig als *Räume*, 4-dimensionale als *Flächen*, 2-dimensionale als *Kurven* bezeichnet werden.

a. Rationale Funktionen eines Bereiches.

Wir stützen uns bei allem folgenden auf den Weierstraßschen „Vorbereitungssatz"**), den wir folgendermaßen aussprechen:

$S(x, x', \cdots, x^{(n-1)})$ sei eine am Punkte $x = x' = \cdots = x^{(n-1)} = 0$ verschwindende Potenzreihe, welche bei Nullsetzung der übrigen Variabelen $x', \cdots, x^{(n-1)}$ nicht identisch in x verschwindet. S enthält dann Glieder der Form $\alpha_\mu x^\mu$ (α_μ Konstante), von denen $\alpha_m x^m$ den kleinsten Exponenten habe. *Alsdann läßt sich S in die Form bringen:*

$$(1)\quad \begin{aligned} S &= (x^m + \mathfrak{P}_1(x', \cdots, x^{(n-1)})x^{m-1} + \cdots + \mathfrak{P}_m(x', \cdots, x^{(n-1)}))\, K(x, x', \cdots, x^{(n-1)}) \\ &= G(x; x', \cdots, x^{(n-1)})\, K(\!(x)\!), \end{aligned}$$

wo K am Punkte $(\!(0)\!)$ nicht verschwindet, und die $\mathfrak{P}$ und K in einem gewissen Bereiche um $(\!(0)\!)$ konvergente Potenzreihen sind.

Verschwindet die Potenzreihe S identisch in x für $x' = \cdots = x^{(n-1)} = 0$,

*) Weierstraß, Brief an Borchardt, Werke II, p. 123ff., Crelles Journal, 89 (1880), p. 1—8.

**) Weierstraß, Werke II, p. 135, Abhandlungen aus der Funktionenlehre, p. 105; Picard, Traité d'Analyse, II, p. 241, s. a. Poincaré, Thèse (1879), p. 6—12.

so kann man auf unendlich viele Arten durch eine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante *neue Variabele* $t, \cdots, t^{(n-1)}$ *einführen, so daß die Reihe für* $t' = \cdots = t^{(n-1)} = 0$ *nicht mehr identisch in* t *verschwindet,* und alsdann den früheren Satz anwenden.

Sei nun $r((x))$ eine rationale Funktion des Fundamentalbereichs D. Aus der Eigenschaft 3) (siehe Vorbemerkungen) entnehmen wir*), daß jede bis auf Pole im Inneren von D reguläre Funktion insbesondere dann eine Funktion r ist, wenn sie bei Fortgang innerhalb des Fundamentalbereichs sich am unendlich fernen Punkte einem festen Werte nähert. Da für jede Funktion r am unendlich fernen Punkte die Fourier-Entwicklung gilt

$$(2) \qquad r = \frac{\sum A_{m'\cdots m^{(n)}}\, e^{2i\pi(m'u'+\cdots+m^{(n)}u^{(n)})}}{\sum A'_{m'\cdots m^{(n)}}\, e^{2\pi i(m'u'+\cdots+m^{(n)}u^{(n)})}} = \frac{\sum A_{m'\cdots m^{(n)}}\, U'^{m'}\cdots U^{(n)m^{(n)}}}{\sum A'_{m'\cdots m^{(n)}}\, U'^{m'}\cdots U^{(n)m^{(n)}}},$$

so läßt sich die Funktion r an jedem Punkte des Fundamentalbereiches als Quotient von Potenzreihen darstellen. Der unendlich ferne Punkt kann daher im folgenden immer nach denselben Methoden behandelt werden wie ein gewöhnlicher Pol, und eine gesonderte Betrachtung ist nicht nötig.

Die Punkte $((x))$ des Fundamentalbereichs, in welchen r einen bestimmten Wert a annimmt, bilden einen $(2n-2)$-dimensionalen Bereich, welcher aus einer einzigen analytischen Mannigfaltigkeit (d. h. einem Funktionselement nebst seinen Fortsetzungen) besteht oder sich aus einer Anzahl solcher Mannigfaltigkeiten zusammensetzt**).

Bei den Polen, d. h. den Stellen, an welchen r die Darstellung

$$r = \frac{\mathfrak{P}(x, x', \cdots, x^{(n-1)})}{\mathfrak{Q}(x, x', \cdots, x^{(n-1)})}$$

gestattet, sind zwei verschiedene Arten streng zu scheiden:

a) diejenigen Stellen, an welchen $\mathfrak{P}$ von 0 verschieden ist. An diesen Stellen hat $\frac{1}{r}$ den Wert 0. Ihre Gesamtheit bildet eine $(2n-2)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit.

b) Diejenigen Stellen, an welchen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gleichzeitig verschwinden. An diesen Stellen ist die Funktion unbestimmt in dem Sinne, daß sie in beliebiger Nähe des Punktes noch jeden Wert a annimmt: Es geht dann eben ein ganzes Bündel von $(2n-2)$-dimensionalen Bereichen $r = a$ durch

---

*) Siehe Teil II, c (l. c. p. 547).

**) Für das folgende vergl. Weierstraß, Werke II, p. 154—162, Abhandlungen aus der Funktionenlehre, p. 128—134.

diesen Punkt hindurch. Solche Stellen werden als *Unbestimmtheitspunkte* oder als *U-Punkte* bezeichnet. Sie bilden $(2n-4)$-dimensionale analytische Mannigfaltigkeiten *(Unbestimmtheitsmannigfaltigkeiten).*

Die an U-Punkten stattfindende Unbestimmtheit unterscheidet sich übrigens in markanter Weise von der Unbestimmtheit an wesentlich singulären Stellen. Man beweist nämlich leicht:

Nähert man sich dem U-Punkt auf einem analytischen Wege, längs dessen die Funktion überall bestimmte Werte hat, so kommt man auch in dem U-Punkt selbst zu einem bestimmten Grenzwert.

Ich stütze mich ferner auf einen von mir früher bewiesenen Satz aus der allgemeinen Eliminationstheorie*), welcher, für die Funktionen des Fundamentalbereichs ausgesprochen, folgendermaßen lautet:

Sei ein System von m Funktionen $r_1, \cdots, r_m$ des Fundamentalbereichs vorgelegt, und betrachten wir diejenigen Stellen des $(2n)$-dimensionalen Fundamentalbereichs, an welchen

$$r_1 = a_1, \cdots, r_m = a_m,$$

wo $a_1, \cdots, a_m$ gegebene Konstante sind, so lassen sich diese Stellen zu analytischen Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen (Stufen) zusammenfassen, und Mannigfaltigkeiten jeder Dimension sind im Inneren des Fundamentalbereichs nur in endlicher Anzahl vorhanden. Die Dimensionen müssen natürlich immer geradzahlig sein.

Ist insbesondere $m < n$, so ist die niederste auftretende Dimension

$$= 2(n-m).$$

Wir haben diesen Satz nur in zwei speziellen Fällen anzuwenden:

Einmal ergibt sich — in Ergänzung des Vorhergehenden —, daß die Stellen $r = a$ (und insbesondere auch die Pole) im Inneren des Fundamentalbereichs nur eine *endliche* Anzahl analytischer $(2n-2)$-dimensionaler Mannigfaltigkeiten bilden. Es folgt ebenso, daß die Anzahl der $(2n-4)$-dimensionalen Unbestimmtheitsmannigfaltigkeiten endlich ist.

Ferner aber betrachten wir ein System von *n von einander unabhängigen Funktionen* $r_1, \cdots, r_n$ des Fundamentalbereichs und fassen das Punktsystem im Innern und auf dem Rande des Fundamentalbereichs ins Auge, an welchem die r_i die gegebenen Werte a_i annehmen. *Dieses Punktsystem besteht dann im allgemeinen nur aus einer endlichen Anzahl von Punkten.*

In der Tat folgt aus dem Eliminationssatze, daß außer einer endlichen Anzahl isolierter Punkte nur noch ganze analytische Mannigfaltig-

*) Math. Ann. Bd. 57, p. 356—368; s. a. Poincaré, Acta Math. 26, (1902), p. 49.

keiten der verschiedenen (geradzahligen) Dimensionen dem Punktsystem angehören können. Wir sagen nun:

n voneinander unabhängige Funktionen der n Variabelen $x, \cdots, x^{(n-1)}$ haben einen *gemeinsamen Schnitt* $[a_1, \cdots, a_n]$, wenn die Werte $a_1, \cdots, a_n$ von den Funktionen längs eines ganzen Kontinuums (von beliebiger Dimension) angenommen werden. Unter Benutzung dieser Ausdrucksweise läßt sich unser Resultat folgendermaßen aussprechen:

n voneinander unabhängige rationale Funktionen des Fundamentalbereichs nehmen ein Wertsystem $a_1, \cdots, a_n$ entweder nur eine endliche Anzahl von Malen an, oder es existiert ein gemeinsamer Schnitt $[a_1, \cdots, a_n]$.

Da wir im folgenden sehen werden, daß die Wertsysteme $(a_1, \cdots, a_n)$, welche gemeinsamen Schnitten entsprechen, nur eine Mannigfaltigkeit von der $(2n-4)^{\text{ten}}$ Dimension bilden, so kommt dieser Satz in der Tat auf die vorangestellte Behauptung hinaus, daß vorgegebene Werte (a_i) in der Regel nur an einer endlichen Anzahl von Punkten gemeinsam angenommen werden.

b. Gemeinsame Schnitte.

Unser Ziel ist nach dieser Vorbereitung, die *Mannigfaltigkeit der gemeinsamen Schnitte* zu studieren. Und zwar betrachten wir an erster Stelle diejenigen Schnitte, welchen reguläre endliche Werte der $a_1, \cdots, a_n$ entsprechen. Hierdurch umgehen wir eine Schwierigkeit, welche von den Unbestimmtheitspunkten herrührt. Es können nämlich Mannigfaltigkeiten vorkommen, längs welcher eine Anzahl der r bestimmte konstante Werte hat, während andere unbestimmt sind. Wir werden solche Schnitte als *Schnitte* $[U_i^k]$, genauer $[U_i^k, a_{k+1}, \cdots, a_n]$ bezeichnen, wenn die Mannigfaltigkeit von der Dimension $2i$ ist und k Funktionen auf ihr unbestimmt werden, während die übrigen die Werte $a_{k+1}, \cdots, a_n$ annehmen. Ein einziger Schnitt $[U_i^k]$ kann dann betrachtet werden als Zusammenfassung einer unendlichen Mannigfaltigkeit von gemeinsamen Schnitten $[a_1, \cdots, a_n]$ im gewöhnlichen Sinne. Diese Auffassung wird in der Tat im nächsten Paragraphen durchgeführt werden. An dieser Stelle aber können wir, wegen der Beschränkung auf reguläre Schnitte, die $[U_i^k]$-Schnitte vorläufig unberücksichtigt lassen.

Wir lassen ferner zunächst außer Betracht diejenigen Schnitte, auf welchen eine der Funktionen unendlich wird. Alle übrigen Schnitte finden wir nach der folgenden Methode, welche übrigens auch einen Teil der Unbestimmtheits- und Unendlichkeitsschnitte liefert.

Wir setzen $n = 4$ voraus, da dieser Fall schon alle Besonderheiten des allgemeinen Falles aufweist. Sei Δ die *Funktionaldeterminante* der vier Funktionen r_1, r_2, r_3, r_4. Längs eines gemeinsamen Schnittes muß

die Funktionaldeterminante verschwinden, denn wir haben dann die Gleichungen

$$(3)\qquad \frac{\partial r_i}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\cdots+\frac{\partial r_i}{\partial x'''}\frac{dx'''}{dt}=0,$$

aus welchen $\Delta = 0$ folgt.

Betrachten wir nun allgemein die Funktionaldeterminante und untersuchen ihr Verhalten an zwei äquivalenten Punkten $((x))$ und $\left(\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)\right)$. Wir haben

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)}\cdot\frac{\eta}{(\gamma x+\delta)^2}$$

und demnach

$$\Delta\left(\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)\right)=\Delta((x))\prod(\gamma x+\delta)^2.$$

Δ ist im übrigen analytisch, wenn die r_i analytisch sind, und hat Pole nur an Stellen, wo eine der Funktionen r_i einen Pol hat. Es existiert ferner im Unendlichen eine Entwicklung (2), und Δ stellt sich dar als eine *multiplikative rationale Funktion des Fundamentalbereichs.* Das Gebiet $\Delta = 0$ besteht also aus einer endlichen Anzahl analytischer 6-dimensionaler Mannigfaltigkeiten oder Räume. Nach ihnen werden wir die gemeinsamen Schnitte einteilen.

Sei $\Delta_g = 0$ einer der Räume $\Delta = 0$; dann gilt der Satz:

Liegt auf $\Delta_g = 0$ eine unendliche Anzahl gemeinsamer Schnittkurven, so existiert mindestens eine ganze (4-dimensionale) Fläche auf $\Delta_g = 0$, welche gemeinsamen Schnittkurven erfüllt ist.

Gibt es unendlich viele gemeinsame Schnittflächen, so ist der gesamte Raum $\Delta_g = 0$ von gemeinsamen Schnittflächen erfüllt.

Das Aussehen eines Raumes $\Delta_g = 0$ wäre sonach folgendes: Entweder ist er gänzlich erfüllt von gemeinsamen Schnittkurven oder Schnittflächen, oder aber es liegen in ihm nur eine *endliche* Anzahl von Flächen und Kurven, welche von gemeinsamen Schnittgebilden überdeckt sind.

Zum Beweise bemerken wir zunächst: Da die gemeinsamen Schnitte auf $\Delta_g = 0$ liegen müssen, so besteht längs ihrer außer den Gleichungen (3) noch die Gleichung

$$(4)\qquad \frac{\partial\Delta_g}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\cdots+\frac{\partial\Delta_g}{\partial x'''}\frac{dx'''}{dt}=0,$$

wo die $\frac{\partial\Delta_g}{\partial x},\cdots$ nicht sämtlich auf dem ganzen Raume $\Delta_g = 0$ verschwinden. Durch Elimination von $\frac{dx}{dt}, \frac{dx'}{dt}, \frac{dx''}{dt}, \frac{dx'''}{dt}$ erhalten wir aus (3) und (4) die vier Gleichungen, welche längs eines gemeinsamen Schnittes erfüllt sind,

(5) $$\Delta_g = 0, \quad \Gamma_1 = 0, \quad \Gamma_2 = 0, \quad \Gamma_3 = 0,$$

wo

$$\Gamma_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x} & \frac{\partial r_1}{\partial x'} & \frac{\partial r_1}{\partial x''} & \frac{\partial r_1}{\partial x'''} \\ \frac{\partial r_2}{\partial x} & \frac{\partial r_2}{\partial x'} & \frac{\partial r_2}{\partial x''} & \frac{\partial r_2}{\partial x'''} \\ \frac{\partial r_3}{\partial x} & \frac{\partial r_3}{\partial x'} & \frac{\partial r_3}{\partial x''} & \frac{\partial r_3}{\partial x'''} \\ \frac{\partial \Delta_g}{\partial x} & \frac{\partial \Delta_g}{\partial x'} & \frac{\partial \Delta_g}{\partial x''} & \frac{\partial \Delta_g}{\partial x'''} \end{vmatrix}$$

die Funktionaldeterminante der Funktionen r_1, r_2, r_3, Δ_g ist, und Γ_2, Γ_3 ebenso die Funktionaldeterminanten von r_2, r_3, r_4, Δ_g und r_3, r_4, r_1, Δ_g bezeichnen.

Die Funktionen $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ sind wieder an allen Punkten des Fundamentalbereichs, und demnach auf dem ganzen $\Delta_g = 0$, bis auf Pole regulär. Bei Annahme einer unendlichen Zahl von gemeinsamen *Schnittkurven* müßten sonach die vier Funktionen $\Delta_g, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ auf unendlich vielen Kurven gleichzeitig verschwinden. Daraus folgt aber, daß $\Delta_g = 0$, $\Gamma_1 = 0$, $\Gamma_2 = 0$, $\Gamma_3 = 0$ eine ganze vierdimensionale Schnittmannigfaltigkeit, d. h. eine *Schnittfläche* gemeinsam haben.

Es kann aber auch vorkommen, daß $\Delta_g = 0$ selbst gemeinsamer Schnitt der vier Funktionen $\Delta_g, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ ist. Haben wir andererseits unendlich viele gemeinsame *Schnittflächen*, so ist $\Delta_g = 0$ notwendig *gemeinsamer Schnitt.*

Wir haben somit zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Die Funktionen $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ verschwinden auf dem ganzen Raum $\Delta_g = 0$. 2) Es existiert auf $\Delta_g = 0$ nur eine endliche Anzahl von Flächen und Kurven, längs welcher die Funktionen $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ gleichzeitig verschwinden.

Gemeinsame Schnitte können also nur in diesen gemeinsamen Verschwindungsgebieten auftreten. Wir haben jetzt zu zeigen, daß sie in jedem dieser Gebiete kontinuierliche Mannigfaltigkeiten bilden.

Wir benutzen zu diesem Beweise eine Parameterdarstellung der einzelnen Räume resp. Flächen, welche aus dem durch den Eliminationssatz bewiesenen analytischen Charakter dieser Räume und Flächen folgt.

Die Methode ist für die beiden unterschiedenen Fälle 1) und 2) die gleiche; sie soll an dem Falle 1) auseinandergesetzt werden. Der Raum $\Delta_g = 0$ hat infolge seines analytischen Charakters die Eigenschaft, daß im allgemeinen um jeden seiner Punkte herum eine Darstellung gilt

(P) $x = \mathfrak{P}(t, t', t'')$, $x' = \mathfrak{P}'(t, t', t'')$, $x'' = \mathfrak{P}''(t, t', t'')$, $x''' = \mathfrak{P}'''(t, t', t'')$,

wo die $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \cdots$ konvergente Potenzreihen bedeuten. Die Ausnahmepunkte, um welche eine solche Darstellung nicht möglich ist, bilden

ihrerseits (da sie durch das Verschwinden gewisser Differentialquotienten charakterisiert sind), eine endliche Anzahl von analytischen Mannigfaltigkeiten der vierten Dimension, für welche analoge Parameterdarstellungen gelten. Ihre Untersuchung vollzieht sich in der gleichen Weise, wie die des allgemeinen Falles, auf welchen wir uns daher beschränken wollen.

Um einen Punkt, an welchem die Darstellung (P) gilt, haben wir dann als notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines gemeinsamen Schnittes das Verschwinden der sämtlichen Unterdeterminanten dritter Ordnung der Matrix

$$(\mathrm{M}) \qquad \left|\begin{matrix} \frac{\partial r_1}{\partial t} & \frac{\partial r_1}{\partial t'} & \frac{\partial r_1}{\partial t''} \\ & \vdots & \\ & \vdots & \end{matrix}\right|.$$

Wir benutzen nun einen weiteren Satz der zitierten Eliminationsarbeit*), demzufolge sich um jeden Punkt des Raumes $\Delta_g = 0$ herum die Variabelen (x) als „algebroide Funktionen" der Variabelen (t) darstellen d. h. durch ein Gleichungssystem gegeben sind

$$x^m + p_1((t))x^{m-1} + \cdots + p_m((t)) = 0$$

mit den entsprechend gebauten Gleichungen für x', x'', x'''; die $p_1, \cdots, p_m$ bezeichnen Potenzreihen. Es folgt**), daß sich auch jede Funktion r um diesen Punkt $((t))$ herum als algebroide Funktion darstellt, nämlich gegeben ist durch eine Gleichung

$$P_0((t))r^M + P_1((t))r^{M-1} + \cdots + P_M((t)) = 0.$$

Differenzieren wir diese Gleichung partiell nach t und eliminieren aus der differenzierten und der ursprünglichen Gleichung durch Resultantenbildung die Funktion r, so erhalten wir auch für die Ableitung $\frac{\partial r}{\partial t}$ eine algebroide Gleichung. Es folgt:

Die Unterdeterminanten der Matrix (M) *sind auf dem ganzen Raume* $\Delta_g = 0$ *algebroide Funktionen der Variabelen* (t).

Daraus können wir den Schluß ziehen***), daß die Unterdeterminanten 3. Ordnung nur in einer *endlichen Anzahl* analytischer Mannigfaltigkeiten auf dem Raume $\Delta_g = 0$ gemeinsam verschwinden.

Mit Hilfe dieses Resultates aber können wir unseren Satz über die gemeinsamen Schnitte ableiten.

Wir zeigen nämlich zunächst: *wenn in einer durch die Variabelen* (t, t', t'') *charakterisierten Mannigfaltigkeit überall die Funktionaldeterminanten*

*) Math. Ann. 57, p. 357 (Grenzstellensatz) und p. 360—361.

**) Ebenda, p. 360—361.

***) Ebenda, p. 368.

verschwinden, dann ist die Mannigfaltigkeit vollständig von gemeinsamen Schnitten erfüllt.

Gleichzeitig gewinnen wir eine Einteilung der Schnitte nach ihrer Dimension. Diese beruht auf der Betrachtung der Unterdeterminanten der Matrix (M).

Setzen wir nämlich zuerst voraus, daß mindestens eine Unterdeterminante 2. Ordnung der Matrix nicht identisch in der Umgebung des Punktes $t = t' = t'' = 0$ verschwindet, so können wir — nötigenfalls durch geeignete Wahl eines benachbarten Punktes — annehmen, daß auch in dem betrachteten Punkte selbst eine der Unterdeterminanten von Null verschieden ist. Alsdann ergibt sich in dem Punkt ein bestimmtes gemeinsames Tangentialelement der Flächen $r_1 = a_1$, $r_2 = a_2$, $r_3 = a_3$, $r_4 = a_4$ in der Form

$$dt : dt' : dt'' = f((t)) : f'((t)) : f''((t))$$

wo die f analytische Funktionen sind. Die Integration dieses Systems ist nach den Cauchyschen Existenzsätzen möglich und ergibt also eine durch den Punkt $t = t' = t'' = 0$ gehende Kurve, längs welcher die sämtlichen Funktionen r konstant sind. *Es existiert also in diesem Falle durch jeden Punkt der Mannigfaltigkeit ein zweidimensionaler gemeinsamer Schnitt.* Die Mannigfaltigkeit ist also von zweidimensionalen gemeinsamen Schnitten vollständig erfüllt.

Wir machen weiter die Voraussetzung, daß auch die Determinanten 2. Ordnung der Matrix sämtlich identisch verschwinden, daß dagegen an dem betrachteten Punkte mindestens eines der Elemente von Null verschieden ist. Alsdann kann ich*) zwei Parameter $d\tau$ und $d\tau'$ einführen, so daß sich die gemeinsamen Tangentialelemente der vier Mannigfaltigkeiten $r_i = a_i$ in der Form darstellen

$$dt = f((t))d\tau + \varphi((t))d\tau',\ dt' = f'((t))d\tau + \varphi'((t))d\tau',\ dt'' = f''((t))d\tau + \varphi''((t))d\tau'.$$

Setze ich noch $dt = \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial t}{\partial \tau'} d\tau', \cdots$, so liefern mir diese Gleichungen ein System von partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung in der Cauchyschen Normalform für die Größen t, t', t''. Durch Integration erhalte ich also eine Fläche $t = \Phi(\tau, \tau')$, $t' = \Phi'(\tau, \tau')$, $t'' = \Phi''(\tau, \tau')$, und längs dieser Fläche haben die Funktionen r_i konstante Werte. *Wir erhalten also in diesem Falle durch jeden Punkt einen vierdimensionalen gemeinsamen Schnitt;* der Raum $\Delta_g = 0$ ist von vierdimensionalen gemeinsamen Schnitten vollständig erfüllt.

Verschwinden schließlich auf den ganzen Raum $\Delta_g = 0$, d. h. für alle

*) S. z. B. Netto, Algebra II, p. 192.

Werte der Parameter t, t', t'' die sämtlichen Differentialquotienten $\frac{\partial r}{\partial t}, \cdots$ identisch, *so ist* $\Delta_g = 0$ *selbst ein gemeinsamer sechsdimensionaler Schnitt.*

Hiernach aber ist die allgemeine Lösung des Problems der gemeinsamen Schnitte leicht gefunden. Sei nämlich nicht mehr angenommen, daß die Unterdeterminanten der Matrix (M) auf dem ganzen $\Delta_g = 0$ verschwinden, so betrachten wir eine der in endlicher Zahl vorhandenen, vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten, auf welcher dieses Verschwinden statt hat, führen die dieser Mannigfaltigkeit zugehörigen Parameter $\bar{t}, \bar{t}'$ ein, bilden die entsprechende Matrix und untersuchen deren Unterdeterminanten. Wenn diese identisch in $\bar{t}, \bar{t}'$ verschwinden, so ist die Mannigfaltigkeit von gemeinsamen Schnitten ganz erfüllt, im anderen Falle kann nur eine endliche Anzahl zweidimensionaler gemeinsamer Schnitte bestehen.

Allgemein gesprochen, setzt uns unser Verfahren in den Stand, die Dimension des analytischen Gebildes, welches wir auf Vorhandensein von gemeinsamen Schnitten untersuchen, immer weiter zu reduzieren; und dabei sind wir sicher, von jeder Dimension nur eine endliche Anzahl von gemeinsamen Schnittgebilden oder eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit von solchen zu erhalten.

Aus diesen Betrachtungen über die Lagenverhältnisse der gemeinsamen Schnitte ziehen wir Folgerungen auf die *Mannigfaltigkeit der ihnen entsprechenden Wertsysteme* (a_1, a_2, a_3, a_4). Ist zunächst der ganze Raum $\Delta_g = 0$ von gemeinsamen Schnitt*kurven* überdeckt, so bilden die zugehörigen Wertsysteme ein *vierdimensionales Kontinuum.* Denn die Schnitte selbst bilden ein solches, weil $\Delta_g = 0$ von ihnen einfach überdeckt ist. Es kann aber nur eine endliche Anzahl von Schnitten geben, welche demselben Wertsystem (a_1, a_2, a_3, a_4) entsprechen, während umgekehrt auch zu jedem Schnitt nur *ein Wertsystem* gehört*). Wir schließen analog für den Fall gemeinsamer *Schnittflächen,* sowie für den Fall, daß nur eine Fläche F von gemeinsamen Schnitten überdeckt ist. Beide Male erhalten wir eine *zweidimensionale Wertemannigfaltigkeit.* Schließlich können gemeinsame *Schnitträume* und ihnen entsprechende Wertsysteme nur in *endlicher Anzahl* auftreten, da ja die Mannigfaltigkeit $\Delta = 0$ nur in eine endliche Anzahl analytischer Zweige $\Delta_g = 0$ zerfällt.

Die Menge der gemeinsamen Schnitte ist sonach stetig und höchstens von der vierten Dimension; daraus läßt sich aber noch nicht schließen, daß *die den gemeinsamen Schnitten entsprechenden Wertsysteme* (a_1, a_2, a_3, a_4) nur *eine spezielle Mannigfaltigkeit* in der achtdimensionalen Menge aller möglichen Systeme bilden. Darunter verstehen wir folgendes. Es gibt bekanntlich vierdimensionale stetige Mannigfaltigkeiten, welche durch jeden

*) Siehe die Festsetzung betr. der (U_i^k)-Schnitte.

Punkt eines achtdimensionalen Raumes hindurch gehen oder ihm wenigstens beliebig nahe kommen. Wir wollen uns davon überzeugen, daß die Mannigfaltigkeit der Schnittwertsysteme diese Eigenschaft nicht hat.

Betrachten wir nämlich auf einem Raume $\Delta_g = 0$ diejenigen gemeinsamen Schnitte, welche einem konstanten Werte $r_1 = a_1$ entsprechen. Wenn es unendlich viele Schnitte gibt, welche zu demselben a_1 gehören, schließen wir nach unserer allgemeinen Methode, daß diese eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit bilden müssen, indem wir nämlich in dem analytischen Gebilde von höchstens 4^{ter} Dimension

$$\Delta_g = 0, \quad r_1 = a_1$$

Parameterdarstellung einführen.

Dies setzt uns in den Stand, den verlangten Nachweis zu führen. Weil die Dimension der Mannigfaltigkeit der gemeinsamen Schnitte höchstens $= 4$ ist, können wir voraussetzen, daß es Werte $r_1 = a_1$ gibt, welchen nur eine endliche Anzahl von Schnittwertsystemen entspricht. Dann gibt es also Wertsysteme (a_1, a_2, a_3, a_4), zu welchen kein gemeinsamer Schnitt gehört, und um jedes dieser Wertsysteme läßt sich auch eine endliche Umgebung abgrenzen, in welcher gleichfalls kein Schnittwertsystem vorhanden ist.

Dies liefert aber das verlangte Resultat. Wir können es noch in einer kurzen geometrischen Form aussprechen: Denken wir uns den Raum der (a_1, a_2, a_3, a_4) und darin die kontinuierlichen Mannigfaltigkeiten, welche gemeinsamen Schnitten entsprechen, dann können diese Mannigfaltigkeiten keinen Teil des achtdimensionalen Raumes ausfüllen oder überall dicht durchsetzen.

Unsere Resultate fassen wir in folgendem Satz zusammen, den wir sogleich für allgemeines n aussprechen wollen:

*Abgesehen von einer endlichen Anzahl vereinzelter Systeme bilden diejenigen Wertsysteme $(a_1, \cdots, a_n)$, welchen gemeinsame Schnitte entsprechen, je eine endliche Anzahl von Kontinuen verschiedener Dimensionen; und zwar ist die höchstmögliche Dimension dieser Kontinua im Falle zweidimensionaler Schnitte (Kurven) $2n - 4$, allgemein im Falle (2ν)-dimensionaler Schnitte $2n - 2\nu - 2$. Die Schnittwertemannigfaltigkeiten durchsetzen keinen Teil des $(2n)$-dimensionalen Raumes überall dicht.**)

Wir haben noch einen Nachtrag über diejenigen gemeinsamen Schnitte zu machen, bei welchen eine der Funktionen r unendlich wird. Wir müssen, um unsere Methode anwenden zu können, an Stelle der Funktion r die Funktion $\frac{1}{r}$ einführen und die zu ihr gehörige Funktionaldeterminante

$$\Delta' = -\frac{1}{r^2}\,\Delta$$

*) Man kann weiter nachweisen, daß die Mannigfaltigkeiten analytisch sind.

betrachten. Die einzelnen analytischen Mannigfaltigkeiten $\Delta_g' = 0$ sind entweder Mannigfaltigkeiten $\Delta_g = 0$ oder Mannigfaltigkeiten $r = \infty$. Unser oben ausgesprochenes Hauptresultat bleibt ungeändert bestehen, wenn man auch die Unendlichkeitsschnitte heranzieht.

c. Unbestimmtheitspunkte und -Schnitte.

Wenn eine Funktion r sich einem ihrer Unbestimmtheitspunkte nähert, so nimmt sie in der Umgebung desselben jeden beliebigen Wert noch unendlich oft an. Komplizierter aber liegt die Frage, wenn mehrere Funktionen $r_1, \cdots, r_k$ gleichzeitig an einem Punkte unbestimmt werden. Wir wollen definieren:

Die Funktionen $r_1, \cdots, r_k$ nehmen in dem Unbestimmtheitspunkte U^k ein Wertsystem $a_1, \cdots, a_k$ gemeinsam an, wenn in beliebiger Nähe von U^k reguläre Punkte existieren, an welchen

$$r_1 = a_1 + \varepsilon_1, \cdots, r_k = a_k + \varepsilon_k,$$

und die ε bei Annäherung an den Punkt gegen Null konvergieren.

Es erhebt sich dann die Frage nach der Gesamtheit aller Wertsysteme, welche in einem Punkte U^k angenommen werden, und ebenso nach der Mannigfaltigkeit der auf einem Unbestimmtheitsschnitt $[U_i^k]$ gleichzeitig angenommenen Werte*).

Die Art dieser Fragestellung läßt sich folgendermaßen erläutern. Betrachten wir den Fall eines Unbestimmtheitspunktes, für welchen wir den Nullpunkt wählen, und nehmen an, daß sämtliche Funktionen $r_1, \cdots, r_n$ in ihm unbestimmt werden. Wir wissen, daß die Funktionen $r_1, \cdots, r_n$ im allgemeinen (d. h. soweit nicht gemeinsame Schnitte in Frage kommen) ein bestimmtes Wertsystem $(a_1, \cdots, a_n)$ nur eine endliche Anzahl von Malen annehmen. Es läßt sich also für ein vorgegebenes allgemeines System $(a_1, \cdots, a_n)$ eine endliche Umgebung um U^n abgrenzen, innerhalb deren das Wertsystem an keinem regulären Punkte mehr angenommen wird. Umgeben wir also den Nullpunkt mit einer kleinen Kugel von abnehmendem Radius ϱ, so gehört zu jedem Wert $\varrho = \varrho_1$ eine gewisse

*) Diese Frage behandelt auch Herr Autonne, siehe besonders Verhandlungen des Mathematikerkongresses in Zürich (1897), p. 224, und Acta 21 (1897), p. 249—263. Bei Herrn Autonne tritt jedoch der Unterschied zwischen isolierten U-Punkten und U-Schnitten nicht hervor. Seine Methode, die wesentlich auf einem Ersatz der transzendenten Gleichungen durch algebraische basiert, ist im Falle eines isolierten U-Punktes der unserigen überlegen, indem sie die Mannigfaltigkeit der gleichzeitig angenommenen Werte als *algebraisch* nachweist. Dagegen scheint es schwierig, mit dieser Methode im Falle von U-Schnitten die erforderlichen Dimensionsbestimmungen auszuführen. Wir verwenden daher hier eine Methode, welche in allen Fällen anwendbar bleibt.

Wertemannigfaltigkeit $(a_1, \cdots, a_n)$, welche innerhalb der Kugel von den Funktionen noch angenommen wird. Es handelt sich bei unserem Problem um den Limes dieser Wertemannigfaltigkeit für $\varrho = 0$; man erkent also, daß dieser nicht gleich der Gesamtheit aller überhaupt möglichen Wertsysteme sein kann.

Das Problem charakterisiert sich gleichzeitig als ein Eliminationsproblem.

Wir versuchen, die Variabelen $x, \cdots, x^{(n-1)}$ als Funktionen der $r_1, \cdots r_n$ auszudrücken. Die Gleichungen

$$x = \cdots = x^{(n-1)} = 0$$

liefern dann die Bedingungen, welche zwischen den im Nullpunkte angenommenen Wertsystemen bestehen.

In analoger Weise läßt sich unsere Fragestellung für den Fall von Unbestimmtheitsschnitten $[U_i^k]$ erklären. Wir fügen dazu die folgende Bemerkung bei: Die Anzahl der Unbestimmtheitskontinua U_i von der Dimension $2i$, welche k bestimmten Funktionen gemeinsam sind, ist eine endliche, denn unendlich viele würden ein Unbestimmtheitskontinuum höherer Dimension bedingen.

Die aufgeworfene Frage erledigt sich durch folgenden Satz:

Haben k Funktionen eine Mannigfaltigkeit U_{n-i-2}^k gemeinsam, so kann man höchstens

$$k' = i + 1$$

von den k Funktionen willkürliche Werte auf der Mannigfaltigkeit vorschreiben. Die Werte der übrigen sind dann in jedem Punkte der Mannigfaltigkeit vollständig bestimmt.

Aus diesem Satze ergibt sich folgende Konsequenz: Haben wir wieder n Funktionen, von welchen k die Unbestimmtheitsmannigfaltigkeit U_{n-i-2}^k gemein haben, so sind die Werte dieser n Funktionen auf der Mannigfaltigkeit abhängig

1. von den höchstens $i + 1$ willkürlichen Funktionen,
2. von den $n - i - 2$ Koordinaten.

Die Gesamtwertemenge der n Funktionen auf U_{n-i-2}^k beträgt somit höchstens

$$2[(n - i - 2) + (i + 1)] = 2n - 2.$$

Da ja außerdem die Anahl aller U_i^k endlich ist, so folgt der Satz:

Die Wertsysteme $(a_1, \cdots, a_n)$, welche in Unbestimmtheitspunkten und -Mannigfaltigkeiten angenommen werden, bilden höchstens eine endliche Anzahl $(2n - 2)$-dimensionaler Kontinua.

Man erkennt hiernach auch, daß die aus einem gemeinsamen Unbestimmtheitsschnitt $[U_i^k, a_{k+1}, \cdots, a_n]$ hervorgehenden gemeinsamen

Schnitte im gewöhnlichen Sinne eine höchstens $(2n - 2\nu - 2)$-dimensionale Mannigfaltigkeit bilden, wenn die Dimension der Schnitte 2ν ist. Die Resultate des vorigen Paragraphen über gemeinsame Schnitte bleiben also auch bei Heranziehung der Unbestimmtheitsschnitte in Kraft.

Wir gehen jetzt an den Beweis des ersten Satzes. Der Fall $n = 3$ bringt die angewandte Methode vollständig zum Ausdruck. Die zu untersuchenden Unbestimmtheitsmannigfaltigkeiten sind hier die folgenden:

a) ein Punkt U^3, an dem alle 3 Funktionen unbestimmt werden;

b) eine Kurve U_1^2, welche für mindestens 2 Funktionen Unbestimmtheitskurve ist.

Wir betrachten zunächst den Fall a); der Punkt U^3 sei der Nullpunkt, und wir setzen

$$(6') \qquad r_1 = \frac{\mathfrak{P}_1(x)}{\mathfrak{Q}_1(x)}, \quad r_2 = \frac{\mathfrak{P}_2(x)}{\mathfrak{Q}_2(x)}, \quad r_3 = \frac{\mathfrak{P}_3(x)}{\mathfrak{Q}_3(x)},$$

$r_1 = 0$, $r_2 = 0$, $r_3 = 0$ sei ein Wert, welcher in dem Nullpunkte angenommen wird, für welchen aber kein durch den Nullpunkt hindurchgehender vierdimensionaler gemeinsamer Schnitt $[0\,0\,0]$ der drei Funktionen existiert. Es handelt sich dann darum, aus den drei Gleichungen

$$(6) \quad \varphi_1 \equiv \mathfrak{P}_1 - r_1\mathfrak{Q}_1 = 0, \quad \varphi_2 \equiv \mathfrak{P}_2 - r_2\mathfrak{Q}_2 = 0, \quad \varphi_3 \equiv \mathfrak{P}_3 - r_3\mathfrak{Q}_3 = 0$$

eine Bedingung zwischen r_1, r_2, r_3 herzuleiten, welche an dem Punkt $((0))$ erfüllt sein muß. Dies geschieht durch Elimination auf Grund des Vorbereitungssatzes.

Wir denken uns in die Funktionen (6) an Stelle der (x) die Variabelen t, t', t'' durch lineare Substitution derart eingeführt, daß jede Gleichung alle 3 Variabelen enthält und außerdem im Sinne des Vorbereitungssatzes nach t'' auflösbar ist. Wir haben

$$\varphi_1 = G_1(t''; t, t'; r_1)K_1,$$
$$\varphi_2 = G_2(t''; t, t'; r_2)K_2,$$
$$\varphi_3 = G_3(t''; t, t'; r_3)K_3,$$

wo die G ganz rational in t'', Potenzreihen in t, t' und den (r) sind. Bilden wir also aus den G mit *unbestimmten* Koeffizienten u, v die linearen Verbindungen

$$U'(t''; t, t'; r_1, r_2, r_3; u) = u_1 G_1 + u_2 G_2 + u_3 G_3,$$
$$V'(t''; t, t'; r_1, r_2, r_3; v) = v_1 G_1 + v_2 G_2 + v_3 G_3,$$

so ist das Verschwinden dieser beiden Funktionen die notwendige und hinreichende Bedingung für das gemeinsame Verschwinden der φ an dem Punkte $(t) = 0$. Da die Funktionen U und V ganz rational in t'' sind, so gestatten sie nach dieser Variabelen die Bildung einer Resultante

$$R'(t, t'; r_1, r_2, r_3; u, v).$$

Diese ist ganz rational in den u, v, analytisch in den übrigen Variabelen, und ihr Verschwinden für unbestimmte Werte u, v ist die notwendige und hinreichende Bedingung für das gemeinsame Bestehen der Gleichungen (6). Indem wir die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von u, v mit R_i' bezeichnen, erhalten wir also an Stelle von (6) das äquivalente System

$$R_i'(t, t'; r_1, r_2, r_3) = 0. \tag{7}$$

Wir haben noch zu zeigen, daß die Resultante R' nicht identisch in den t, t' verschwindet, daß es also nicht identisch verschwindende Funktionen R_i' gibt. Dies ist aber leicht zu sehen, denn durch Spezialisierung der u, v sieht man, daß unter den Funktionen R_i' sich insbesondere die Resultanten R'_{12}, R'_{23}, R'_{31} der Funktionen G_1 und G_2, G_2 und G_3, G_3 und G_1 vorfinden. Diese Resultanten aber können nicht identisch verschwinden. In der Tat hätte das identische Verschwinden von R'_{12} einen für $(t) = 0$ verschwindenden gemeinsamen Teiler in t'' der Funktionen φ_1 und φ_2 zur Folge. Dieser gemeinsame Teiler müßte von den (r) unabhängig sein, und dies ist unmöglich, da $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ keinen für $(t) = 0$ verschwindenden gemeinsamen Teiler enthalten.

Untersuchen wir ferner, ob die sämtlichen Funktionen R_i' einen gemeinsamen für $(t) = 0$ verschwindenden Teiler besitzen können. Ein solcher Teiler müßte von r_1, r_2, r_3 unabhängig sein; er sei $\Gamma(t, t') = 0$. Betrachte ich alsdann einen Punkt t_1, t_1' auf der Fläche $\Gamma = 0$ in genügender Nähe des Nullpunktes, so folgt aus der Resultanteneigenschaft von R', daß für beliebige Werte der (r) die Funktionen $G_1(t''; t_1, t_1')$, $G_2(t''; t_1, t_1')$, $G_3(t''; t_1, t_1')$ einen gemeinsamen Teiler haben müssen. Es gibt also zu jedem die Gleichung $\Gamma = 0$ befriedigenden genügend kleinen Wertepaare t_1, t_1' einen beliebig kleinen Wert t_1'', sodaß für *alle* Werte von r_1, r_2, r_3 die Gleichungen (6) an dem Punkte $(\!(t_1)\!)$ erfüllt sind. Dies aber ist unmöglich. Nach Voraussetzung geht nämlich durch $(t) = 0$ kein gemeinsamer Unbestimmtheitsschnitt aller drei Funktionen φ hindurch, und es liegt also auch in einer gewissen Umgebung des Punktes kein weiterer gemeinsamer Unbestimmtheitspunkt. Lasse ich also t_1, t_1' alle möglichen genügend kleinen Wertsysteme durchlaufen und berechne die dazu gehörigen Werte t_1'', so ergeben die Gleichungen (6′) für die (r) höchstens eine endliche Anzahl vierdimensionaler analytischer Kontinua; es können also in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes die Gleichungen (6) nicht für alle Wertsysteme $(\!(r)\!)$ erfüllt sein. Vierdimensionale Kontinua könnten übrigens nur dann auftreten, wenn durch den Nullpunkt ein auf $\Gamma = 0$ liegender gemeinsamer Unbestimmtheitsschnitt von zwei Funktionen r hindurchgeht (siehe übrigens p. 514). Die Annahme eines gemeinsamen Teilers der Funktionen R_i' ist also ausgeschlossen.

Wir haben nun abermals aus den R_i' die Variabele t' — resp. eine lineare Kombination von t und t' — durch Resultantenbildung zu eliminieren. Hierbei kann eine Schwierigkeit eintreten. Es könnte vorkommen, daß in einer der Funktionen R_i' die sämtlichen Potenzen von t, t' mit Faktoren in den (r) multipliziert wären. Alsdann wäre also der Vorbereitungssatz auf die Variabelen t, t' resp. eine ihrer linearen Kombinationen nicht anwendbar. Dann kann man sich aber nach der folgenden Methode immer ein äquivalentes System von Funktionen $\overline{R}_i'$ verschaffen, auf welches der Vorbereitungssatz sicher Anwendung findet. Bemerken wir zuerst, daß sicher nicht in *allen* Funktionen R_i' der genannte Fall eintritt. Sonst verschwände nämlich die Resultante R' für $(r) = 0$ identisch in t und t', und daraus folgt, daß zu jedem Wertsystem t, t' ein Wert t gehört, an welchem für $(r) = 0$ die Gleichungen $\varphi = 0$ erfüllt sind. Es müßte also ein vierdimensionaler gemeinsamer Schnitt $[0, 0, 0]$ der drei Funktionen durch den Nullpunkt hindurchgehen, was nach Voraussetzung nicht der Fall sein soll. Es gibt also wenigstens *eine* Funktion R_1', welche eine von (r) freie Potenz in t, t' besitzt und daher nach dem Vorbereitungssatze behandelt werden kann. Sei R_2' dagegen eine Funktion, für welche der Ausnahmefall eintritt. Ich bilde mir jetzt die neuen Funktionen

$$\overline{R}_1' = R_1' + R_2', \quad \overline{R}_2' = R_1' - R_2'.$$

Alsdann ist das System

$$\overline{R}_1' = 0, \quad \overline{R}_2' = 0, \quad R_i' = 0$$

mit dem früheren Systeme

$$R_1' = 0, \quad R_2' = 0, \quad R_i' = 0$$

und daher auch mit dem System (6) äquivalent. Ferner aber ist jetzt auf die beiden Funktionen $\overline{R}_1', \overline{R}_2'$ der Vorbereitungssatz anwendbar.

Nachdem wir durch Fortführung dieses Ersatzverfahrens zu einem Funktionensystem $\overline{R}_i'$ gelangt sind, welches die verlangte Form besitzt, bilden wir, nach Umformung mittels des Vorbereitungssatzes, aus zwei linearen Verbindungen mit unbestimmten Koeffizienten eine Resultante $R(t; r_1, r_2, r_3; u, v)$. Die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von u, v seien

$$R_i(t; r_1, r_2, r_3).$$

Die R_i werden, da sie für $t = 0$ sämtlich verschwinden müssen, einen gemeinsamen Faktor t^λ besitzen. Durch Nullsetzen dieses Faktors erhalte ich aber allein den Punkt $(t) = 0$ selbst, an welchem ja die Funktionen φ für jedes Wertsystem der (r) verschwinden. Betrachten wir nun die Größen $\frac{R_i'(t; r_1, r_2, r_3)}{t^\lambda}$, so liefern uns diese die regulären Punkte in der Umgebung des Nullpunktes, an welchen ein Wertsystem (r) angenommen

wird. Daraus folgt, daß in jeder dieser Funktionen der Koeffizient von t^0 die (r) tatsächlich enthalten muß und sich nicht auf Konstante reduzieren darf. Denn sonst wären die Gleichungen (6) in einer gewissen Umgebung des Punktes $(t) = 0$ für *kein* Wertsystem (r) zu befriedigen. Das Verschwinden dieser ersten Koeffizienten für ein Wertsystem (r) liefert aber andererseits die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß es in beliebiger Nähe von $(t) = 0$ noch reguläre Punkte gibt, an welchen die Funktionen (6′) den Werten r beliebig nahe kommen. Bezeichnen wir also diese ersten Koeffizienten, welche sich als Potenzreihen in den (r) darstellen, mit $\mathsf{P}_i(r_1, r_2, r_3)$, *so liefern die Gleichungen*

$$(8) \qquad \mathsf{P}_i(r_1, r_2, r_3) = 0$$

die sämtlichen Wertsysteme, welche in den gemeinsamen Unbestimmtheitspunkten von den Funktionen r_1, r_2, r_3 angenommen werden.

Gemäß der Voraussetzung, daß $r_1 = 0$, $r_2 = 0$, $r_3 = 0$ ein Wertsystem ist, welches an dem U-Punkte wirklich angenommen wird, verschwinden die Potenzreihen P_i für das Wertsystem $((0))$. Sie stellen also um den Punkt $((0))$ herum eine endliche Anzahl von analytischen Gebilden dar. Das gleiche findet um jeden anderen Wert $((r))$ statt, welcher in dem U-Punkte angenommen wird*). Daraus aber folgt nach dem Eliminationssatze, daß *die in dem U-Punkte angenommenen Wertsysteme eine endliche Anzahl von analytischen Mannigfaltigkeiten bilden, und zwar können höchstens Mannigfaltigkeiten 4^{ter} Dimension auftreten.* Man erkennt fernerhin leicht, daß diese Mannigfaltigkeiten keinen Raumteil überalldicht erfüllen können.

Dies ist das gesuchte Resultat. Im allgemeinen Falle eines beliebigen n ist die Ableitung genau die nämliche. —

Die gleichen Überlegungen gelten, falls zwei Funktionen r_1, r_2 eine gemeinsame *Unbestimmtheitskurve* U_1^2 besitzen. Wir haben dann zwei Gleichungen zu betrachten

$$(6a) \qquad \varphi_1 \equiv \mathfrak{P}_1 - r_1 \mathfrak{Q}_1 = 0, \quad \varphi_2 \equiv \mathfrak{P}_2 - r_2 \mathfrak{Q}_2 = 0;$$

r_1, r_2 sei wieder ein am Nullpunkt angenommenes Wertsystem. Die Un-

*) Ausnahmen könnten nur für die endliche Anzahl von Wertsystemen $((r))$ auftreten, für welche gemeinsame vierdimensionale Schnitte durch den U-Punkt hindurchgehen. Sei jedoch $[a_1, a_2, a_3]$ ein derartiges Wertsystem. Man überzeugt sich alsdann durch Betrachtung der Funktionen

$$r_1, r_2, r_3' = \frac{r_3 - a_3}{r_1 - a_1} = \frac{\mathfrak{P}_3'((x))}{\mathfrak{Q}_3'((x))},$$

welche diesen gemeinsamen vierdimensionalen Schnitt nicht mehr besitzen, daß auch in der Umgebung dieser Ausnahmepunkte nur eine endliche Anzahl von analytischen Mannigfaltigkeiten existieren kann.

bestimmtheitskurve in der Umgebung des Punktes $t = t' = t'' = 0$ ist gegeben durch die vier Gleichungen

$$\mathfrak{P}_1 = 0, \quad \mathfrak{Q}_1 = 0, \quad \mathfrak{P}_2 = 0, \quad \mathfrak{Q}_2 = 0.$$

Wir eliminieren aus den Gleichungen (6a) das t'' und erhalten eine Resultante

$$R'(t, t', r_1, r_2) = 0. \tag{7a}$$

Diese Resultante verschwindet für alle Werte r_1, r_2 längs der Kurve U_1^2. Sie hat daher einen gemeinsamen Schnitt und also einen gemeinsamen Faktor mit der Resultante $X(t, t')$ der Funktionen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$. Dieser Faktor ist von den (r) unabhängig. Dividieren wir, wie oben, R' durch den Faktor, so erhalten wir eine Funktion $\mathsf{P}'(t, t', r_1, r_2)$, welche nicht mehr für alle Werte von (r) längs der Unbestimmtheitskurve verschwindet. Diese Potenzreihe besitzt also im allgemeinen ein von t, t' freies Glied $\mathsf{P}(r_1, r_2)$, welches notwendig die (r) tatsächlich enthält, sich als Potenzreihe in ihnen darstellt und für $r_1 = r_2 = 0$ verschwindet. *Alsdann liefert die Gleichung*

$$\mathsf{P}(r_1, r_2) = 0$$

die gesuchte Beziehung zwischen den r_1, r_2 in dem Punkte ((0)).*) — Diejenigen Punkte (t, t') der Kurve, an welchen kein von t, t' freies Glied existiert, können nur in endlicher Anzahl vorhanden sein: an ihnen besteht keine Beziehung zwischen r_1, r_2. Sie ordnen sich dem Falle a) unter.

Hiermit ist der aufgestellte Satz für $n = 3$ in seiner Vollständigkeit bewiesen. Die Übertragung auf allgemeines n vollzieht sich ohne Schwierigkeit.

Wir fassen die Resultate der Abschnitte b. und c. in die Worte zusammen:

Alle Wertsysteme $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ mit Ausnahme solcher, deren Gesamtheit höchstens eine endliche Anzahl $(2n-2)$-dimensionaler Kontinua bildet, werden

a. nur eine endliche Anzahl von Malen,

b. nur in regulären Punkten (bezw. einfachen Unendlichkeitspunkten) an endlichen Stellen des Fundamentalbereiches angenommen.

Die auszuschließende $(2n-2)$-dimensionale *Wertemannigfaltigkeit werde im folgenden mit V bezeichnet.* Sie hat die Eigenschaft, daß um jedes nicht zu V gehörige Wertsystem $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ sich eine gewisse Umgebung abgrenzen läßt, welche gleichfalls von V-Werten frei ist.

*) Das Resultat bedarf noch einer Ergänzung, die leicht hinzuzufügen ist. Es wird nämlich durch Elimination zwischen $\mathsf{P}(t, t', r_1 r_2) = 0$ und $X(t, t') = 0$ gezeigt, daß die *Gesamtheit der Wertsysteme, welche längs der ganzen Unbestimmtheitskurve angenommen werden, eine endliche Anzahl analytischer Mannigfaltigkeiten 2. Dimension* bildet.

d. Anzahl der gemeinsamen Nullstellen.

Es handelt sich um den Beweis des folgenden, zuerst von Weierstraß*) ausgesprochenen Satzes, der eine Vertiefung des Schlußsatzes vom letzten Paragraphen darstellt:

Alle Wertsysteme $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, *welche nicht der Mannigfaltigkeit V angehören, werden von n Funktionen im Fundamentalbereiche in der gleichen Anzahl regulärer Punkte angenommen.*

Diese Fassung ist noch nicht vollständig präzis, indem noch eine Bestimmung betreffs „mehrfacher Punkte" hinzuzufügen ist. Diese wird sich sogleich ergeben.

Zum Beweise gebrauchen wir das *Kroneckersche Charakteristikenintegral***) für die gemeinsamen Nullstellen von n Funktionen, welches eine Verallgemeinerung des Cauchyschen Integrals auf Funktionen mehrerer Variabeler darstellt. Wir werden den Kroneckerschen Satz für unsere Zwecke in folgender Form aussprechen:

Seien $f_1, f_2, \cdots, f_n$ n analytische Funktionen der n komplexen Variabelen $x, x', \cdots, x^{(n-1)}$, welche innerhalb und auf dem Rande eines endlichen Gebietes d mit stückweise analytischer Berandung regulär sind und innerhalb dieses Gebietes keinen gemeinsamen Schnitt $[0, 0, \cdots, 0]$ haben. Wir wollen ferner voraussetzen, daß auf dem Rande von d selbst keine gemeinsame Nullstelle der Funktionen liegt. Jeder gemeinsamen Nullstelle innerhalb des Gebietes wird dann eine positive ganze Zahl χ zugeordnet, welche der Charakter heißt (und der Multiplizität bei Funktionen einer Variabelen analog ist).

Dann läßt sich die Summe $\Sigma\chi$ *der Charaktere aller innerhalb d gelegenen gemeinsamen Nullstellen darstellen durch ein über die Berandung von d erstrecktes Integral*

$$\Sigma\chi = \int\limits_{(d)} \frac{P\,d\tau}{[\Sigma(N\{f_i\})]^n},$$

wo P eine auf dem Rande überall stetige und endliche, in den f_i und ihren Ableitungen analytische Funktion, $N\{f_i\}$ das Produkt aus f_i und seiner Konjugierten, schließlich $d\tau$ das Element des $(2n-1)$-dimensionalen Berandungsraumes bezeichnet.

Es sind dabei einige Bemerkungen über die Definition des Charakters χ hinzuzufügen.

*) Brief an Borchardt, Werke II, p. 131.

**) Kronecker, Berliner Monatsberichte 1869; Werke I, p. 177 ff., insbesondere p. 199, Formel B. — Siehe auch Dyck, Abhandlungen der bayrischen Akademie 1895, p. 261—277 und 1898, p. 203—224.

Für jede gemeinsame Nullstelle, an der die Funktionaldeterminante Δ der Funktionen f nicht verschwindet, ist χ gleich 1. Diese Punkte entsprechen den einfachen Nullstellen bei Funktionen einer Variabelen, denn in ihrer Umgebung sind die $x, \cdots, x^{(n-1)}$ als analytische Funktionen von $f_1, \cdots, f_n$ darstellbar*). Verschwindet dagegen Δ an einer gemeinsamen Nullstelle $(\!(\xi)\!)$, so kann man ein geeignetes, beliebig kleines Wertsystem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ so auswählen, daß Δ von Null verschieden ist für alle Punkte in der Umgebung von $(\!(\xi)\!)$, an welchen

$$f_1 - \varepsilon_1 = 0, \cdots, f_n - \varepsilon_n = 0.$$

Der Charakter χ_ξ wird dann gleich der Summe der Charaktere dieser unendlich benachbarten Punkte, d. h. gleich ihrer Anzahl, gesetzt**). Man sieht, der Begriff des Charakters stimmt vollständig überein mit dem der Multiplizität bei Funktionen einer Variabeln. Damit ist gleichzeitig die oben geforderte nähere Bestimmung betreffs mehrfacher Punkte gegeben.

Hiernach gestaltet sich der Beweis des Weierstraßschen Satzes sehr einfach. Wir können uns wieder auf drei Variabele beschränken. Die gemeinsamen Schnitte, Unendlichkeits- und Unbestimmtheitsmannigfaltigkeiten von r_1, r_2, r_3 durchsetzen keinen Teil des sechsdimensionalen Raumes $(\!(x)\!)$ überall dicht. Wir können daher um jeden regulären Punkt $(\!(x)\!)$, welcher keiner der genannten Mannigfaltigkeiten angehört, ein Gebiet d abgrenzen, welches frei von gemeinsamen Schnitten, Unendlichkeits- und Unbestimmtheitsstellen ist.

Wir betrachten nun ein nicht zu der Mannigfaltigkeit V gehöriges endliches Wertsystem $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, bezeichnen diejenigen Punkte des Fundamentalbereiches, an welchen die Funktionen r_1, r_2, r_3 dieses Wertsystem annehmen, mit $(\!(\xi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3})\!)$, ihre Anzahl mit $m_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$ und setzen außerdem voraus, daß diese Punkte sämtlich im Innern, nicht auf dem Rande des Fundamentalbereiches liegen. Sei $(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3')$ ein beliebiges anderes, endliches, nicht zu V gehöriges Wertsystem. Wir können in dem Raume der $(\!(r)\!)$ den Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ mit dem Punkte $(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3')$ durch einen ganz im Endlichen verlaufenden stetigen Weg C verbinden, welcher nirgends die Mannigfaltigkeit V trifft. In der Tat wissen wir ja, daß diese Mannigfaltigkeit aus höchstens $(2n-2)$-dimensionalen Stücken besteht, welche demnach nicht zwei Teile eines $(2n)$-dimensionalen Raumes voneinander trennen können.

Diesem Wege C im Raume der $(\!(r)\!)$ entsprechen im Raume der $(\!(x)\!)$ $m_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$ Wege c, welche von den Punkten $(\!(\xi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3})\!)$ ausgehen und das Gebiet der gemeinsamen Schnitte und Unstetigkeitsstellen nicht berühren.

*) Siehe z. B. Picard, Traité II, p. 247.

**) Runge, Math. Encyklopädie I, B 3a, p. 425.

Wir beschreiben um einen der Punkte $(\xi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3})$ ein Gebiet d, welches von gemeinsamen Schnitten und Unstetigkeitsstellen frei ist, und erstrecken über dieses Gebiet das Kroneckersche Integral, bezogen auf die Funktionen $r_1 - a_1$, $r_2 - a_2$, $r_3 - a_3$. Lassen wir die Parameter a_1, a_2, a_3, von (α) ausgehend, stetig variieren, so ändert sich auch der Integrand des Kroneckerschen Integrals stetig. Da aber das Integral nur sprungweiser Wertänderungen fähig ist, so muß es überhaupt konstant bleiben. Das heißt:

Die Funktionen r_1, r_2, r_3 nehmen innerhalb d das Wertsystem $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ genau ebenso oft an, wie alle anderen genügend benachbarten Wertsysteme.

Nun denken wir uns (α) auf dem Wege C und die (ξ) auf den entsprechenden Wegen c vorwärts bewegt und lassen dabei die (ξ) immer das Gebiet d vor sich herschieben. Da sich im Innern dieses Gebietes die Nullstellenzahl nicht ändern kann, so kann sie sich auch auf dem ganzen Wege nicht ändern, so lange (ξ) innerhalb des Fundamentalbereiches bleibt. Sie könnte sich also nur ändern, wenn einer der Punkte (ξ) auf den Rand stößt. Dann aber tritt gleichzeitig mit dem Austritt dieses Punktes ein äquivalenter Punkt $(\eta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3})$ in den Fundamentalbereich ein und folglich bleibt die Anzahl der Punkte $(\xi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3})$ überhaupt längs des ganzen Weges konstant*). Somit wird das Wertsystem $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ebenso oft angenommen wie das System $(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3')$, und unser Satz ist bewiesen. Wir haben nur noch hinzuzufügen, daß sich unendliche Wertsysteme, welche nicht zu V gehören, durch Einführung der reziproken Funktionen $\frac{1}{r}$ in der gleichen Weise behandeln lassen.

Die Zahl $m_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$ ist eine von (α) unabhängige, für das Funktionensystem charakteristische Konstante und werde mit m bezeichnet.

Der Weierstraßsche Satz läßt sich mit Hilfe einiger leichter Modifikationen auch auf V-Werte ausdehnen. Gehört nämlich ein Wertsystem (α') der Mannigfaltigkeit V an, so wird es in weniger als m isolierten, regulären Punkten angenommen. Denn gehen wir aus von einem nicht zu V gehörigen System (α), so können wir einen Weg beschreiben, welcher erst im Punkte (α') die Mannigfaltigkeit V trifft. Betrachten wir nun die zugehörigen m Wege im Raume der (x), so münden diese entweder in einen isolierten regulären Punkt ein, oder sie enden an einem Unbestimmtheitspunkte oder an einem gemeinsamen Schnitt. Die Zahl der isolierten regulären Punkte muß daher kleiner sein als m. Also:

*) Wegen der Entwickelung (2) gelten die angeführten Überlegungen unmittelbar auch für den unendlich fernen Punkt des Fundamentalbereiches, dieser bedarf daher keiner besonderen Betrachtung.

Jedes Wertsystem $((a))$ *wird im allgemeinen, aber auch höchstens an* m *regulären isolierten Punkten angenommen.*

Wichtiger aber ist die folgende Erweiterung.

Wenn für ein bestimmtes Wertsystem $((\alpha))$ keine gemeinsamen Schnitte oder Unbestimmtheitsschnitte existieren, so wird ein solches System unter allen Umständen an m isolierten Punkten angenommen, mögen diese nun reguläre oder Unbestimmtheitspunkte sein. Bezeichnen wir also mit V_1 die Mannigfaltigkeit der *Wertsysteme, welche gemeinsamen Schnitten oder Unbestimmtheitsschnitten entsprechen*, so besteht der Satz:

Alle nicht zu V_1 *gehörigen Wertsysteme* $(a_1, \cdots, a_n)$ *werden genau an* m *isolierten Punkten angenommen, alle zu* V_1 *gehörigen an weniger als* m *isolierten Punkten.*

e. Beweis des Weierstraßschen Satzes I. Poincarésche Hilfssätze.

Wir gehen nach diesen Vorbereitungen an den Beweis des in den Vorbemerkungen angekündigten Hauptsatzes I:

Jede rationale Funktion des Bereiches D läßt sich darstellen als algebraische Funktion von n *unabhängigen rationalen Funktionen* $r_1, r_2, \cdots, r_n$.

Wir benutzen zum Beweise eine von Poincaré*) angegebene, sehr elegante Methode. Sie beruht auf zwei Hilfssätzen, die zunächst abgeleitet werden sollen.

Seien $r, r_1, \cdots, r_n$ $n+1$ Funktionen des Bereichs. Wir bilden aus ihnen n von einander unabhängige Polynome mit konstanten Koeffizienten $P_1, \cdots, P_n$ und betrachten die Anzahl M der isolierten gemeinsamen Nullstellen dieser Polynome, wenn sie als Funktionen der $((x))$ aufgefaßt werden. Dann lautet der 1. Hilfssatz:

Die Anzahl der isolierten gemeinsamen Nullstellen ist im allgemeinen

---

*) Comptes Rendus, 124 (1897) p. 1407; Acta Mathematica, 26 (1902), p. 46—56. Der von Poincaré gegebene Beweis des 1. Hilfssatzes ist von dem unsrigen wesentlich verschieden, außerdem spricht Poincaré den Hilfssatz in einer etwas allgemeineren Form aus, welche aber einer unwesentlichen Berichtigung bedarf. Der Poincarésche Satz lautet, für Funktionen einer Variabelen ausgesprochen, folgendermaßen: „Eine lineare Verbindung von zwei Funktionen eines Fundamentalbereiches hat innerhalb dieses Bereiches immer die gleiche Anzahl von Nullstellen, welche von den Koeffizienten des linearen Polynoms unabhängig ist." Es kann jedoch auch vorkommen, daß für gewisse spezielle Koeffizientensysteme die Nullstellenzahl sich *reduziert*, wie das Beispiel von $\alpha\wp'(u) + \beta\wp(u)$ beweist (die Funktion hat für allgemeine Werte α drei, für $\alpha = 0$ nur zwei Nullstellen im Periodenparallelogramm). Unsere etwas speziellere Form des Satzes trägt der angedeuteten Schwierigkeit Rechnung

Im Übrigen schließt sich die hier gewählte Darstellung an die Note aus den Comptes Rendus an.

unabhängig von den Koeffizienten der Polynome P_i; d. h. die Anzahl der isolierten Nullstellen ist die gleiche für alle Koeffizientensysteme mit Ausnahme solcher spezieller, welche einer Mannigfaltigkeit niedererer Dimension angehören. Für diese speziellen Koeffizientensysteme ist die *Anzahl der isolierten Nullstellen kleiner.*

Es genügt, den Beweis für Polynome 1. Grades und für drei Variabelen zu führen. Außerdem wollen wir zur Vereinfachung des Beweises das Problem etwas spezieller fassen. Wir wollen nämlich nur diejenigen isolierten, *regulären* gemeinsamen Nullstellen der drei Polynome P_1, P_2, P_3 betrachten, *welche auf keiner Mannigfaltigkeit* $r_i = \infty$ *liegen.*

Der genaue Satz lautet dann folgendermaßen: *Die Anzahl dieser gemeinsamen Nullstellen von* P_1, P_2, P_3 *ist im allgemeinen die gleiche für alle Werte der Koeffizienten. Sie erniedrigt sich nur dann, wenn* P_1, P_2, P_3 *gemeinsame Nullschnitte oder irreguläre oder auf* $r_i = \infty$ *gelegene Nullstellen besitzen. Die Koeffizientensysteme aber, für welche diese besonderen Umstände eintreten, bilden eine Mannigfaltigkeit von geringerer Dimension.*

Seien

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv \alpha^{(1)} r + \alpha_1^{(1)} r_1 + \alpha_2^{(1)} r_2 + \alpha_3^{(1)} r_3 + \beta^{(1)}, \\ P_2 &\equiv \alpha^{(2)} r + \alpha_1^{(2)} r_1 + \alpha_2^{(2)} r_2 + \alpha_3^{(2)} r_3 + \beta^{(2)}, \\ P_3 &\equiv \alpha^{(3)} r + \alpha_1^{(3)} r_1 + \alpha_2^{(3)} r_3 + \alpha_3^{(3)} r_3 + \beta^{(3)}, \end{aligned} \tag{9}$$

die drei Polynome. Wir beweisen zunächst, daß die Zahl der betrachteten gemeinsamen Nullstellen von den letzten Koeffizienten (β) unabhängig ist. Untersuchen wir zu diesem Zwecke das System der drei Funktionen

$$\begin{aligned} \mathsf{B}^{(1)} &= \alpha^{(1)} r + \alpha_1^{(1)} r_1 + \alpha_2^{(1)} r_2 + \alpha_3^{(1)} r_3, \\ \mathsf{B}^{(2)} &= \alpha^{(2)} r + \alpha_1^{(2)} r_1 + \alpha_2^{(2)} r_2 + \alpha_3^{(2)} r_3, \\ \mathsf{B}^{(3)} &= \alpha^{(3)} r + \alpha_1^{(3)} r_1 + \alpha_2^{(3)} r_2 + \alpha_3^{(3)} r_3. \end{aligned} \tag{10}$$

Diese nehmen als rationale Funktionen des Fundamentalbereichs jedes Wertsystem $(-\beta^{(1)}, -\beta^{(2)}, -\beta^{(3)})$ an gleich vielen regulären isolierten Punkten des Fundamentalbereichs an, mit Ausnahme derjenigen Wertsysteme von geringerer Dimension, welche der Mannigfaltigkeit V angehören. Diese werden in weniger Punkten angenommen. Schalten wir schließlich aus der Schar der regulären Systeme $(\!(-\beta)\!)$ noch diejenigen aus, welche auf Flächen $r_i = \infty$ angenommen werden, so ergibt sich auf Grund des Eliminationssatzes sofort, daß diese speziellen Systeme nur eine endliche Anzahl von analytischen Mannigfaltigkeiten geringerer Dimension bilden können*).

*) Diese Mannigfaltigkeiten können außerdem keinen Teil des (β)-Raumes überall dicht erfüllen, d. h. ich kann um einen nicht der Mannigfaltigkeit angehörigen Punkt $(\!(\beta)\!)$ einen kleinen 6-dimensionalen Bereich abgrenzen, welcher gleichfalls in seiner Gesamtheit nicht der Mannigfaltigkeit angehört. Beweis folgt leicht aus der Eindeutigkeit der Funktionen r_i.

Im ganzen also bilden die ausgeschlossenen Wertsysteme nur Mannigfaltigkeiten von geringerer Dimension.

Bringen wir in (10) die Größen $-\beta^{(1)}, -\beta^{(2)}, -\beta^{(3)}$ auf die rechte Seite der Gleichungen, so ist in der Tat bewiesen, daß die Anzahl der Nullstellen der Polynome (P) von den letzten Koeffizienten (β) im allgemeinen unabhängig ist, und daß Erniedrigung der Anzahl nur in den angegebenen Fällen eintreten kann. —

In ähnlicher Weise wird die Unabhängigkeit der Nullstellenzahl von den übrigen Koeffizienten erwiesen. Wir nehmen zum Beispiel die Koeffizienten (α_1) und betrachten zu diesem Zwecke die drei Funktionen

$$(11)\qquad \begin{aligned} \mathsf{A}^{(1)} &= \frac{\alpha_1^{(1)} r_1 + \alpha_2^{(1)} r_2 + \alpha_3^{(1)} r_3 + \beta^{(1)}}{r}, \\ \mathsf{A}^{(2)} &= \frac{\alpha_1^{(2)} r_1 + \alpha_2^{(2)} r_2 + \alpha_3^{(2)} r_3 + \beta^{(2)}}{r}, \\ \mathsf{A}^{(3)} &= \frac{\alpha_1^{(3)} r_1 + \alpha_2^{(3)} r_2 + \alpha_3^{(3)} r_3 + \beta^{(3)}}{r} \text{*)}. \end{aligned}$$

Da diese Funktionen alle nicht der Mannigfaltigkeit V angehörigen Werte gleich häufig, die Ausnahmewerte aber mit geringerer Häufigkeit annehmen, so folgt, daß die drei Funktionen

$$(11)\qquad \begin{aligned} P_1' &= \frac{\alpha^{(1)} r + \alpha_1^{(1)} r_1 + \alpha_2^{(1)} r_2 + \alpha_3^{(1)} r_3 + \beta^{(1)}}{r} = \frac{P_1}{r}, \\ P_2' &= \frac{\alpha^{(2)} r + \alpha_1^{(2)} r_1 + \alpha_2^{(2)} r_2 + \alpha_3^{(2)} r_3 + \beta^{(2)}}{r} = \frac{P_2}{r}, \\ P_3' &= \frac{\alpha^{(3)} r + \alpha_1^{(3)} r_1 + \alpha_2^{(3)} r_2 + \alpha_3^{(3)} r_3 + \beta^{(3)}}{r} = \frac{P_3}{r} \end{aligned}$$

eine von den Parametern $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}$ unabhängige maximale Zahl der gemeinsamen regulären, isolierten Nullstellen besitzen, welche nur in den bekannten Ausnahmefällen nicht erreicht wird.

Daraus schließt man aber leicht auf die Nullstellen von P_1, P_2, P_3. Diese Funktionen haben nämlich alle gemeinsamen Nullstellen der Funktionen (P') — weil wir nämlich nur solche Nullstellen betrachten, welche nicht auf $r = \infty$ gelegen sind —, können aber noch einige gemeinsame Nullstellen mehr besitzen, solche nämlich, welche den Flächen $r = 0$ angehören. *Die Zahl dieser gemeinsamen Nullstellen aber ist natürlich von* $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}$ *unabhängig*, daher wird sich die Zahl der gemeinsamen regulären, isolierten Nullstellen höchstens für jedes Wertsystem der Parameter um

*) Wir übergehen der Kürze halber den speziellen Fall, daß die drei Funktionen A von einander abhängig sind. Der Fall ist leicht zu erledigen und ordnet sich in den Resultaten dem allgemeinen Falle unter.

die gleiche Zahl vermehren, ist also nach wie vor von den Parametern unabhängig.

Es wäre nur noch von den (P') auf die (P) der Schluß zu übertragen, daß Verminderung der Nullstellenzahl nur in den bekannten Ausnahmefällen (der Nullschnitte, irregulären Nullstellen) eintritt. Dies geschieht am leichtesten auf folgendem indirekten Wege: Man wähle ursprünglich in den (P) die Koeffizienten (β) so, daß keine gemeinsamen Nullstellen auf $r = 0$ vorkommen, was nach früheren Betrachtungen stets möglich ist. Dann stimmen die Nullstellen von (P) genau mit denen von P' überein, und eine Verminderung der gemeinsamen Nullstellen tritt also dann nur für solche Werte der Parameter (α) ein, für welche Nullschnitte oder irreguläre Nullstellen der (P) stattfinden. Nachdem aber dies festgelegt ist, wählen wir ein beliebiges System (α) mit maximaler Nullstellenzahl aus und lassen jetzt die (β) auf einem stetigen regulären Wege bis zu dem regulären Punkte $((\beta))$ variieren, für welchen gemeinsame Nullstellen auf $r = 0$ auftreten*). Dann bleibt bei dieser Variation der Parameter die Nullstellenzahl ungeändert, und wir sehen also, daß einem Systeme (α) nur dann eine geringere Nullstellenzahl entspricht, wenn wir uns in einem der Ausnahmefälle befinden.

Damit ist der 1. Hilfssatz, der Satz von der Unabhängigkeit der Nullstellenzahl von den Koeffizienten, vollständig bewiesen.

Wir bezeichnen nun als ein *allgemeines* Polynomsystem ein solches, welches die maximale Zahl der isolierten regulären, auf keiner Fläche $r_i = \infty$ gelegenen gemeinsamen Nullstellen besitzt. Das Charakteristikum eines solchen Systems ist einfach dies, daß es keine gemeinsamen Nullschnitte, irreguläre oder auf $r_i = \infty$ gelegene Nullstellen besitzen darf. Dieses Charakteristikum gilt für Funktionensysteme beliebigen Grades. Wir haben auch gesehen, in welcher Weise man sich *lineare* allgemeine Polynomsysteme konstruieren kann. *Die Zahl ihrer gemeinsamen Nullstellen ist eine charakteristische Zahl für das Funktionensystem* (r) *und werde mit* μ *bezeichnet.*

Der *2. Poincarésche Hilfssatz* behandelt nun die Frage: *Wie groß ist die Nullstellenzahl eines allgemeinen Polynomsystems* S_k, P_2, P_3, *wo* S_k *von dem* k^{ten} *Grade,* P_2, P_3 *linear in den* (r) *sind?*

Diese Zahl M_k läßt sich aus μ durch einen einfachen Schluß ableiten. Ist nämlich P_1, P_2, P_3 ein allgemeines lineares System, so ist

*) Wir verstehen dabei unter einem „regulären" Punkt (β) einen solchen, für welchen keine gemeinsamen Nullschnitte und irregulären Nullstellen auftreten. Ein „regulärer Weg" ist ganz aus solchen Punkten gebildet. Jeder reguläre Punkt (β) läßt sich mittels eines regulären Weges erreichen, welcher zuvor keinen irregulären Punkt $((\beta))$ trifft.

$$P_1^k,\ P_2,\ P_3$$

ein allgemeines System der Form (S_k, P_i), da gemeinsame Nullschnitte und irreguläre Nullstellen nicht vorhanden sind. Aber die Nullstellenzahl ist hier $= k \cdot \mu$. Daher ergibt sich allgemein für ein System (S_k, P_i) die Zahl

$$M_k = k \cdot \mu.$$

Dies gibt den Satz, der sofort wieder für allgemeines n ausgesprochen werden soll:

Die Zahl der isolierten, regulären, auf keiner Fläche $r_i = \infty$ gelegenen Nullstellen eines Polynomsystems

$$S_k,\ P_1,\ P_2, \cdots, P_{n-1}$$

ist im allgemeinen und auch höchstens

$$M_k = k \cdot \mu,$$

wo μ die Nullstellenzahl des allgemeinen linearen Polynomsystems, k den Grad von S_k bezeichnet.

Nach diesen Vorbereitungen kommt der Poincarésche Beweis für den Satz I auf eine einfache Konstantenabzählung hinaus. Wir wollen, bevor wir an die genaue Durchführung gehen, in Kürze den Gedankengang des Beweises angeben. Wir setzen dazu $n = 3$.

Hat ein Polynom S_k mit zwei Polynomen 1. Grades mehr als $k\mu$ reguläre Nullstellen gemein, so besteht ein gemeinsamer Schnitt $[0, 0, 0]$; besteht also das Schnittgebilde $\{P_1 = 0,\ P_2 = 0\}$ aus g getrennten analytischen Kurven, so liegt es ganz auf $S_k = 0$, wenn P_1, P_2, S_k mindestens $g(k\mu + 1)$ geeignet gewählte Nullstellen gemein haben. Liegen aber die Schnittgebilde von $k\mu + 1$ geeignet gewählten Polynompaaren (P_1, P_j) ganz auf $S_k = 0$, so hat S_k gemeinsame Nullschnitte auch mit einer zweifach unendlichen Mannigfaltigkeit von Polynompaaren, und diese Schnitte sind alle voneinander verschieden. Daher verschwindet S_k in einem 6-dimensionalen Kontinuum und folglich identisch im ganzen Raume.

Nun hat ein Polynom k^{ten} Grades in r, r_1, r_2, r_3

$$\binom{k+4}{4} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4!}. \tag{13}$$

willkürliche Koeffizienten. Andererseits verschwindet S_k nach dem Vorhergehenden identisch, wenn es an

$$g(k\mu + 1)^2 \tag{14}$$

geeignet gewählten Punkten verschwindet. Wähle ich k genügend groß, so übersteigt die Anzahl der willkürlichen Koeffizienten in S_k die Zahl (14), und es gibt daher für genügend großes k sicher ein Polynom k^{ten} Grades,

welches identisch in r, r_1, r_2, r_3 verschwindet. Dies ist aber gerade das zu beweisende Resultat.

Wir gehen hiernach daran, den exakten Beweis zu erbringen.

Seien $P_1, \cdots, P_q$; Q_1 $q+1$ Polynome 1. Grades. Wir betrachten die $(q-1)$ Polynompaare (P_1, P_j). Wir können durch geeignete Wahl des letzten Koeffizienten $b^{(1)}$ von Q_1, sowie der letzten Koeffizienten $\beta^{(j)}$ der P_j stets erreichen, daß 1) die Tripel P_1, P_j, Q_1 keine gemeinsamen Schnitte $[0, 0, 0]$ haben, daß 2) sie sich nur in regulären, nicht auf Flächen $r_i = \infty$ gelegenen Punkten schneiden, und daß 3) die Schnittpunkte (P_1, P_j, Q_1) von allen Schnittpunkten (P_1, P_i, Q_1) $(i \neq j)$ verschieden sind. Die Möglichkeit derartiger Koeffizientenbestimmung ist bei Gelegenheit der Gleichungen (9) schon bewiesen. Aus der Festsetzung 1) folgt unter anderm, daß die Flächenpaare $(P_1 = 0, P_j = 0)$ und $(P_j = 0, Q_1 = 0)$ niemals ein 4-dimensionales Kontinuum gemeinsam haben.

Betrachten wir jetzt die Gesamtheit der Schnittgebilde $\{P_1, P_j\}$, so besteht jedes derselben aus einer endlichen Anzahl analytischer Kurven, von denen einige nach Festsetzung 2) nicht ganz dem Unbestimmtheits- oder Unendlichkeitsgebiete von r, r_1, r_2, r_3 angehören. Auf jeder dieser letzteren Kurven bestimmen wir $k\mu + 1$ reguläre, von einander verschiedene Punkte $(\!(x)\!)$. Die Gesamtzahl dieser Punkte ist

$$p \leqq g(q-1)(k\mu+1),$$

wenn g die Maximalzahl von analytischen Kurven ist, in welche ein Gebilde $\{P_1, P_j\}$ zerfällt.

Wie groß auch die konstante ganze Zahl q sei, wir können k immer so groß wählen, daß $p < \binom{k+4}{4}$. Dann können wir aber die $\binom{k+4}{4}$ homogenen Koeffizienten des Polynoms S_k immer derartig bestimmen, daß $S_k = 0$ durch die sämtlichen gewählten Punkte hindurchgeht. $S_k = 0$ hat also mit jeder nicht ganz dem Unbestimmtheits- oder Unendlichkeitsgebiete angehörigen Schnittkurve aller Paare (P_1, P_j) mehr als $k\mu$ Punkte gemein. Daraus folgt nach dem 2. Hilfssatz, daß diese sämtlichen Schnittkurven auf S_k liegen müssen.

Wir nehmen nun q nicht mehr konstant, sondern setzen es $= k\mu + 2$. Dadurch wird die vorhergehende Koeffizientenbestimmung nicht beeinflußt, denn für genügend großes k ist

$$g(k\mu+1)^2 < \binom{k+4}{4}.\text{*)}$$

*) Dabei ist die Voraussetzung gemacht, daß die Zahl g nicht von k abhängt d. h. also, daß ich beliebig viele Polynome P_j finden kann, sodaß das Schnittgebilde $\{P_1, P_j\}$ immer die gleiche endliche Anzahl von Mannigfaltigkeiten umfaßt. Diese Tatsache läßt sich durch einen einfachen Schluß begründen. Die Mannigfaltigkeit der

Nun hat jedes Flächentripel $Q_1 = 0$, $P_1 = 0$, $P_j = 0$ mindestens *einen* Schnittpunkt mit $S_k = 0$ gemein. Die Flächen

$$S_k = 0, \quad Q_1 = 0, \quad P_1 = 0$$

haben daher $k\mu + 1$ Punkte gemeinsam und also einen ganzen Schnitt. Ebenso haben alle durch Variation der letzten Koeffizienten $b^{(1)}$ aus Q_1 gewonnenen Polynome $Q_1' = 0$ mit $S_k = 0$ und $P_1 = 0$ einen Schnitt gemein. Fassen wir also wieder den letzten Koeffizienten $b^{(1)}$ von Q_1 als rationale Funktion $B^{(1)}$ des Bereichs auf, so können wir sagen, daß die Funktionen $B^{(1)}$, P_i, S_k einfach unendlich viele gemeinsame Schnitte $[b^{(1)}, 0, 0]$ besitzen.

Beachten wir andererseits die Schnitte von $Q_1 = 0$ mit den Flächen $P_2 = 0, \cdots, P_q = 0$; die Fläche $P_1 = 0$ trifft jeden einzelnen dieser Schnitte in einem Punkte, welcher $S_k = 0$ angehört, und diese Punkte sind nach Voraussetzung 3) alle voneinander verschieden. Variieren wir abermals den letzten Koeffizienten $\beta^{(1)}$ von P_1, so erhalten wir eine Mannigfaltigkeit neuer Flächen, die wir mit $Q_2 = 0$ bezeichnen wollen, und welche, wenigstens für genügend wenig abweichende Parameterwerte, den Schnitt von $Q_1 = 0$ mit jedem der Polynome $P_j = 0$ in einem zu $S_k = 0$ gehörenden Punkte schneiden. Denn dieser Schnitt besteht aus einer endlichen Anzahl von Kurven, deren eine (und zwar gerade diejenige, die den Schnittpunkt von $P_1 = 0$, $P_i = 0$, $Q_1 = 0$ enthält) ganz der Fläche $S_k = 0$ angehört. Folglich hat die Fläche $S_k = 0$ mit dem Schnitt eines jeden Flächenpaares $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$ mindestens $k\mu + 1$ Punkte und daher einen ganzen Schnitt gemein.

Dies ist aber unmöglich. Bezeichnen wir nämlich wieder mit B_2 den letzten Koeffizienten von Q_2, so haben die drei Funktionen

$$S_k, \quad B_1, \quad B_2$$

eine zweifach unendliche (4-dimensionale) Mannigfaltigkeit von gemeinsamen Schnitten $[0, b^{(1)}, b^{(2)}]$, während diese Mannigfaltigkeit doch höchstens 2-dimensional sein dürfte.

Wir schließen daraus, daß die Gleichung

$$S_k = 0$$

nicht nur auf einer Fläche, sondern im ganzen Raume erfüllt sein muß, d. h. daß S_k *identisch* $= 0$ *ist.* Dies bedeutet aber gerade, was wir be-

---

Polynome P_j ist kontinuierlich, die Mannigfaltigkeit der Anzahlen der analytischen Schnittgebilde nur abzählbar. Es muß daher unendlich viele Polynome P_j geben, welche die gleiche Anzahl analytischer Schnittgebilde mit P_1 haben. — Eine anschaulich-geometrisch (freilich von mir nicht streng durchgeführte) Betrachtung gestattet übrigens dieses Resultat erheblich zu verschärfen. Es würde folgen, *daß für je zwei lineare Polynome* $\{P_i, P_j\}$ *die Anzahl der analytischen Schnittgebilde* $\leqq \mu$ *ist.*

weisen wollten, nämlich das *Bestehen einer algebraischen Relation zwischen den Funktionen* r, r_1, r_2, r_3.

Für allgemeines n ist der Beweisgang genau der gleiche.

f. Beweis des Weierstraßschen Satzes II.

Die algebraische Darstellbarkeit durch n voneinander unabhängige rationale Funktionen $r_1, \cdots, r_n$ des Bereichs ist eine notwendige Bedingung dafür, daß eine Funktion r rationale Funktion des Bereichs ist. Sie ist aber augenscheinlich nicht hinreichend. Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium liefert erst der zweite Hauptsatz, welcher eine rationale Darstellung aller Funktionen des Bereichs durch $n+1$ geeignet gewählte unter ihnen angibt. Eine präzise Fassung des Satzes werden wir erst im Laufe der Herleitung gewinnen.

Sei m die Anzahl der regulären isolierten Punkte, an welchen die $r_1, \cdots, r_n$ ein allgemeines — d. h. nicht zu V gehöriges — Wertsystem $a_1, \cdots, a_n$ annehmen. Betrachten wir dann irgend eine andere rationale Funktion r des Bereichs und die irreduzibele algebraische Gleichung $f=0$ vom Grade k, welche sie mit den $r_1, \cdots, r_n$ verbindet, so finden wir der Reihe nach für k folgende Bestimmungen:

1) *Es muß notwendig* $k \leqq m$ *sein.* Denn ist $k > m$, so hat die Gleichung $f=0$ für allgemeine Wertsysteme $(a_1, \cdots, a_n)$ der Variabelen $r_1, \cdots, r_n$ $k > m$ verschiedene Wurzeln. Da aber r eine eindeutige Funktion der $(\!(x)\!)$ ist, so darf zu jedem der m Punkte, in denen die (r) die Werte $(\!(a)\!)$ annehmen, nur *ein* Wert r gehören. Da aber k größer als m vorausgesetzt wurde, ist eine derartige Verteilung nicht möglich.

2) Wenn die Funktion r die Eigenschaft hat, für irgend ein Wertsystem $(\!(a)\!)$ *der* (r) *an allen* m *Punkten* regulär zu sein und *verschiedene Werte zu besitzen, so genügt sie sicher einer irreduzibelen Gleichung vom* m^{ten} *Grade.*

3) Da die Gradzahlen der irreduzibelen Gleichungen für alle möglichen Funktionen r des Bereiches $k \leqq m$ sein müssen, so muß ein Maximalgrad K existieren*). Wir bezeichnen mit r_{n+1} eine Funktion, welche diesen Maximalgrad besitzt.

Nun nehmen wir die Funktionen $r_1, r_2, \cdots, r_n, r_{n+1}$ und behaupten:

Hauptsatz II. *Jede rationale Funktion* r *des Bereichs läßt sich rational durch die* $r_1, r_2, \cdots, r_n, r_{n+1}$ *ausdrücken.*

---

*) In Bezug auf den Maximalgrad K läßt sich noch allgemein nachweisen, daß er ein *Teiler von* m sein muß. Ob er gleich m selbst ist, muß für jeden speziellen Bereich D besonders entschieden werden (siehe Seite 527).

Bedeutet nämlich v eine Unbestimmte, so genügt die Funktion

$$\varrho = r_{n+1} + vr$$

für beliebige endliche Werte von v einer Gleichung vom Grade K, deren Koeffizienten rationale Funktionen von den (r) und von v sind. Sei

$$\Psi(\varrho;\, v;\, r_1, \cdots, r_n) = 0$$

diese Gleichung. Sie ist identisch in v erfüllt, wenn wir für ϱ seinen Wert $r_{n+1} + vr$ einsetzen. Daher finden wir durch partielle Differentiation nach v:*)

$$(15) \qquad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial v}\right)_{\varrho = r_{n+1} + vr} + r \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varrho}\right)_{\varrho = r_{n+1} + vr} = 0.$$

Für $v = 0$ ergibt sich hieraus r als rationale Funktion von $r_1, r_2, \cdots, r_n, r_{n+1}$, deren Nenner wegen der Irreduzibilität der zwischen $r_1, r_2, \cdots, r_n;\, r_{n+1}$ bestehenden Gleichung vom Grade K in r_{n+1} nicht identisch verschwindet.

Hiermit ist die allgemeine Theorie der Funktionen mit Fundamentalbereich von n Veränderlichen zu einem gewissen Abschluß gebracht. Wir können sagen:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Funktion r rationale Funktion eines Bereiches D ist, besteht darin, daß sie sich durch $n + 1$ in der angegebenen Weise ausgewählte Funktionen $r_1, r_2, \cdots, r_n, r_{n+1}$ des Bereichs rational darstellen läßt.

---

*) Wirtinger, Automorphe Funktionen von n Veränderlichen, Wiener Sitzungsberichte, Math.-natw. Kl., 108 (1899) p. 1241 ff.

Die Wirtingersche Arbeit verfolgt gleichfalls den Zweck, die Weierstraßschen Sätze I und II nachzuweisen. Dazu betrachtet Herr Wirtinger eine rationale Funktion r des Bereichs zunächst bei konstant gehaltenen Werten der $r_2, \cdots, r_n$

$$(\mathrm{A}) \qquad r_2 = a_2, \cdots, r_n = a_n$$

als Funktion von r_1 allein und findet, daß r algebraisch in r_1 sein muß. Dieses Resultat ist richtig, solange r überhaupt auf der Mannigfaltigkeit (A) einen bestimmten Wert hat. Es kann aber auch längs der ganzen Mannigfaltigkeit unbestimmt werden (wie zum Beispiel die rationale Funktion

$$r = \frac{r_1}{r_2}\, r_3$$

auf den Geraden $r_1 = r_2 = 0$ und $r_2 = r_3 = 0$). — Sein Schlußresultat gewinnt Herr Wirtinger dann auf Grund der Voraussetzung, daß

> eine Funktion von n Veränderlichen, welche in jeder Variabelen algebraisch ist bei konstanten Werten der übrigen, auch eine algebraische Funktion von n Veränderlichen sei.

Es scheint aber, daß dieser Hilfssatz sich, wegen der möglichen Unbestimmtheiten, ohne Zuhilfenahme der genauen Resultate über gemeinsame Schnitte und Unbestimmtheitspunkte (Abschnitt b. und c. dieser Arbeit) nur schwierig wird beweisen lassen.

Es erübrigt noch, diese allgemeinen Resultate auf die speziellen in Teil II konstruierten Funktionen der Gruppe H anzuwenden. Wir haben bewiesen*), das es n voneinander unabhängige rationale Funktionen $\chi_1, \cdots, \chi_n$ des Bereiches gibt, und dazu eine weitere Funktion χ_{n+1}, welche an irgend welchen m vorgegebenen Stellen regulär ist und an ihnen niemals den gleichen Wert annimmt: Wählen wir insbesondere diejenigen m Stellen, an denen die $\chi_1, \cdots, \chi_n$ irgend ein allgemeines Wertsystem $(a_1, \cdots, a_n)$ annehmen, dann besteht zwischen den Funktionen $\chi_1, \cdots, \chi_n; \chi_{n+1}$ notwendig eine algebraische Beziehung vom genau m^{ten} Grade in χ_{n+1}, und jede andere rationale Funktion des Bereiches läßt sich demnach rational durch die $n+1$ Funktionen

$$\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n, \chi_{n+1}$$

ausdrücken.

Dasselbe Resultat läßt sich in einer etwas anderen Form aussprechen, welche die Ergebnisse der beiden letzten Teile dieser Arbeit zusammenfaßt:

Die als Quotienten von Partialbruch-Reihen Θ dargestellten Funktionen χ des Fundamentalbereichs erschöpfen den gesamten Vorrat der innerhalb des Fundamentalbereichs möglichen rationalen Funktionen, indem sich jede dieser Funktionen als rationale Verbindung von $n+1$ Funktionen χ ergibt.

---

*) Math. Ann. 56, p. 542—544.

Zur Theorie der Randwertaufgaben.*)

Von

MAX MASON in New Haven.

Daß das Dirichletsche Prinzip für die Lösung der Randwertaufgabe der Potentialtheorie nicht stichhaltig ist, hat Weierstraß erkannt, doch war es sehr lange Zeit und bei den vorzüglichsten Autoren in Geltung.

Als dieses Prinzip noch von den meisten Mathematikern als richtig angesehen wurde, ist es von H. Weber**) auf die Differentialgleichung der schwingenden Membran:

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

angewandt worden. Für eine unendliche Anzahl von Werten des Parameters λ erscheint diese Gleichung als notwendige Bedingung eines isoperimetrischen Variationsproblems und daraus schloß Weber auf die Existenz unendlich vieler auf dem Rande eines gegebenen Gebiets verschwindender Lösungen dieser Gleichung, also auf die Existenz unendlich vieler Eigenschwingungen einer Membran.

Nun ist neuerdings***) das Dirichletsche Prinzip für die Randwertaufgabe der Potentialtheorie von Hilbert gerettet worden, indem er in strenger Weise auf die Existenz einer Minimalfunktion für das der Potentialgleichung entsprechende Variationsproblem schloß. Es fragt sich, ob das Dirichletsche Prinzip nicht auch wie es von Weber angewandt worden ist, im Falle also isoperimetrischer Variationsprobleme, aufrecht erhalten werden kann.

Ein erster Schritt wäre die Aufgabe zunächst dahin zu spezialisieren, daß man nicht partielle sondern gewöhnliche Differentialgleichungen dieser Art behandelt, und zwar nach Methoden, die sich nachher bequem auf partielle Differentialgleichungen übertragen lassen.

*) Die vorliegende Arbeit bildet einen Auszug meiner in Göttingen (1903) erschienenen Dissertation. Einige Änderungen sind aber eingetreten, insbesondere wird dem Beweise der Existenz der ausgezeichneten Lösungen (§ 2) eine einfachere Gestalt gegeben.

**) Math. Ann. Bd. I, p. 1.

***) Festschrift, „Über das Dirichletsche Prinzip", Abhandlungen der K. Göttinger Gelehrtengesellschaft, Berlin 1901. Auch Jahresber. d. D. M.-V. 8 (1899) p. 184.

Wenn wir uns also in dieser Arbeit auf gewöhnliche Differentialgleichungen beschränken, so soll es unser Ziel sein, zu zeigen, daß sich die Randwertaufgaben bei diesen Differentialgleichungen in allgemeiner Weise behandeln lassen, wenn man das Wesentlichste des Dirichletschen Prinzips mit derjenigen Methode verbindet, nach welcher Fredholm die Auflösung gewisser Integralgleichungen behandelt hat. Dieser Weg erscheint auf partielle Differentialgleichungen direkt übertragbar.

Es ist natürlich, daß sich bei dieser Untersuchung manche bekannte Resultate ergeben werden, jedoch werden wir auch neues finden. Ich möchte dreierlei hervorheben: Den Nachweis der Existenz von periodischen Lösungen; die Behandlung der Randwertaufgaben bei Systemen von Differentialgleichungen; den Nachweis der Minimaleigenschaft der ausgezeichneten Lösungen.

Auch an dieser Stelle möchte ich Herrn Professor Hilbert, auf dessen Anregung ich diese Arbeit unternahm, für seinen Rat bei der Abfassung derselben meinen herzlichsten Dank aussprechen.

§ 1.

Allgemeine Sätze über die Existenz von Lösungen.

Die allgemeine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung wird durch eine Transformation der abhängigen Variabeln in die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A(x)y = f(x)$$

übergeführt. Der Einfachheit halber werden wir diese Gleichung betrachten. Die Funktionen A, f setzen wir im Intervalle (a, b) als stetig voraus. Wir werden einen Parameter λ als Faktor vor der Funktion A hinzufügen, und die Lösungen der Gleichung bezüglich ihrer Abhängigkeit von λ betrachten. Es handelt sich um die Existenz stetiger, stetig differentiierbarer reeller Lösungen der Differentialgleichung:

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \lambda A(x)y = f(x),$$

welche die Eigenschaft haben, eine der folgenden vier Randbedingungen zu befriedigen:

I. $\quad y(a) = c_1, \qquad y(b) = c_2$

II. $\quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a} = c_1, \qquad \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=b} = c_2$

III. $\quad \left[y + \alpha\frac{dy}{dx}\right]_{x=a} = c_1, \qquad \left[y + \beta\frac{dy}{dx}\right]_{x=b} = c_2$

IV. $\quad y(a) - y(b) = c_1, \qquad \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a} - \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=b} = c_2.$

Dabei bedeuten c_1, c_2, α, β vorgeschriebene Konstante. Wir werden der Kürze halber nur die erste dieser Randbedingungen ausführlich behandeln und die Resultate in den anderen Fällen angeben.

Es sei

$$L(y) = \frac{d^2y}{dx^2} + \lambda A(x) y$$

gesetzt. Bedeuten y, v irgend zwei im Intervalle (x_0, x_1) zweimal stetig differentiierbare Funktionen, so bekommt man durch teilweise Integration die Formel:

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \{ v L(y) - y L(v) \} \, dx = \left[v \frac{dy}{dx} - y \frac{dv}{dx} \right]_{x_0}^{x_1}.$$

Nehmen wir für y eine stetige stetig differentiierbare Lösung der Gleichung (1), deren Existenz wir zunächst postulieren, und für v die „eindimensionale Greensche Funktion erster Art“, $G(x, \xi)$, der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ für das Intervall (a, b), welche folgendermaßen lautet*):

$$G(x, \xi) = \frac{(b - \xi)(x - a)}{b - a} \qquad \text{für } x \leqq \xi$$

$$G(x, \xi) = \frac{(b - x)(\xi - a)}{b - a} \qquad \text{für } x \geqq \xi.$$

Wenden wir (2) auf die Intervalle $(a, \xi - \varepsilon)$, $(\xi + \varepsilon, b)$ an, addieren und gehen zur Grenze $\varepsilon = 0$ über, so folgt:

$$(3) \qquad y(\xi) = - \left[y(x) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} \right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b G(x, \xi) f(x) dx + \lambda \int_a^b G(x, \xi) A(x) y(x) dx.$$

Schreibt man $y(a) = c_1$, $y(b) = c_2$ und

$$F(\xi) = \frac{c_1 (b - \xi) + c_2 (\xi - a)}{b - a} - \int_a^b G(x, \xi) f(x) dx$$

so nimmt diese Gleichung die Form an:

$$(4) \qquad y(\xi) = F(\xi) + \lambda \int_a^b G(x, \xi) A(x) y(x) dx.$$

Diese Gleichung hat Geltung für jede stetig differentiierbare Lösung von (1). Sehen wir nun y als unbekannt, c_1, c_2 als vorgeschriebene Kon-

*) Der Begriff einer eindimensionalen Greenschen Funktion ist zuerst von Burkhardt (Bull. soc. math. 22 (1894) p. 71) für die Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ eingeführt worden und später von Bôcher (Amer. Bull. (1901) p. 297) allgemeiner definiert worden.

stante an, so bildet (4) eine Integralgleichung für die Bestimmung von y. Durch zweimalige Differentiation zeigt man leicht unter Berücksichtigung der Eigenschaften von G, daß jede Lösung der Integralgleichung (4) eine stetig differentiierbare Lösung der Differentialgleichung (1) ist. Diese Lösung y genügt also auch der Gleichung (3). Ziehen wir (4) von (3) ab, so folgt für alle ξ:

$$(b-\xi)(c_1-y(a))+(\xi-a)(c_2-y(b))=0.$$

Diese Gleichung kann aber nur dann identisch in ξ bestehen, wenn $y(a)=c_1$, $y(b)=c_2$ ist. *Das Problem der Integration der Differentialgleichung* (1) *unter der Randbedingung* $y(a)=c_1$, $y(b)=c_2$ *ist also völlig gleichwertig dem Problem, die Integralgleichung* (3) *ohne Randbedingung aufzulösen.*

Nun ist (3) eine Integralgleichung von der Art wie sie Fredholm*) behandelt hat. Das Entscheidende für die Existenz von Lösungen von (3) besteht darin, ob die Funktion $F(\xi)$ identisch Null ist oder nicht. $F(\xi)$ ist aber nur dann identisch Null, wenn gleichzeitig:

$$f(x)\equiv 0, \qquad c_1=0, \qquad c_2=0$$

ist, oder wie wir sagen wollen, wenn die vorgelegte Randwertaufgabe „vollständig homogen" ist. In der Tat, verschwindet $F(\xi)$ identisch in ξ, so ist

$$\frac{d^2F}{d\xi^2}\equiv f(\xi)\equiv 0.$$

Folglich muß

$$c_1(b-\xi)+c_2(\xi-a)\equiv 0$$

sein, und dies ist nur möglich wenn $c_1=0$, $c_2=0$ ist. Wir sind nun im Stande, die Fredholmschen Sätze anzuwenden. Schreiben wir zur Abkürzung:

$$\Delta(s_1,s_2,\cdots,s_n)=\begin{vmatrix} G(s_1,s_1) & G(s_1,s_2) & \cdots & G(s_1,s_n)\\ G(s_2,s_1) & G(s_2,s_2) & \cdots & G(s_2,s_n)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ G(s_n,s_1) & G(s_n,s_2) & \cdots & G(s_n,s_n)\end{vmatrix}$$

so läßt sich die Fredholmsche „Determinante" für die Gleichung (4), D, folgendermaßen schreiben:

$$D=1+\lambda\int_a^b\Delta(s_1)A(s_1)ds_1+\frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b\Delta(s_1,s_2)A(s_1)A(s_2)ds_1ds_2$$
$$+\frac{\lambda^3}{3!}\int_a^b\int_a^b\int_a^b\Delta(s_1,s_2,s_3)A(s_1)A(s_2)A(s_3)ds_1ds_2ds_3+\cdots.$$

*) J. Fredholm, Acta Math. 27 (1903) p. 365 ff.

Diese ganze transzendente Funktion D möge die Nullstellen λ_k besitzen, welche wir, ihrer Bedeutung nach, mit Pockels*) als ausgezeichnete Parameterwerte bezeichnen. Die Fredholmschen Sätze über die Auflösung der Integralgleichung ergeben sofort folgende Existenzsätze:

Ist nicht gleichzeitig $f(x) \equiv 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, *dann existiert stets eine und nur eine stetig differentiierbare Lösung der Randwertaufgabe für jeden Wert des Parameters* λ, *ausgenommen die ausgezeichneten Werte* λ_k: *Für* $\lambda = \lambda_k$ *existiert im allgemeinen keine solche Lösung.*

Ist dagegen die vorgelegte Randwertaufgabe vollständig homogen, so existiert wenigstens eine von Null verschiedene Lösung, dann und nur dann, wenn der Parameter λ *einen ausgezeichneten Wert* λ_k *besitzt. Solche Lösungen nennen wir ausgezeichnete Lösungen.***)

Die Behandlung der Randwertaufgabe III des ersten Paragraphen lautet der obigen ganz ähnlich. Statt der oben benutzten Greenschen Funktion erster Art der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ gebraucht man die Greensche Funktion dritter Art derselben Gleichung, welche lautet:

$$G_3(x, \xi) = \frac{(b + \beta - \xi)(x - a - \alpha)}{b - a + \beta - \alpha} \qquad \text{für } x \leq \xi.$$

Für $x > \xi$ vertauschen wir x und ξ. Diese Funktion befriedigt die Randbedingung III § 1 wobei $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ ist. Zur Behandlung der Randbedingungen II und IV bedient man sich der Funktionen:

$$G_2(x, \xi) = \frac{e^{x+\xi} + e^{2a+\xi-x} + e^{2b+x-\xi} + e^{2a+2b-x-\xi}}{2(e^{2a} - e^{2b})}; \quad x \leq \xi$$

$$G_4(x, \xi) = \frac{e^{x-\xi} - e^{\xi-x} + e^{\xi+a-b-x} - e^{x+b-a-\xi}}{2(e^{a-b} - 2 + e^{b-a})}; \quad x \leq \xi.$$

Für $x > \xi$ vertauschen wir x und ξ. Diese Funktionen sind die Greenschen Funktionen zweiter bezw. vierter Art der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ und genügen den Randbedingungen II bezw. IV für $c_1 = 0$, $c_2 = 0$. Unter Benutzung dieser Funktion beweist man die nämlichen Existenzsätze für die Randbedingungen II, III, IV wie für den oben behandelten Fall I.

§ 2.

Existenz der ausgezeichneten Lösungen.

Eine stetig differentiierbare Lösung der Differentialgleichung

$$(1^0) \qquad L(y) \equiv \frac{d^2y}{dx^2} + \lambda A(x) y = 0$$

*) F. Pockels: Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. Leipzig 1891.

**) Pockels, loc. cit.

unter der i^{ten} der Randbedingungen I, II, III, IV, wo die Konstanten c_1, c_2 den Wert Null haben, existiert dann und nur dann, wenn der Parameter λ eine Nullstelle der der betreffenden Randbedingung entsprechenden ganzen transzendenten Funktion D ist. Es bleibt dann zu untersuchen, ob es solche Nullstellen gibt und wie groß ihre Mannigfaltigkeit ist. Diese Fragen werden wir hier behandeln, und zwar unter der Voraussetzung, daß die Funktion $A(x)$ im Intervalle (a, b) ihre Vorzeichen nicht wechselt, also etwa

$$A(x) \geqq 0 \qquad (a \leqq x \leqq b).$$

In den Fällen I, II, III ist das Problem von Sturm in seinen Abhandlungen im ersten Bande des Journal de Mathematique (1836) zuerst behandelt worden. Später ist Picard*) mit der Methode der successiven Approximationen an den Fall I herangetreten. Der Fall IV ist besonders interessant, da er auf periodische Lösungen führt, hat aber noch keine nähere Bearbeitung gefunden.

Wir werden hier den Existenzbeweis führen, indem wir von der Tatsache Gebrauch machen, daß die Differentialgleichung (1) als Lagrangesche notwendige Bedingung eines Variationsproblems aufgefaßt werden kann.**) Wir knüpfen also an das Dirichletsche Prinzip an, ersetzen aber die falsche Schlußweise durch einen strengen Beweis. Auf Grund der im vorhergehenden Paragraphen gewonnenen Sätze wird es aber gelingen, diesen Beweis ohne einen Konvergenzbeweis durchzuführen.

Betrachten wir die vollständig homogene erste Randwertaufgabe, also die Auflösung der Gleichung

$$(1^0) \qquad L(y) \equiv \frac{d^2y}{dx^2} + \lambda A(x) y = 0, \qquad A(x) \geqq 0,$$

unter der Randbedingung

$$\mathrm{I}^0 \qquad y(a) = 0, \qquad y(b) = 0.$$

Wir legen das folgende Variationsproblem zu Grunde: *Das Integral*

$$J(y) = \int_a^b \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

soll zu einem Minimum gemacht werden unter den Bedingungen, daß $y(x)$ eine im Intervalle (a, b) zweimal stetig differentiierbare Funktion ist, und daß

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0, \quad K(y) = \int_a^b A y^2 dx = 1$$

*) Siehe Picards Traité d'analyse 3 (1896) p. 105 ff.

**) Siehe H. Weber: Math. Ann. Bd. I p. 1 für die Behandlung der drei ersten Randwertaufgaben der der Gleichung (1) entsprechenden partiellen Differentialgleichung $\Delta u + \lambda \varphi u = 0$ durch die damals als richtig anerkannte Dirichletsche Schlußweise.

ist, wo A die in der Gleichung (1) *vorkommende im Intervalle* (a, b) *positive Funktion ist.*

Unter allen solchen Funktionen y wissen wir nicht ob es eine gibt, welche dem Integrale J den kleinsten Wert erteilt; dagegen gibt es eine endliche bestimmte *untere Grenze* λ_0 aller dieser Werte von J. Wir behaupten:

Diese untere Grenze λ_0 ist der kleinste ausgezeichnete Parameterwert für die Randbedingung I^0: *Die zu λ_0 gehörige ausgezeichnete Lösung y_0 der Gleichung* (1^0) *unter der Bedingung* I^0 *ist die Lösung des aufgestellten Variationsproblems.*

Nach der Definition von λ_0 können wir eine unendliche Reihe von Funktionen

$$y_1, y_2, y_3, \cdots$$

auswählen derart, daß jede Funktion allen Bedingungen des Variationsproblems genügt, und daß

$$\lim_{h=\infty} J(y_h) = \lambda_0 \tag{2}$$

ist. Definieren wir eine unendliche Reihe stetiger Funktionen f_h durch die Gleichungen:

$$\frac{d^2 y_h}{dx^2} + \lambda_0 A y_h = f_h. \tag{3}$$

Multiplizieren wir diese Identität mit y_h und integrieren von a bis b, so folgt

$$\lambda_0 - J(y_h) = \int_a^b y_h f_h \, dx,$$

also nach (2) ist

$$\lim_{h=\infty} \int_a^b y_h f_h \, dx = 0. \tag{4}$$

Es sei nun

$$v_1, v_2, v_3, \cdots$$

eine unendliche Reihe irgend welcher zweimal stetig differentiierbarer Funktionen, welche für $x = a$ und $x = b$ verschwinden. Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{d^2 v_h}{dx^2} + \lambda_0 A v_h = g_h.$$

Wir behaupten nun: die Gleichung

$$\lim_{h=\infty} \int_a^b y_h g_h \, dx = 0 \tag{5}$$

muß Geltung haben, falls die Funktionen v_h der Bedingung

$$(6) \qquad \left| \int_a^b v_h g_h dx \right| < B \qquad (h = 1, 2, 3, \cdots)$$

genügen, wo B eine angebbare von h unabhängige Zahl ist.

Zum Beweise dieser Behauptung nehmen wir im Gegenteil an, es liesse sich aus den Funktionspaaren y_h, v_h eine unendliche Reihe solcher, etwa die Paare y_h', v_h', auswählen derart, daß für alle h

$$(5') \qquad \int_a^b y_h' g_h' dx \geqq \varrho \text{ oder } \leqq \varrho$$

wäre, wo ϱ im ersten Falle eine positive, im zweiten Falle eine negative von h unabhängige Zahl ist.

Betrachten wir die Funktionen $\eta_h = y_h' + c v_h'$, wo c eine Konstante bedeutet. Multiplizieren wir die Identität

$$\frac{d^2 \eta_h}{dx^2} + \lambda_0 A \eta_h = f_h' + c g_h'$$

mit $\eta_h = y_h' + c v_h'$ und integrieren von a bis b, so folgt:

$$\lambda_0 K(\eta_h) - J(\eta_h) = \int_a^b y_h' f_h dx + c^2 \int_a^b v_h' g_h dx + c \int_a^b (v_h' f_h + y_h' g_h) dx.$$

Aber

$$\int_a^b (v_h' f_h - y_h' g_h) dx = \int_a^b \left\{ v_h' \left(\frac{d^2 y_h'}{dx^2} + \lambda_0 A y_h' \right) + y_h' \left(\frac{d^2 v_h'}{dx^2} + \lambda_0 A v_h' \right) \right\} dx = 0.$$

Also ist

$$\lambda_0 K(\eta_h) - J(\eta_h) = \int_a^b y_h' f_h dx + c^2 \int_a^b v_h' g_h dx + 2c \int_a^b y_h' g_h dx.$$

Nehmen wir nun für c eine solche Zahl, daß

$$\varrho c > 0, \qquad 2 c \varrho > c^2 B$$

ist, und schreiben wir $2 c \varrho - c^2 B = \delta^2$. Dann ist für alle h

$$\lambda_0 K(\eta_h) - J(\eta_h) \geqq \int_a^b y_h' f_h dx + \delta^2.$$

Nun ist δ^2 eine positive von h unabhängige Zahl, und nach (4) ist

$$\lim_{h=\infty} \int_a^b y_h' f_h dx = 0.$$

Folglich können wir h so groß wählen, etwa $h = H$, daß

$$\lambda_0 K(\eta_H) - J(\eta_H) > 0$$

ausfällt. η_H ist also nicht identisch Null, und da $A(x) > 0$ ist, so ist $\alpha = \sqrt{K(\eta_H)}$ eine reelle Zahl. Dann ist

$$y(x) = \frac{1}{\alpha}\,\eta_H(x)$$

eine stetige zweimal stetig differentiierbare Funktion, welche den Bedingungen des Variationsproblems

$$y(a) = 0, \qquad y(b) = 0, \qquad K(y) = 1 \qquad .$$

genügt, und für welche

$$\lambda_0 > J(y)$$

ist. Nach der Definition von λ_0 ist dies aber unmöglich. Folglich ist die Annahme (5′) falsch, und die Gleichung (5) muß Geltung haben unter der Bedingung (6).

Unsere Behauptung über λ_0 zu beweisen, nehmen wir nun im Gegenteile an, es wäre λ_0 kein ausgezeichneter Wert für unsere Randwertaufgabe. Nach den Sätzen des vorigen Paragraphen existiere dann je eine stetig differentiierbare Lösung v_h der Gleichungen

$$\frac{d^2 v_h}{dx^2} + \lambda_0 A v_h = A y_h \qquad (h = 1, 2, 3, \cdots)$$

unter den Randbedingungen $v_h(a) = 0$, $v_h(b) = 0$. Diese Funktionen v_h genügen der Bedingung (6). Denn $v_h(\xi)$ ist eine Lösung der Integralgleichung (4) des § 1 wobei $F(\xi)$ den Wert besitzt:

$$F(\xi) = -\int_a^b G(x,\xi) A(x) y_h(x)\, dx$$

v_h hat also die Form*)

$$v_h(x) = -\int_a^b G(\xi, x) A(\xi) y_h(\xi)\, d\xi + \int_a^b\!\!\int_a^b \frac{D\binom{x}{y}}{D}\, G(\xi, y) A(\xi) y_h(\xi)\, d\xi\, dy,$$

wo $\dfrac{D\binom{x}{y}}{D}$ eine endliche stetige Funktion bedeutet. Ist Δ das Maximum des absoluten Wertes dieser Funktion, so ist, da $|G(x,\xi)| \leq \frac{a+b}{2}$ ist,

$$\left|\int_a^b v_h A y_h\, dx\right| < m \int_a^b\!\!\int_a^b \left|A(x) y_h(x)\right| \cdot \left|A(\xi) y_h(\xi)\right| dx\, d\xi$$

wo $m = \frac{a+b}{2}(1 + \Delta(b-a))$ ist. Aber

*) Fredholm loc. cit p. 373.

$$\left\{\int_a^b \left| A(x)\, y_h(x) \right| dx\right\}^2 < (b-a)\int_a^b A^2 y_h^2\, dx,$$

denn nach einem Satze von Schwarz*) ist

$$\left\{\int_a^b \varphi\psi\, dx\right\}^2 < \int_a^b \varphi^2 dx \int_a^b \psi^2 dx.$$

Schreiben wir A für das Maximum von $A(x)$, so ist also

$$\left|\int_a^b v_h A u_h\, dx\right| < m\mathsf{A}(b-a) \qquad (h = 1, 2, 3, \cdots)$$

denn für alle h ist $K(y_h) = 1$.

Die obigen Funktionen v_h genügen also der Bedingung (6), und folglich nach (5):

$$\lim_{h=\infty} \int_a^b y_h A y_h\, dx = \lim_{h=\infty} K(y_h) = 0.$$

Dies ist aber unmöglich, denn für alle h ist $K(y_h) = 1$.

Unsere Annahme über λ_0 ist also falsch, und folglich ist die untere Grenze λ_0 ein ausgezeichneter Parameterwert für die erste Randbedingung. Nach den Sätzen des § 1 existiert also eine für $x = a$ und $x = b$ verschwindende ausgezeichnete Lösung y_0 der Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda_0 A y = 0.$$

Den willkürlichen Faktor von y_0 denken wir uns so bestimmt, daß $K(y_0) = 1$ ist. Die Lösung y_0 befriedigt alle Bedingungen des Variationsproblems, und aus der Differentialgleichung folgt $J(y_0) = \lambda_0$. y_0 ist also die Lösung des Variationsproblems. Ferner ist λ_0 der kleinste ausgezeichnete Parameterwert für die erste Randbedingung, denn gäbe es einen kleineren λ', so würde die zugehörige Lösung y', wenn ihr Faktor so bestimmt wäre, daß $K(y') = 1$, allen Bedingungen des Variationsproblems genügen, und es wäre $J(y') = \lambda' < \lambda_0$ und dies ist unmöglich.

Die am Anfang des Paragraphen aufgestellte Behauptung ist also bewiesen. Aus der Minimaleigenschaft der Funktion y_0 ist es ferner leicht zu zeigen, daß y_0 innerhalb des Intervalls (a, b) nicht verschwindet, und daß der erste ausgezeichnete Wert λ_0 eine abnehmende Funktion der Intervallänge $b - a$ ist.

Die Existenz einer zweiten ausgezeichneten Lösung zu beweisen, betrachten wir folgendes Variationsproblem: Das Integral

---

*) Ges. Abh. p. 251.

$$J(y) = \int_a^b \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

soll zu einem Minimum gemacht werden, unter den Bedingungen

$$y(a) = 0 = y(b), \quad K(y) = \int_a^b Ay^2 dx = 1, \quad K'(y_0, y) = \int_a^b Ay_0 y\, dx = 0.$$

Nur durch die letzte, die Funktion y_0 ausschliessende Bedingung unterscheidet sich dieses Problem von dem früheren. Die untere Grenze aller Werte von J unter diesen Bedingungen nennen wir λ_1.

Wir behaupten: *Wäre $\lambda_1 = \lambda_0$ so existiere für diesen Wert von λ eine zweite von y_0 linear unabhängige ausgezeichnete Lösung unserer Randwertaufgabe.* Nach den Fredholmschen Sätzen ist nun die Existenz einer zweiten ausgezeichneten Lösung eine notwendige Folge des Verschwindens der ersten „Unterdeterminante $D\binom{\xi}{\eta}$ von D"*) Nehmen wir an $D\binom{\xi}{\eta}$ wäre von Null verschieden für $\lambda = \lambda_1 = \lambda_0$; zeigen wir daß dies auf einen Widerspruch führt, so ist unsere Behauptung bewiesen.

Wählen wir eine unendliche Funktionenreihe

$$y_1, y_2, y_3, \cdot \cdot$$

aus, von der Art, daß alle y_h den Bedingungen des neuen Variationsproblems genügen, und daß

$$\lim_{h=\infty} J(y_h) = \lambda_1 = \lambda_0$$

ist. Es sind nun nur zwei Punkte zu überlegen um die frühere Beweismethode anzuwenden. Erstens muß die Existenz der für $x = a$ und $x = b$ verschwindenden Lösungen der Gleichungen

$$\frac{d^2 v_h}{dx^2} + \lambda_0 A v_h = A y_h \qquad (h = 1, 2, 3, \cdots)$$

bewiesen werden, wo y_h die neuen Annäherungsfunktionen sind; zweitens muß gezeigt werden, daß die Funktionen $\eta_h = y_h + cv_h$ für alle Werte von c der Bedingung $K'(y_0, \eta_h) = 0$ genügen, oder, da $K'(y_0, y_h) = 0$ ist, daß die Funktionen v_h der Bedingung $K'(y_0, v_h) = 0$ genügen.

Die Lösungen v_h existieren. Denn ist $\lambda = \lambda_k$, einer Nullstelle von D aber keiner Nullstelle von $D\binom{\xi}{\eta}$, dann existiert nach den Fredholmschen Sätzen eine Lösung unserer Integralgleichung (4) § 1 dann und nur dann, wenn $F(\xi)$ der Bedingung

$$\int_a^b F(\xi) D\binom{\alpha}{\xi} d\xi = 0$$

*) Fredholm, loc. cit. p. 376—378.

für alle Werte der Konstanten α genügt. Nun ist in diesem Falle

$$F(\xi) = -\int_a^b A(x)\, y_h(x)\, G(x, \xi)\, dx,$$

und, wie man sofort aus den Fredholmschen Formeln sieht:

$$D\binom{\alpha}{\xi} = \frac{A(\xi)}{A(\alpha)}\, D\binom{\xi}{\alpha} = \text{const.}\ A(\xi)\, y_0(\xi) = \text{const.}\ \frac{d^2 y_0(\xi)}{d\xi^2}.$$

Nun ist $G(x, \xi)$ die Greensche Funktion erster Art der Gleichung $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$, also ist $F(\xi)$ die für $x = a$ und $x = b$ verschwindende Lösung der Gleichung

$$\frac{d^2 F(\xi)}{d\xi^2} = A(\xi)\, y_h(\xi).$$

Nach teilweiser Integration nimmt also die obige Bedingung die Form an:

$$\int_a^b A(\xi)\, y_0(\xi)\, y_h(\xi)\, d\xi = K'(y_0, y_h) = 0.$$

Nach der Definition der Funktionen y_h ist diese Gleichung in der Tat erfüllt. Folglich existieren die Funktionen v_h. Diese Funktionen sind nicht eindeutig bestimmt, sie lassen sich aber in der Form

$$v_h = V_h + c_h y_0$$

schreiben, wo die Konstanten c_h irgend welche Werte besitzen können. Nehmen wir

$$c_h = -K'(y_0, V_h)$$

so befriedigen alle Funktionen v_h die Gleichung $K'(y_0, v_h) = 0$, und daher ist für alle h, $K'(y_0, \eta_h) = 0$, $(\eta_h = y_0 + c v_h)$.

Nach dieser Überlegung läßt sich die frühere Beweismethode ungeändert auf diesen Fall anwenden. Der Widerspruch wird gezeigt, und somit unsere Behauptung bewiesen.

Nun kann bekanntlich keine stetige stetig differentiierbare Lösung der Gleichung $L(y) = 0$ gleichzeitig mit ihrer ersten Ableitung verschwinden, ohne identisch Null zu sein. Daraus folgt leicht, daß es nicht zwei voneinander linear unabhängige ausgezeichnete Lösungen für denselben Parameterwert geben kann. Die obige Überlegung hat dann für die *erste* Randwertaufgabe nur zur Folge, daß $\lambda_1 > \lambda_0$ ist. In der Behandlung der vierten Randwertaufgabe dient aber diese Entwicklung als Existenzbeweis, denn es kann in jenem Falle ganz gut vorkommen, daß zwei linear unabhängige ausgezeichnete Lösungen für denselben Parameterwert existieren.

Es ist also $\lambda_1 > \lambda_0$. Genau wie früher folgt nun, das λ_1 ein ausgezeichneter Parameterwert ist; denn bei dem Beweise, daß die Annahme des Gegenteils zu einem Widerspruch führt, ist nur zu beachten, daß die

Funktionen η_h die neue Bedingung $K'(y_0, \eta_h) = 0$ befriedigen, und, da $\lambda_1 > \lambda_0$, $K'(y_0, y_h) = 0$ ist, folgt diese Gleichung nach einer einfachen Rechnung.

Das Verfahren läßt sich unbegrenzt fortsetzen, und folglich gilt das Theorem:

Es existiert eine unendliche Reihe stets wachsender ausgezeichneter Parameterwerte λ_i *und zugehöriger ausgezeichneter Lösungen* y_i *der Differentialgleichung* $\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda A(x)y = 0$ *unter der Randbedingung* $y(a) = 0$, $y(b) = 0$: *Die Funktion* y_i *ist die Lösung des Variationsproblems* $J(y) =$ *Minimum unter den Bedingungen* $y(a) = 0$, $y(b) = 0$, $K(y) = 1$, $K'(y_j, y) = 0$ $(j = 0, 1, 2, \cdots, i-1)$, *und erteilt dem Integrale* J *den Wert* λ_i.

Durch geringe Änderungen beweist man in derselben Weise die Existenz je einer unendlichen Reihe stets wachsender ausgezeichneter Parameterwerte für die Fälle II und III, d. h. die Existenz einer unendlichen Reihe ausgezeichneter Lösungen der Differentialgleichung $L(y) = 0$ unter der Randbedingung II bezw. III des § 1, wobei $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ ist. Im Falle II ist die i^{te} ausgezeichnete Lösung, die wir der Randbedingung II entsprechend mit $y_{2,i}$ bezeichnen, die Lösung des Variationsproblems $J(y) =$ Minimum unter den Bedingungen $K(y) = 1$, $K'(y_{2,j}, y) = 0$ $(j = 0, 1, \cdots, i-1)$ unter gar keinen Randbedingungen. Im Falle III ist die i^{te} ausgezeichnete Lösung $y_{3,i}$ die Lösung des Variationsproblems

$$\int_a^b \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx - \frac{1}{\alpha}[y(a)]^2 + \frac{1}{\beta}[y(b)]^2 = \text{Minimum}$$

unter den Bedingungen $K(y) = 1$, $K'(y_{3,j}, y) = 0$ $(j = 0, 1, \cdots, i-1)$.

Ist die Funktion $A(x)$ periodisch mit der Periode $b - a$, so handelt es sich bei der Randbedingung

$$\text{IV}^0 \qquad y(a) = y(b), \qquad \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a} = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=b}$$

um die Existenz periodischer Lösungen der Differentialgleichung $L(y) = 0$. Wie oben bemerkt unterscheidet sich diese Randbedingung von den übrigen dadurch, daß zwei ausgezeichnete Parameterwerte zusammenfallen können. In diesem Falle gewinnt man den Satz:

Es existiert eine unendliche Reihe ausgezeichneter Parameterwerte $\lambda = \lambda_{4,i}$ *und zugehöriger periodischer Lösungen* $y = y_{4,i}$ *der Gleichung* $L(y) = 0$, *wo die positive Funktion* $A(x)$ *periodisch ist, und auch bei zusammenfallenden Parameterwerten sind die zugehörigen periodischen Lösungen linear unabhängig: Die Funktion* $y_{4,i}$ *ist die Lösung des Variationsproblems* $J(y) =$ *Minimum unter den Bedingungen* $y(a) = y(b)$, $K(y) = 1$, $K'(y_{4,i}, y) = 0$ $(j = 0, 1, 2, \cdots, i-1)$.

§ 3.

Ausdehnung auf Systeme von Differentialgleichungen.

Als ein Beispiel für die Ausdehnung der obigen Methode auf Systeme von Differentialgleichungen, werden wir die Behandlung der Frage nach der Existenz von Lösungen des Systems

$$(1)\qquad \begin{cases} L_1(y,z) \equiv \dfrac{d^2y}{dx^2} + \lambda\,(A_{11}(x)y + A_{12}(x)z) = f_1(x) \\[2ex] L_2(y,z) = \dfrac{d^2z}{dx^2} + \lambda\,(A_{21}(x)y + A_{22}(x)z) = f_2(x) \end{cases}$$

unter den Randbedingungen

$$\mathrm{I}\qquad y(a) = c_1,\quad y(b) = c_2,\quad z(a) = d_1,\quad z(b) = d_2$$

kurz andeuten.

Allgemeine Existenzsätze zu gewinnen, folgen wir den Entwicklungen des ersten Paragraphen. Mit Hilfe der dort angegebenen Greenschen Funktion erster Art wird diese Randwertaufgabe auf die Auflösung eines Systems von Integralgleichungen zurückgeführt. Dieses System ist aber sofort ohne Elimination auf eine Integralgleichung der Form:

$$(2)\qquad u(\xi) = F(\xi) + \lambda\int_a^{2b-a} A(x,\xi)\,u(x)\,dx$$

zu reduzieren.*) Hierbei sieht man leicht, daß $F(\xi)$ nur dann identisch verschwindet, wenn gleichzeitig $c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0$, $f_1 \equiv 0$, $f_2 \equiv 0$ ist. Tritt dieser Fall ein, so nennen wir die vorgelegte Randwertaufgabe „vollständig homogen".

Die der Integralgleichung (2) zugehörige Fredholmsche „Determinante" D möge die Nullstellen λ_k besitzen, welche wir als ausgezeichnete Parameterwerte bezeichnen. Aus den Fredholmschen Sätzen gewinnen wir dann sofort folgende Existenzsätze:

Ist die vorgelegte Randwertaufgabe nicht vollständig homogen, dann existiert für jeden Wert des Parameters λ, ausgenommen die ausgezeichneten Werte λ_k, stets ein und nur ein Lösungspaar y, z des Systems (1) unter den Randbedingungen I. Für $\lambda = \lambda_k$ existiert im allgemeinen keine solche Lösung.

Ist die vorgelegte Randwertaufgabe vollständig homogen, so existiert ein von Null verschiedenes Lösungspaar dann und nur dann, wenn λ einen ausgezeichneten Wert λ_k besitzt. Solche Lösungen nennen wir ausgezeichnete Lösungen.

---

*) Fredholm, loc. cit.

Genau die obigen Existenzsätze gelten für den Fall, daß andere, den Gleichungen II, III, IV § 1 entsprechenden Randbedingungen in Betracht gezogen werden.

Die Existenz der ausgezeichneten Lösungen zu beweisen, knüpfen wir wieder an ein Variationsproblem an. Wir setzen voraus, daß die Koeffizienten A_{ik} den Bedingungen

$$A_{12} = A_{21}, \quad A_{11} > 0, \quad A_{11} A_{12} > A_{12}^2$$

für alle x im Intervalle (a, b) genügen.

Betrachten wir dann folgendes Variationsproblem: Das Integral

$$J(y, z) = \int_a^b \left\{ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \right\} dx$$

soll zu einem Minimum gemacht werden, unter den Bedingungen, daß y, z stetige zweimal stetig differentiierbare Funktionen sind, welche für $x = a$ und für $x = b$ verschwinden und die Gleichung

$$K(y, z) = \int_a^b \{ A_{11} y^2 + 2 A_{12} y z + A_{22} z^2 \} dx = 1$$

befriedigen.

Die untere Grenze der Werte von J unter diesen Bedingungen nennen wir λ_0. Wir behaupten: λ_0 ist der kleinste ausgezeichnete Parameterwert für unsere Randwertaufgabe.

Nach der Definition von λ_0 können wir eine unendliche Reihe Funktionenpaare y_h, z_h auswählen von der Art, daß jedes Paar den Bedingungen des Variationsproblems genügt, und daß

$$\lim_{h=\infty} J(y_h, z_h) = \lambda_0$$

ist. Definieren wir nun die Funktionen f_h, g_h durch die Gleichungen:

$$L_1(y_h, z_h) = f_h, \qquad L_2(y_h, z_h) = g_h.$$

Aus diesen Identitäten folgt durch Addition und teilweise Integration:

$$(4) \qquad \lim_{h=\infty} \int_a^b \{ y_h f_h + z_h g_h \} dx = 0.$$

Es seien nun zwei unendliche Reihen zweimal stetig differentiierbarer für $x = a$ und $x = b$ verschwindender Funktionen u_h, v_h betrachtet. Schreiben wir

$$L_1(u_h, v_h) = \varphi_h, \qquad L_2(u_h, v_h) = \psi_h.$$

Durch eine direkte Ausdehnung der Methoden des § 2 folgt nun mit Hilfe

der Gleichung (4), daß die Gleichung

$$\lim_{h=\infty} \int_a^b \{\varphi_h y_h + \psi_h z_h\}\, dx = 0 \tag{5}$$

gelten muß, falls die Funktionen u_h, v_h der Bedingung

$$\left|\int_a^b \{\varphi_h u_h + \psi_h z_h\}\, dx\right| < B \qquad (h = 1, 2, \cdots) \tag{6}$$

genügt, wo B eine angebbare feste Zahl ist, wie in § 2. Nehmen wir nun an, λ_0 wäre kein ausgezeichneter Parameterwert für diese Randwertaufgabe. Nach den allgemeinen Sätzen existiere dann für jedes h ein für $x = a$ und $x = b$ verschwindendes Lösungspaar u_h, v_h der Gleichungen:

$$L_1(u_h, v_h) = A_{11} y_h + A_{12} z_h, \qquad L_2(u_h, v_h) = A_{21} y_h + A_{22} z_h$$

und zwar würden diese Funktionen u_h, v_h die Bedingung (6) erfüllen, wie man in derselben Weise wie in § 2 zeigen kann.

Folglich müßte nach (5) die Gleichung

$$\lim_{h=\infty} \int_a^b \{A_{11} y_h^2 + 2 A_{12} y_h z_h + A_{22} z_h^2\}\, dx = \lim_{h=\infty} K(y_h, z_h) = 0$$

Geltung haben; aber für alle h ist $K(y_h, z_h) = 1$.

Folglich ist in der Tat λ_0 ein ausgezeichneter Parameterwert für die Randwertaufgabe, und es existiert also für $\lambda = \lambda_0$ ein ausgezeichnetes Lösungspaar y_0, z_0 unserer vollständig homogenen Randwertaufgabe. Ist der willkürlich konstante Faktor von y_0 und z_0 so bestimmt, daß $K(y_0, z_0) = 1$ ist, so bildet y_0, z_0 die Lösung des aufgestellten Variationsproblems, wie man aus den Differentialgleichungen leicht zeigt. Ferner ist λ_0 der kleinste ausgezeichnete Wert, den es für diese Randbedingung geben kann.

Die Existenz unbegrenzt vieler weiterer ausgezeichneter Lösungen beweist man wie früher durch Zugrundelegen geänderter Variationsprobleme; zunächst fügt man dem obigen Problem die Bedingung hinzu:

$$K'(y_0, z_0, y, z) = \int_a^b \{A_{11} y_0 y + A_{12} y_0 z + A_{21} z_0 y + A_{22} z_0 z\}\, dx = 0$$

usw. Man gewinnt dann das Theorem:

Es existiert eine unendliche Reihe ausgezeichneter Parameterwerte λ_i und zugehöriger Lösungspaare y_i, z_i des Systems $L_1(y, z) = 0$, $L_2(y, z) = 0$ unter der Randbedingung $y(a) = z(a) = y(b) = z(b) = 0$, und auch bei

zusammenfallenden Parameterwerten sind die zugehörigen Lösungspaare linear unabhängig.

Die Funktionen y_i, z_i *bilden die Lösung des Variationsproblems* $J(y, z) =$ *Minimum unter den Bedingungen* $y(a) = z(a) = y(b) = z(b) = 0$, $K(y, z) = 1$, $K'(y_j, z_j, y, z) = 0$ $(j = 0, 1, \cdots, i-1)$, *und erteilen dem Integrale* J *den Wert* λ_i.

Ähnliche Existenzsätze für andere homogene Randbedingungen, insbesondere die Existenz von periodischen Lösungen falls die Funktionen A_{ik} periodisch sind, beweist man durch geringe Änderungen dieser Methode.

Boston, 1903.

Über arithmetische Eigenschaften analytischer Funktionen.

Von

Georg Faber in Traunstein.

Der vorliegende Aufsatz knüpft an zwei den gleichen Titel führende Arbeiten des Herrn Stäckel im 46. Bde. der Math. Ann. und im 25. Bde. der acta mathematica an; es sollen nämlich im folgenden zunächst (s. § 1) die von Herrn Stäckel in seiner ersten Arbeit gefundenen Resultate auf ganz anderem Wege neu abgeleitet und zugleich zu viel allgemeineren Aussagen erweitert werden. Dabei wird auch die von Herrn Stäckel am Ende seiner zweiten Arbeit aufgeworfene aber unerledigt gelassene Frage, ob es *transzendente* Funktionen gibt, die an allen *algebraischen Stellen samt ihren sämtlichen Ableitungen algebraische Werte annehmen*, in bejahendem Sinne beantwortet. Nach einigen Bemerkungen allgemeiner Art werden dann im zweiten Paragraphen Typen transzendenter Funktionen angegeben, die genau wie e^x an allen *algebraischen Stellen* samt sämtlichen Ableitungen *transzendente Werte* annehmen.

§ 1.

Theorem: Wenn die analytische Funktion $F(x)$ in dem beliebigen Gebiete S regulären Verhaltens ist, so lassen sich auf unendlich viele Weisen analytische Funktionen $\Phi(x)$ von folgenden Eigenschaften konstruieren:

$\Phi(x)$ verhält sich regulär in S und es ist daselbst die Differenz

$$|F(x) - \Phi(x)| < \varepsilon, \tag{1}$$

wo ε eine beliebig gegebene Zahl bedeutet; nur wenn *sämtliche* Punkte der Ebene innere oder Begrenzungspunkte von S sind, kann diese Ungleichung für die Umgebung *eines* solchen Punktes nicht gelten. Ferner nimmt $\Phi(x)$ samt sämtlichen Ableitungen in allen *algebraischen* Punkten von S *rationale* Werte an.

Vermöge (1) kann die gegebene Funktion $F(x)$ durch solche Funktionen $\Phi(x)$ mit beliebiger Genauigkeit approximiert werden.

Beim Beweise wird nur der Umstand benutzt, daß die *algebraischen* Punkte *abzählbar*, die *rationalen überall dicht* sind; in der Aussage des obigen Theorems lassen sich also die des kürzeren und bestimmteren Ausdrucks halber gewählten Begriffe „algebraisch" und „rational" durch die angegebenen allgemeineren ersetzen. Es darf sogar für jeden der Funktionswerte $\Phi^\nu(\alpha_\varkappa)$ — wobei $\nu = 0, 1, 2\cdots$, und $\varkappa = 1, 2\cdots$ — jedesmal eine andere dichte Zahlenmenge, der dieser Funktionswert angehören soll, vorgeschrieben werden.

Den Beweis führe ich nur aus unter der Annahme, daß das erwähnte Gebiet S die ganze Ebene mit Ausschluß des Punktes ∞ ist; in diesem Fall nimmt das obige Theorem die folgende Fassung an: *Es gibt ganze transzendente Funktionen $G(x)$, die samt sämtlichen Ableitungen in allen algebraischen Punkten x rationale Werte annehmen und die in einem um den Nullpunkt beschriebenen Kreise mit dem beliebig großen Radius R der Bedingung*

$$|F(x) - G(x)| < \varepsilon \tag{2}$$

genügen, wo ε eine gegebene Zahl und $F(x)$ eine beliebig vorgelegte ganze Funktion z. B. e^x ist.

Der Gedanke des Beweises ist der, daß zunächst der Bedingung (2) dadurch genügt wird, daß die Koeffizienten b_ν der als Potenzreihe aufzustellenden Funktion

$$G(x) = \sum b_\nu (x-\alpha)^\nu \tag{3}$$

den gleich hohen Koeffizienten a_ν der gegebenen Potenzreihe

$$F(x) = \sum a_\nu (x-\alpha)^\nu \tag{4}$$

genügend nane gebracht werden durch die Bedingungen:

$$|b_\nu - a_\nu| < |\varepsilon_\nu|, \qquad (\nu = 0, 1, 2\cdots) \tag{5}$$

wo die ε_ν so gewählt sind, daß

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ |\varepsilon_\nu| > 0 \\ &\text{b)}\ \lim \sqrt[\nu]{|\varepsilon_\nu|} = 0 \\ &\text{c)}\ \sum_0^\infty |\varepsilon_\nu| (R + |\alpha|)^\nu < \varepsilon. \end{aligned} \tag{6}$$

Für die außerdem von $G(x)$ zu erfüllenden abzählbar unendlich vielen Bedingungen hat man eine abzählbare Menge von Koeffizienten b_ν zur Verfügung, die in den durch (5) vorgeschriebenen Intervallen zu wählen sind.

Es wird angenommen, daß der Punkt α um den die Entwicklungen (3) und (4) gelten, *kein algebraischer* ist.

Sind die algebraischen Punkte in irgend einer Reihenfolge: $\alpha_1 \alpha_2 \cdots$,

so sind die $G(x)$ aufzuerlegenden Bedingungen die, daß die Funktionswerte

$$(7)\quad \begin{aligned}&G(\alpha_1),\ G'(\alpha_1);\ G(\alpha_2),\ G'(\alpha_2),\ G''(\alpha_1),\ G''(\alpha_2);\ G(\alpha_3),\ G'(\alpha_3),\ G''(\alpha_3),\\ &G'''(\alpha_1),\ G'''(\alpha_2),\ G'''(\alpha_3);\ G(\alpha_4),\ G'(\alpha_4)\cdots\end{aligned}$$

rational werden. Die Reihe (7) ist nichts anderes als eine Anordnung der zweifach unendlichen Folge $G^{\nu}(\alpha_\mu)$ — $\nu = 0, 1, 2\cdots$; $\mu = 1, 2\cdots$ — zu einer einfach unendlichen; ich schreibe dafür im folgenden kürzer

$$(8)\qquad G_1,\ G_2,\ G_3\cdots.$$

Die analoge Reihe der Funktionswerte von $F(x)$ und seinen Ableitungen: $F(\alpha_1)$, $F'(\alpha_1)$ usw. nenne ich

$$(9)\qquad F_1,\ F_2,\ F_3\cdots.$$

Je nachdem nun $F_1 = \sum a_\nu(\alpha_1 - \alpha)^\nu$ rational ist oder nicht, setze ich $b_0 = a_0$ oder $b_0 = a_0 + \delta_0$, wo δ_0 im übrigen beliebig aber so zu wählen ist, daß der Bedingung (5) genügt und die Reihe $b_0 + \sum_1^\infty a_\nu(\alpha_1 - \alpha)^\nu = \delta_0 + F_1$ eine rationale Zahl darstellt.

Für die Koeffizienten b_1 und b_2 werden nun folgende Gleichungen aufgestellt (I. System):

$$(10)\quad \begin{aligned} b_1(\alpha_1-\alpha) + b_2(\alpha_1-\alpha)^2 &= a_1(\alpha_1-\alpha) + a_2(\alpha_1-\alpha)^2\\ b_1 + 2b_2(\alpha_1-\alpha) &= a_1 + 2a_2(\alpha_1-\alpha) + \delta_1.\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der zweiten dieser Gleichungen ist δ_1 so zu wählen, daß *erstens* der Wert der Reihe $\sum_1^\infty \nu a_\nu(\alpha_1-\alpha)^{\nu-1} + \delta_1$ rational wird, und daß *zweitens* die sich durch Auflösung von (10) ergebenden Werte von b_1 und b_2 der Ungleichung (5) genügen. Die letztere Bedingung wird erfüllt, wenn $|\delta_1|$ hinreichend klein ist; denn für $\delta_1 = 0$, was einem rationalen Wert der Reihe $\sum_1^\infty \nu a_\nu(\alpha_1-\alpha)^{\nu-1}$ entspräche, ergibt sich $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$; also wird da die Lösungen linearer Gleichungen stetige Funktionen der Koeffizienten sind, mit δ_1 auch $|b_1 - a_1|$ und $|b_2 - a_2|$ beliebig klein.

Darauf werden die drei Koeffizienten b_3, b_4, b_5 unter Hinzuziehung der Bedingung, daß G_3 ($\equiv G(\alpha_2)$) rational werden soll, durch folgende lineare Gleichungen bestimmt (II. System):

$$(11)\quad \begin{aligned} \sum_3^5 b_\nu(\alpha_1-\alpha)^\nu &= \sum_3^5 a_\nu(\alpha_1-\alpha)^\nu\\ \sum_3^5 \nu b_\nu(\alpha_1-\alpha)^{\nu-1} &= \sum_3^5 \nu a_\nu(\alpha_1-\alpha)^{\nu-1}\\ \sum_3^5 b_\nu(\alpha_2-\alpha)^\nu &= \sum_3^5 a_\nu(\alpha_2-\alpha)^\nu + \delta_2\end{aligned}$$

δ_2 ist hinreichend klein (cf. (5)) und so zu wählen, daß der Wert der Reihe $\sum_0^2 b_\nu(\alpha_2 - \alpha)^\nu + \sum_3^\infty a_\nu(\alpha_2 - \alpha)^\nu + \delta_2$ rational wird. Durch die so erfolgte Bestimmung von $b_1, b_2 \cdots b_5$ ist erreicht, daß die Reihengrenzwerte G_1, G_2, G_3 rational werden, wenn in der Potenzreihe (3) bezw. deren Ableitung die noch unbestimmten Koeffizienten $b_6, b_7 \cdots$ durch die $a_6, a_7 \cdots$ ersetzt werden; die weitere Bestimmung der $b_6, b_7 \cdots$ hat dann in der Weise zu geschehen, daß die Substitution der b_i für die a_i $(i \geqq 6)$ auf den Wert von G_1, G_2, G_3 ohne Einfluß bleibt.

Um nun das allgemeine Verfahren der Koeffizientenbestimmung anzugeben, nehme ich an, daß $b_0, b_1 \cdots b_m$ $\left(m = \frac{n(n+1)}{2} - 1\right)$ in den vorgeschriebenen Intervallen (5) schon so gefunden seien, daß die Reihen für $G_1 \cdots G_n$, wenn in denselben die noch unbestimmten Koeffizienten b_{m+1}, $b_{m+2} \cdots$ durch die entsprechenden a_ν ersetzt werden, rationale Werte annehmen (für $n = 3$, $m = 5$ trifft dies nach dem obigen bereits zu); die $(n+1)$ Koeffizienten $b_{m+1}, b_{m+2} \cdots b_{m+n+1}$ werden dann durch $(n+1)$ lineare Gleichungen (n^{tes} System) so bestimmt, daß $G_1, G_2 \cdots G_{n+1}$ rational werden, wenn die $b_{m+n+2}, b_{m+n+3} \cdots$ durch die $a_{m+n+2}, a_{m+n+3} \cdots$ ersetzt werden. Die ersten n der genannten $(n+1)$ linearen Gleichungen bezwecken, daß die Änderung der Koeffizienten $a_{m+1} \cdots a_{m+n+1}$ in $b_{m+1} \cdots b_{m+n+1}$ auf die Werte $G_1 \cdots G_n$ keinen Einfluß übt; auf ihren linken Seiten stehen daher diejenigen Glieder der Reihen für G_i $(i = 1 \cdots n)$, welche $b_{m+1} \cdots b_{m+n+1}$ enthalten, auf ihren rechten Seiten die gleich hohen Glieder von F_i; bedeutet also z. B. G_l $(l \leqq n)$ soviel wie $G^\mu(\alpha_\lambda)$, so lautet die l^{te} lineare Gleichung:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m+1}^{m+n+1} \nu(\nu-1)\cdots(\nu-\mu+1)\, b_\nu(\alpha_\lambda - \alpha)^{\nu-\mu} \\
(12) \qquad &= \sum_{m+1}^{m+n+1} \nu(\nu-1)\cdots(\nu-\mu+1)\, a_\nu(\alpha_\lambda - \alpha)^{\nu-\mu}
\end{aligned}
$$

$$\left(m + 1 = \frac{n(n+1)}{2}; \quad m + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1\right).$$

In der $(n+1)^{\text{ten}}$ Gleichung steht auf der rechten Seite noch ein additives Zusatzglied δ_n, das so zu wählen ist, daß $\delta_n + F_n$ rational wird, wenn in der Reihe für F_n die ersten m Koeffizienten a_ν durch die schon bestimmten b_ν ersetzt werden; ist dieser Wert von selber rational, so ist $\delta_n = 0$ und $b_\nu = a_\nu$ $(m < \nu \leq m + n + 1)$; andernfalls kann δ_n immer so klein gewählt werden, daß die Ungleichung (5) für alle ν, die der Bedingung $m < \nu \leqq m + n + 1$ genügen, befriedigt wird.

Die Determinanten der auftretenden Gleichungssysteme können nicht

verschwinden; es kommt nämlich jedesmal darauf an die Koeffizienten eines Polynoms $\sum_{1}^{n+1}{}^{\nu} b_{m+\nu} x^{m+\nu}$ so zu bestimmen, daß für gewisse Werte $x = \alpha_i - \alpha$ das Polynom und einige seiner Ableitungen vorgeschriebene Werte annehmen; die Determinante dieses Problems setzt sich aber aus Faktoren $(\alpha_i - \alpha)$ und $(\alpha_\varkappa - \alpha_\lambda)$ zusammen, von denen keiner verschwindet, da die α_i als unter einander und von α verschieden vorausgesetzt wurden.

Es ist nun leicht zu zeigen, daß die ganze Funktion $G(x) = \sum b_\nu (x-\alpha)^\nu$ mit den auf die angegebene Weise bestimmten Koeffizienten wirklich samt sämtlichen Ableitungen in irgend einem algebraischen Punkte einen rationalen Wert annimmt. Um den Nachweis für $G^\mu(\alpha_\lambda)$ zu erbringen, wo μ und λ irgend welche Indizes sind, beachte man, daß sich $G^\mu(\alpha_\lambda)$ in der Reihe (8) etwa als G_n wiederfindet; dann sind durch die ersten $(n-1)$ Systeme linearer Gleichungen $b_0, b_1 \cdots b_m$ $\left(m = \frac{n(n+1)}{2} - 1\right)$ so bestimmt worden, daß

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu}^{\frac{n(n+1)}{2}-1}{}^{\nu} \nu(\nu-1)\cdots(\nu-\mu+1)\, b_\nu (\alpha_\lambda - \alpha)^{\nu-\mu} \\ &+ \sum_{\frac{n(n+1)}{2}}^{\infty}{}^{\nu} \nu(\nu-1)\cdots(\nu-\mu+1)\, a_\nu (\alpha_\lambda - \alpha)^{\nu-\mu} \end{aligned} \tag{13}$$

gleich einer rationalen Zahl r wird; für (13) läßt sich, da jede aus einer konvergenten Folge herausgegriffene Teilfolge den gleichen Grenzwert hat, auch schreiben:

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu}^{\frac{n(n+1)}{2}-1}{}^{\nu} \nu(\nu-1)\cdots(\nu-\mu+1)\, b_\nu (\alpha_\nu - \alpha)^{\nu-\mu} \\ &+ \lim_{N=\infty} \sum_{\frac{n(n+1)}{2}}^{\frac{N(N+1)}{2}-1}{}^{\nu} \nu(\nu-1)\cdots(\nu-\mu+1)\, a_\nu (\alpha_\lambda - \alpha)^{\nu-\mu} = r. \end{aligned} \tag{14}$$

Nun aber bestehen die Gleichungen (cf. (12)):

$$\begin{aligned} &\sum_{\frac{s(s+1)}{2}}^{\frac{t(t+1)}{2}-1}{}^{\nu} \nu(\nu-1)\cdots(\nu-\mu+1)\, b_\nu (\alpha_\lambda - \alpha)^{\nu-\mu} \\ &= \sum_{\frac{s(s+1)}{2}}^{\frac{t(t+1)}{2}-1}{}^{\nu} \nu(\nu-1)\cdots(\nu-\mu+1)\, a_\nu (\alpha_\lambda - \alpha)^{\nu-\mu}; \qquad (n < s < t) \end{aligned} \tag{15}$$

also ergibt sich aus (14) und (15):

$$\lim_{N=\infty} \sum_{\mu}^{\frac{N(N+1)}{2}-1} \nu(\nu-1)\cdots(\nu-\mu+1)\, b_\nu(\alpha_\lambda-\alpha)^{\nu-\mu} = r \tag{16}$$

oder auch wegen der Konvergenz*) der (aus (3) durch Ableitung sich ergebenden) Reihe für $G^\mu(\alpha_\lambda)$:

$$\lim_{N=\infty} \sum_{\mu}^{N} \nu(\nu-1)\cdots(\nu-\mu+1)\, b_\nu(\alpha_\lambda-\alpha)^{\nu-\mu} = G^\mu(\alpha_\lambda) = r. \tag{17}$$

Durch den hiermit geführten Beweis erledigt sich auch derjenige des allgemeinen Satzes zu Anfang des § 1: unter Benutzung der dortigen Bezeichnungen setze man

$$\Phi(x) = F(x) + G\left(\frac{1}{x-\alpha}\right), \tag{18}$$

wo α ein Punkt außerhalb oder auf der Begrenzung von S und G eine ganze Funktion ist, deren Koeffizienten nach der im Vorhergehenden auseinandergesetzten Methode sich so bestimmen lassen, daß $\Phi(x)$ samt sämtlichen Ableitungen für alle algebraischen Punkte von S rational ausfällt; gleichzeitig können diese Koeffizienten so klein gewählt werden, daß $|F(x)-\Phi(x)|$ unter einer gegebenen Zahl bleibt für alle x außerhalb einer vorgezeichneten Umgebung des Punktes α, mithin für alle x von S, falls α außerhalb S liegt.

Die Erweiterung des Theorems auf Funktionen beliebig vieler Veränderlicher ist eine unmittelbare.

Das wesentliche der vorausgehenden Beweismethode lag darin, daß einer *abzählbaren* Menge von Bedingungen durch eine *abzählbare* Menge zur Verfügung stehender Koeffizienten genügt werden konnte. Ganz anders wird das Problem, wenn man eine *nicht abzählbare* Menge von Bedingungen der zu bildenden Funktion auferlegt, z. B.: $F(x)$ soll für eine *nicht abzählbare* Menge von Punkten von der Form ax sein, wo a eine eventuell mit x variierende rationale Zahl ist. Es versagt dann nicht nur die obige Methode, sondern es sind dann entweder den aufgestellten Bedingungen genügende Funktionen überhaupt *nicht möglich* oder es werden dadurch gewisse Klassen von Funktionen (z. B. die ganzen rationalen n^{ten} Grades mit ganzzahligen Koeffizienten) *charakterisiert*, was nach dem Vorhergehenden durch eine *abzählbare* Menge derartiger arithmetischer Bedingungen *nicht* zu erreichen ist.

---

*) Es stellt nämlich die Reihe (3) wegen $b_\nu = a_\nu + \varepsilon_\nu$ und $\lim \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \lim \sqrt[\nu]{|\varepsilon_\nu|} = 0$ (cf. 6b) eine ganze transzendente Funktion dar.

In dem angeführten einfachen Beispiel $\left(\frac{F(x)}{x}\right.$ rational für unendlich viele nicht abzählbare $\left.x\right)$ muß $\frac{F(x)}{x}$ gleich einer rationalen *Konstanten sein.*

Beweis: Wenn jedes rationale a durch die Beziehung $\frac{F(x)}{x} = a$ nur einer abzählbaren Menge von Stellen x zugeordnet wäre, so käme gegen die Voraussetzung überhaupt nur eine abzählbare Menge von x in Betracht; es muß daher mindestens *eine* rationale Zahl a existieren von der Art, daß an einer nicht abzählbaren Menge von Stellen $\frac{F(x)}{x} - a = 0$ ist; daraus folgt aber $\frac{F(x)}{x} - a \equiv 0$, da eine analytische Funktion, die nicht identisch Null ist, nur eine abzählbare Menge von Nullstellen haben kann.

Ganz allgemein gilt: Bilden $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \cdots$ irgend eine *abzählbare* Menge analytischer Funktionen und gelten für eine *nicht abzählbare* Menge von Stellen x die Beziehungen $F(x) = \varphi_i(x)$, wo der Index i noch von x abhängen kann, so ist $F(x)$ mit einer der Funktionen $\varphi_i(x)$ identisch. Es muß nämlich mindestens *einen* Index n geben, sodaß $F(x) - \varphi_n(x) = 0$ ist für eine nicht abzählbare Menge von Punkten x, woraus wie oben folgt $F(x) - \varphi_n(x) \equiv 0$.

Unter der Menge der $\varphi_i(x)$ kann man sich z. B. — überall ganzzahlige Koeffizienten vorausgesetzt*) — die ganzen rationalen Funktionen n^{ten} Grades, die rationalen Funktionen, deren Zähler bis zum n^{ten} und deren Nenner bis zum m^{ten} Grad ansteigt, sämtliche rationale Funktionen usw. vorstellen und erhält so für all diese Funktionsgattungen charakteristische Merkmale.

§ 2.

Da eine Funktion völlig bestimmt ist durch die Koeffizienten a_0, $a_1 \cdots$ ihrer Taylorschen Entwicklung an irgend einer Stelle, so müssen sich aus diesen Zahlen alle Eigenschaften der Funktion, insbesondere ihre *Singularitäten* und ihr mit den letzteren eng verknüpftes *arithmetisches Verhalten* ableiten lassen; die Bestimmung der Singularitäten aus dem *infinitären* Verhalten jener Koeffizienten hat in den letzten Jahren als ein Hauptproblem der modernen Funktionstheorie wesentliche Fortschritte gemacht. (Vgl. die Schrift des Herrn Hadamard: La série de Taylor, Paris 1900.) Dagegen sind allgemeine Resultate, welche auf der arithmetischen Natur der Koeffizienten beruhen und das arithmetische Verhalten der Funktion betreffen, noch sehr spärlich und ohne rechte Ver-

*) Allgemeiner kann man Koeffizienten, die irgend einer abzählbaren Menge angehören, voraussetzen.

knüpfung untereinander. Dem Theorem des § 1 läßt sich in diesem Zusammenhang nur das negative Resultat entnehmen, daß *aus der Voraussetzung, jene Koeffizienten seien rational, über die Natur der betreffenden Funktion gar keine Schlüsse gezogen werden können.* Eine Funktion kann z. B. noch eine ganz beliebige natürliche Grenze besitzen, selbst wenn an irgend welchen abzählbar unendlich vielen Stellen*) ihre Taylorsche Entwicklung lediglich rationale Koeffizienten aufweist. Man wird daher die als rational vorausgesetzten Koeffizienten einer Taylorschen Reihe noch weiteren Beschränkungen unterwerfen müssen, um zu bestimmten Aussagen über die Singularitäten und das arithmetische Verhalten der durch jene Reihe dargestellten Funktion zu gelangen. Über die bisher in dieser Richtung gefundenen Resultate s. Hadamard, a. a. O. p. 96. Auch die bekannten Lindemannschen Sätze über die Funktion e^x lassen sich unter diesem Gesichtspunkt betrachten; allerdings knüpfen die ursprünglichen Hermite-Lindemannschen Beweismethoden nur in sehr entfernter Beziehung an die Reihe $\sum \frac{x^\nu}{\nu!}$ an, während die späteren vereinfachten Beweise immer mehr von dem Bildungsgesetz der Koeffizienten dieser Reihe als Beweismittel Gebrauch machen; trotzdem scheinen alle diese Beweismethoden zu sehr auf charakteristischen Eigenschaften der Funktion e^x zu beruhen, als daß sie sich zur Beantwortung analoger Fragen für andere transzendente Funktionen z. B. der Besselschen eignen würden.

Dagegen läßt sich, wie im folgenden gezeigt werden soll, mit ganz elementaren Mitteln der Nachweis führen, daß gewisse andere allgemeine Typen beständig konvergenter Potenzreihen, deren Koeffizienten sehr einfache arithmetische Gesetze befolgen, genau wie e^x an allen algebraischen Punkten außer $x = 0$ transzendente Werte annehmen:

Ist

$$F(x) = \sum_0^\infty c_\nu x^\nu \tag{1}$$

eine beständig konvergente Potenzreihe mit rationalen (nicht notwendig reellen) Koeffizienten, und bezeichnet man mit g_n den absoluten Wert des kleinsten gemeinsamen Nenners der Brüche $c_0, c_1 \cdots c_n$, mit $R_n(x)$ die

*) Eine Funktion, deren Taylorsche Entwicklung an einer *nicht* abzählbaren Menge von Stellen jedesmal auch nur *einen* rationalen Koeffizienten aufweist, reduziert sich, wie sich auf Grund der am Ende des vorigen Paragraphen benutzten Beweismethode ergibt, auf eine *ganze rationale* Funktion: es muß nämlich der Koeffizient mindestens *einer* bestimmten Potenz, etwa der n^{ten} an einer *nicht* abzählbaren Menge von Stellen rational sein, woraus sich ergibt: $F^n(x)$ gleich einer rationalen *Konstanten*, mithin $F^{(n+1)}(x) = F^{n+2}(x) = \cdots = 0$.

Reihe $\sum_{n+1}^{\infty} c_\nu x^\nu$, so nimmt $F(x)$ an allen algebraischen Punkten außer $x=0$ transzendente Werte an, falls für jedes gegebene algebraische x unendlich viele Zahlen $n = n_1, n_2 \cdots$ existieren, von der Art, daß

$$(2) \qquad 0 < |R_n(x)| < \frac{1}{g_n^{k_n}} \text{ mit } \lim k_n = \infty.$$

Sobald $c_n \neq 0$, ist offenbar $g_n \geq \left|\frac{1}{c_n}\right|$, also

$$(3) \qquad \lim \sqrt[n]{g_n} = \infty,$$

wenn n auf solche Werte beschränkt bleibt, für welche $|c_n| > 0$ ist.

Unter die bezeichnete Kategorie fallen unzählig viele leicht zu bildende Reihen, z. B. $\sum \frac{x^\nu}{2^{\nu^\nu}}$, $\sum \frac{x^\nu}{2^{\nu!}}$, $\sum \frac{x^\nu}{(\nu!)^{\nu!}}$, allgemeiner $\sum \frac{h_\nu x^\nu}{(p_1 p_2 \cdots p_\nu)^{q_1 q_2 \cdots q_\nu}}$, wo die h_ν, p_ν, q_ν ganze Zahlen sind, von denen die ersten zwischen endlichen Grenzen zu bleiben haben (oder auch in bestimmter näher angebbarer Weise unendlich werden dürfen), die zweiten > 1 sind und die dritten mit dem Index ins Unendliche anwachsen; auch sämtliche aus diesen durch Ableitung oder Auslassung von Gliedern entstehenden unendlichen Reihen genügen der Ungleichung (2).

Die durch letztere resultierende äußerst rasche Abnahme der Koeffizienten ist, wie das Theorem des § 1 zeigt, nicht durch die Natur des Problems, sondern nur durch die zu benutzende elementare Beweismethode bedingt; dieselbe besteht im wesentlichen in der Anwendung einer Verallgemeinerung des Liouvilleschen Kriteriums für transzendente Zahlen;*) nach demselben ist eine Zahl $\alpha = \lim \frac{p_\nu}{q_\nu}$ (wo die p_ν und q_ν ganze Zahlen sind) transzendent, falls für unendlich viele Werte von n die Ungleichung gilt

$$(4) \qquad 0 < \left(\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right) < \frac{1}{q_n^{m_n}} \text{ mit } \lim_{m_n} = \infty.$$

Es soll also gezeigt werden, daß die Zahl

$$(5) \qquad \xi_1 = F(\alpha_1) = \lim_{n=\infty} \sum_0^n c_\nu \alpha_1^\nu$$

transzendent ist, wenn α_1 der irreduktibeln Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten:

$$(6) \qquad a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = 0$$

*) Journ. de math. 16 (1851) p. 133.

genügt; die andern Wurzeln dieser Gleichung seien $\alpha_2, \alpha_3 \cdots \alpha_m$. In (5) ist n auf solche nach Voraussetzung in unendlicher Häufigkeit vorhandene Werte $n_1, n_2 \cdots$ beschränkt gedacht, für die $|c_n| > 0$ und

$$(7) \qquad 0 < |R_n(\alpha_1)| < \frac{1}{g_n^{k_n}} \quad (\text{mit } \lim k_n = \infty)$$

ist. Die Gleichung (6) möge durch die Tschirnhausensche Transformation

$$(8) \qquad y = \sum_0^n c_\nu x^\nu$$

in die folgende übergehen:

$$(9) \qquad b_0^{(n)} y^m + b_1^{(n)} y^{m-1} + \cdots + b_m^{(n)} = 0$$

mit den Wurzeln $\beta_1^{(n)}, \beta_2^{(n)} \cdots \beta_m^{(n)}$, wo die $b_0^{(n)} \cdots b_m^{(n)}$ ganze Zahlen sind, und

$$(10) \qquad \beta_i^{(n)} = \sum_0^n c_\nu \alpha_i^\nu.$$

Für $b_0^{(n)}$ ergibt sich auf Grund bekannter Sätze aus der Theorie der symmetrischen Funktionen die Ungleichung:

$$(11) \qquad b_0^{(n)} \leqq g_n^m a_0^n,$$

und falls n genügend groß ist, vermöge (3):

$$(12) \qquad b_0^{(n)} < g_n^{m+1}.$$

Es ist nun zunächst die Möglichkeit zu berücksichtigen, daß die Tschirnhausentransformation (8) für alle n von einem bestimmten ab ausartet; d. h. es könnte die rechte Seite von (8) falls sie mit Benutzung von (6) als Polynom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades in x geschrieben wird, sich identisch auf eine Konstante r_n reduzieren*); dieser Wert r_n kann nicht bei allen (nicht einmal bei unendlich vielen) für die Ungleichung (7) in Betracht kommenden Werten $n = n_1, n_2 \cdots$ gleich Null sein; denn sonst wäre für alle diese Werte von n: $\xi_1 = R_n(\alpha_1)$ und diese Zahl müßte nach (7) von Null verschieden sein und doch unter jede Grenze herabsinken, was unmöglich ist.

Ist aber r_n von Null verschieden, so ist es eine rationale Zahl, deren Nenner kleiner als $g_n \cdot a_0^{n-m+1}$ ist, wie sich ergibt, wenn man auf der rechten Seite von (8) die Ersetzung der höheren Potenzen von x durch die $(m-1)^{\text{te}}$ und die niedrigeren wirklich ausführt; vermöge (3) ist dieser Nenner von r_n schließlich auch kleiner als g_n^2; weil aber andrer-

*) Diese Möglichkeit kann bei gewissen Voraussetzungen über $F(x)$ und α_1 wirklich eintreten. Beispiel: $F(x) = \sum \frac{x^{2\nu}}{(\nu!)^{\nu!}}$; $\alpha_1 = \sqrt{2}$.

seits $\xi_1 = \lim_{n=\infty} r_n$ und nach (7): $0 < |\xi_1 - r_n| < \frac{1}{g_n^{k_n}}$, so ergibt sich die Transzendenz von ξ_1 aus dem **Liouvilleschen** Kriterium (4). Dieses ist auch ausreichend, um die Transzendenz von ξ_1 festzustellen, falls α_1 eine rationale Zahl ist ($m = 1$); doch hindert nichts, bei der folgenden Beweisführung auch $m = 1$ zuzulassen.)

Der exzeptionelle Fall, daß die **Tschirnhausen**transformationen (8) sämtlich ausarten, ist erledigt; im allgemeinen Fall ist Gleichung (9) irreducibel, weil aus einer irreducibelen Gleichung (6) durch eine nicht ausartende **Tschirnhausen**transformation (8) mit rationalen Koeffizienten wieder eine irreducible hervorgeht.*)

Es werde nun angenommen, die durch (5) definierte Zahl ξ_1 sei algebraisch und genüge der irreduciblen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten:

$$e_0 x^l + e_1 x^{l-1} + \cdots + e_l = 0. \tag{13}$$

Hätten die irreduciblen Gleichungen (9) und (13) eine Wurzel gemein, so müßten sie identisch sein; dies kann von einem bestimmten $n = n_1$ ab nicht mehr der Fall sein; denn sonst müßten unendlich viele verschiedenen Werten von n entsprechende Gleichungen (9) mit (13), mithin auch untereinander identisch sein: es müßten also die m Werte:

$$\beta_i^{(n_1)} = \sum_0^{n_1} {}^{\nu} c_\nu \alpha_i^\nu \qquad (i = 1, 2 \cdots m) \tag{14}$$

mit den m Werten:

$$\beta_i^{(n_2)} = \sum_0^{n_2} {}^{\nu} c_\nu \alpha_i^\nu \qquad (n_2 > n_1) \tag{15}$$

bis auf die Reihenfolge übereinstimmen. Da es aber nur $m!$ Permutationen von m Werten gibt, die Übereinstimmung von (14) und (15) aber für unendlich viele Indicespaare n_1, n_2 stattfinden soll, so müßte es auch solche geben (und zwar unendlich viele), wo unter Beibehaltung der Reihenfolge

$$\beta_i^{(n_1)} = \beta_i^{(n_2)}, \text{ d. h.}$$

$$\sum_{n_1+1}^{n_2} {}^{\nu} c_\nu \alpha_i^\nu = 0 \text{ wäre.} \tag{16}$$

Da aber n_2 noch beliebig große Werte annehmen kann, würde Gleichung

*) Übrigens ist es nicht nötig von diesem Satze Gebrauch zu machen, da es nur auf die Ungleichung (12) für den Koeffizienten der höchsten Potenz in der irreduciblen Gleichung die $\beta_1^{(n)}$ zur Wurzel hat, ankommt; dieser Koeffizient ist aber jedenfalls, ob (9) irreducibel ist oder nicht, ein Teiler von $b_0^{(n)}$.

(16) nichts anderes aussagen als $R_{n_1}(\alpha_i) = 0$, insbesondere $R_{n_1}(\alpha_1) = 0$ entgegen der Voraussetzung (7).

Es darf somit angenommen werden, daß die Gleichungen (9) und (13) keine Wurzel gemein haben; also ist ihre Diskriminante D von Null verschieden, und da D eine ganze Zahl ist

$$D > 1. \tag{17}$$

Ferner ist

$$\Pi(\xi_i - \beta_k^{(n)})^2 = \frac{D}{b_0^{(n)^l} e_0^m}, \tag{18}$$

wo das Produkt über sämtliche Wurzeldifferenzen der Gleichungen (9) und (13) zu erstrecken ist; also

$$|\xi_1 - \beta_1^{(n)}|^2 = \frac{D}{|b_0^{(n)}|^l \, |e_0|^m \, \Pi' \, |\xi_i - \beta_k^{(n)}|^2}, \tag{19}$$

wo in Π' die Wurzeldifferenz $|\xi_1 - \beta_1^{(n)}|$ ausfällt.

Irgend eine Wurzeldifferenz $|\xi_i - \beta_k^{(n)}|$ von Π' bleibt unter einer endlichen von n unabhängigen Grenze; denn es ist $|\xi_i - \beta_k^{(n)}| < |\xi_i| + |\beta_k^{(n)}|$, und sowohl die ξ_i bleiben ihrem absoluten Betrag nach unter einer endlichen Grenze als Wurzeln der supponierten Gleichung (13), als auch die $\beta_k^{(n)}$, die ja mit wachsendem n den Grenzwerten zustreben, welche die Reihe (1) an den Nullstellen von (6) annimmt.

Daraus folgt

$$e_0^m \Pi' \, |\xi_i - \beta_k^{(n)}|^2 < G^2, \tag{20}$$

wo G eine von n unabhängige Konstante bedeutet; also mit Benutzung von (12), (17), (19), (20):

$$|\xi_1 - \beta_1^{(n)}| > \frac{1}{g_n^{\frac{(m+1)l}{2}} \cdot G}. \tag{21}$$

Andrerseits folgt aus (5), (7), (10):

$$\begin{aligned} |\xi_1 - \beta_1^{(n)}| &= |R_n(\alpha_1)| \\ &< \frac{1}{g_n^{k_n}}. \end{aligned} \tag{22}$$

Die Ungleichungen (21) und (22) widersprechen einander, wenn n und damit g_n und k_n genügend groß sind; die Annahme, daß ξ_1 eine algebraische Zahl sei, ist daher zu verwerfen.

Versteht man unter γ_i beliebige von Null, unter δ_i voneinander verschiedene algebraische Zahlen, unter $F(x)$ eine ganze Funktion, deren Rest für irgend ein beliebiges, aber bestimmtes x und für *alle**) $n > n'$ der

*) Es ist für die Führung des Beweises zweckmäßig, das Bestehen der Ungleichung (2) in diesem erweiterten Umfange vorauszusetzen, wie es bei den p. 553 angeführten Beispielen ohnehin der Fall ist.

Ungleichung (2) genügt, so läßt sich mit denselben Mitteln ohne wesentliche Schwierigkeiten — nur im einzelnen sind die Schlüsse etwas abzuändern — das folgende dem allgemeinsten Lindemannschen Satze über e^x völlig analoge Theorem beweisen:

$\sum_1^m \gamma_i F(\delta_i)$ *ist keine algebraische Zahl* — mit der einen *Ausnahme:*

Es darf nicht für alle $n > n'$, für welche x^n in $F(x)$ einen von Null verschiedenen Koeffizienten hat, $\sum_1^m \gamma_i \delta_i^n = 0$ sein. Dieser Ausnahmefall kann nur bei Reihen mit unendlich vielen verschwindenden Koeffizienten eintreten und tritt in sehr einfachen Fällen wirklich ein. Beispiel: $F(x)$ ist eine ungerade Funktion, etwa $\sum \frac{x^{2\nu+1}}{(\nu)!^{\nu!}}$, $m = 2$, $\gamma_1 = \gamma_2$, $\delta_1 = -\delta_2$.

Traunstein, November 1903.

Über die Herleitung der Differentialgleichung bei Variationsproblemen.

Von

E. Zermelo in Göttingen.

Nach der Methode von Lagrange pflegt man die erste Variation δS eines bestimmten Integrales S, dessen Maximum oder Minimum gesucht wird, durch partielle Integration so umzuformen, daß unter dem Integralzeichen nur noch die Variation δy der unbekannten Funktion selbst, aber keine ihrer Ableitungen übrig bleibt. Durch Einführung einer speziellen Variation schließt man dann auf das Verschwinden des mit δy multiplizierten Ausdruckes und damit auf das Bestehen der Lagrangeschen Differentialgleichung als einer notwendigen Bedingung für das Eintreten eines Maximums oder Minimums. Bei dieser Herleitung wird aber die Existenz und die Stetigkeit der ersten $2n$ Ableitungen der unbekannten Funktion vorausgesetzt, wenn der Integrandus von S die Ableitungen bis zur n^{ten} Ordnung enthält. Es wäre also denkbar, daß bei diesem Verfahren alle diejenigen Lösungen des Variationsproblemes verloren gingen, welche nicht so oft differentiierbar sind. Dieses Bedenken veranlaßte bereits im Jahre 1879 P. du Bois-Reymond (Math. Ann. 15) zu einer von der gebräuchlichen abweichenden Umformung der ersten Variation, welche nur die Integrierbarkeit des n^{ten} Differentialquotienten der gesuchten Funktion voraussetzt, an allen Stetigkeitsstellen dieser Ableitung aber gleichfalls auf die Notwendigkeit der Lagrangeschen Differentialgleichung führt und nun rückwärts auf die unbegrenzte Differentiierbarkeit der gesuchten Funktion zu schließen gestattet. Indessen ist diese Methode trotz ihrer Leistungsfähigkeit und prinzipiellen Bedeutung bisher fast unbeachtet geblieben.*) Aus diesem Grunde schien es mir wünschenswert, der etwas komplizierten und nicht ganz elementaren du Bois-Reymondschen Beweisführung eine neue möglichst vereinfachte Gestalt zu geben, welche auch in jeder elementaren Darstellung der Variationsrechnung verwendbar sein soll.

*) Doch vergl. neuerdings H. Hahn, Monatsh. Math. Phys. 14 (1903) p. 325, wo die angedeutete Schlußweise auf die Multiplikatorenmethode des „allgemeinen" Problemes ausgedehnt wird, und für den allereinfachsten Fall J. R. Whittemore, Ann. of math. (2) 2 (1901) p. 125.

Es sei

$$S = \int_a^b V(x, y, y', \cdots, y^{(n)})\, dx$$

das vorgelegte Integral, in welchem die Argumente $y, y', \cdots, y^{(n)}$ die gesuchte Funktion mit ihren ersten n nach x genommenen Ableitungen ausdrücken sollen. Dann muß für den Fall eines Extremums die erste Variation verschwinden, d. h. es ist:

$$(1) \qquad \delta S = \int_a^b (Y \delta y + Y_1 \delta y' + \cdots + Y_n \delta y^{(n)})\, dx = 0,$$

wo $Y, Y_1, \cdots, Y_n$ die partiellen nach $y, y', \cdots, y^{(n)}$ genommenen Ableitungen von V bedeuten und $\delta y = \eta(x)$ eine beliebige nach n facher Differentiation noch integrierbare Funktion von x ist, welche zugleich mit ihren $n-1$ ersten Ableitungen $\delta y' = \eta'(x), \cdots, \delta y^{(n-1)} = \eta^{(n-1)}(x)$ an beiden Grenzen $x = a$ und $x = b$ verschwindet und mit diesen Ableitungen im ganzen Integrationsintervall ausnahmslos stetig sein soll.

Durch partielle Integration versucht man nun nach du Bois-Reymond, alle Glieder bis auf das höchste, mit $\delta y^{(n)}$ multiplizierte aus dem Integranden der ersten Variation zu entfernen, indem man ansetzt:

$$Y\delta y + Y_1 \delta y' + \cdots + Y_n \delta y^{(n)} = \frac{d}{dx}(\Lambda_1 \delta y + \Lambda_2 \delta y' + \cdots + \Lambda_n \delta y^{(n-1)}) + \Lambda \delta y^{(n)}$$

und erhält successive durch Koeffizientenvergleichung:

$$(2) \qquad \Lambda_1' = Y,\ \Lambda_2' = Y_1 - \Lambda_1, \cdots, \Lambda_n' = Y_{n-1} - \Lambda_{n-1}$$

und schließlich:

$$(3) \quad \Lambda = \Lambda(x) = Y_n - \Lambda_n = Y_n - \int Y_{n-1} dx + \int dx \int Y_{n-2} dx - + \cdots \pm \overset{(n)}{\int} Y dx^n.$$

Wir haben also mit den so bestimmten Funktionen $\Lambda, \Lambda_1, \cdots, \Lambda_n$:

$$(4) \qquad \delta S = [\Lambda_1 \delta y + \Lambda_2 \delta y' + \cdots + \Lambda_n \delta y^{(n-1)}]_a^b + \int_a^b \Lambda \delta y^{(n)} dx = 0,$$

und für alle Variationen $\delta y = \eta(x)$, die auch den angegebenen Grenzbedingungen genügen:

$$(5) \qquad \int_a^b \Lambda(x)\, \eta^{(n)}(x)\, dx = 0.$$

Aus dieser Beziehung kann nun, was nachher ausgeführt soll, geschlossen werden, daß Λ ein Polynom $n - 1^{\text{ten}}$ Grades von x sein muß. Dann folgt aus der unbegrenzten Differentiierbarkeit von Λ auch die von y wenigstens an jeder Stetigkeitsstelle von $y^{(n)}$. Da nämlich

$$Y_n = Y_n(x, y, y', \cdots, y^{(n)})$$

ebenso wie V als eine analytische Funktion ihrer sämtlichen $n+2$ Argumente vorausgesetzt werden soll, so ist auch $y^{(n)}$ eine analytische Funktion von $x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}$, Y_n und als solche regulär an jeder regulären Stelle von Y_n, an welcher $Y_{nn} = \frac{\partial Y_n}{\partial y^{(n)}} \neq 0$ ist. Als Funktion von x betrachtet ist daher $y^{(n)}$ an jeder solchen Stelle $x = x_0$ ebenso oft differentiierbar wie Y_n, da sich jede weitere Ableitung $y^{(n+r)}$ durch die niederen Ableitungen von y und durch die nach x genommenen Ableitungen von Y_n bis zur r^{ten} ausdrücken läßt. Mit $y^{(n)}$ sind aber auch alle Funktionen $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n-1}$ und ferner gemäß (2) alle Funktionen $\Lambda_1', \Lambda_2', \cdots, \Lambda_n'$ r mal differentiierbar, und dasselbe gilt, wenn Λ ein Polynom ist, auch von der Funktion $Y_n' = \Lambda' + \Lambda_n'$. Y_n und mit ihm $y^{(n)}$ ist demnach sogar $r+1$ mal differentiierbar, also einmal mehr, als vorausgesetzt, d. h. beliebig oft.

Durch n-malige Differentiation von Λ erhält man nun für jede Stetigkeitsstelle von $y^{(n)}$, an welcher V regulär und $Y_{nn} \neq 0$ ist,

$$\Lambda^{(n)} = Y_n^{(n)} - Y_n^{(n-1)} + \cdots + Y = 0, \tag{6}$$

also die bekannte Lagrangesche Differentialgleichung für die gesuchte Funktion $y = f(x)$.

Für den Satz, *daß* $\Lambda(x)$ *unter der Voraussetzung* (5) *ein Polynom* $n - 1^{\text{ten}}$ *Grades sein muß*, gebe ich jetzt zwei verschiedene Beweise, deren erster, wie in solchen Fällen üblich, eine spezielle diskontinuierliche Variation zu Grunde legt, während der zweite, kürzer und kunstvoller, der „isoperimetrischen" Beweismethode du Bois-Reymonds näher kommt.

Erster Beweis.

Ist $g(x) = u_1 + u_2 x + \cdots + u_n x^{n-1}$ ein beliebiges Polynom $n - 1^{\text{ten}}$ Grades, so ist gemäß der Lagrangeschen Interpolationsformel für beliebige $n+1$ Argumente $x_0, x_1, \cdots, x_n$ und für $\varphi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$:

$$\frac{g(x_0)}{\varphi'(x_0)} + \frac{g(x_1)}{\varphi'(x_1)} + \cdots + \frac{g(x_n)}{\varphi'(x_n)} = 0 \tag{7}$$

und umgekehrt, wenn für $n+1$ Argumente $x_0, x_1, \cdots, x_n$ diese Bedingung erfüllt ist, so werden die entsprechenden Funktionswerte $g(x_0), g(x_1), \cdots, g(x_n)$ durch ein und dasselbe Polynom $g(x)$ dargestellt. Es ist aber auch, wenn $g(\xi, x)$ ein Polynom $n - 1^{\text{ten}}$ Grades in ξ mit dem willkürlichen Parameter x ist,

$$\frac{g(x_0, x)}{\varphi'(x_0)} + \frac{g(x_1, x)}{\varphi'(x_1)} + \cdots + \frac{g(x_n, x)}{\varphi'(x_n)} = 0. \tag{8}$$

Es seien nun $x_0, x_1, \cdots, x_n$ beliebige $n+1$ Stetigkeitsstellen der Funktion $\Lambda(x)$ im Intervalle $a \cdots b$ und h eine beliebige positive Größe, welche kleiner ist als die kleinste Differenz dieser Größen x_i. Dann betrachten

wir die folgende im ganzen Intervalle $(a \cdots b)$ mit ihren ersten $n-1$ Ableitungen stetige Funktion $\eta = \eta(x)$, deren n^{te} Ableitung in allen Teilintervallen zwischen $x_i - h$ und $x_i + h$ konstant, im ganzen Reste des Integrationsgebietes aber $= 0$ ist. Es sei nämlich für

$$a \leqq x \leqq x_0 - h \qquad \eta = 0 \qquad \eta^{(n)} = 0$$

$$x_0 - h \leqq x \leqq x_0 + h \qquad \eta = \bar{\eta}_0(x) = \frac{(x - x_0 + h)^n}{\varphi'(x_0)}, \qquad \eta^{(n)} = \frac{n!}{\varphi'(x_0)}$$

$$x_0 + h \leqq x \leqq x_1 - h \qquad \eta = \eta_0(x) = \frac{(x - x_0 + h)^n - (x - x_0 - h)^n}{\varphi'(x_0)} \qquad \eta^{(n)} = 0$$

$$x_1 - h \leqq x \leqq x_1 + h \qquad \eta = \bar{\eta}_1(x) = \eta_0(x) + \frac{(x - x_1 + h)^n}{\varphi'(x_1)} \qquad \eta^{(n)} = \frac{n!}{\varphi'(x_1)}$$

$$x_1 + h \leqq x \leqq x_2 - h \qquad \eta = \eta_1(x) = \eta_0(x) + \frac{(x - x_1 + h)^n - (x - x_1 - h)^n}{\varphi'(x_1)} \qquad \eta^{(n)} = 0$$

usw. Dann ist im letzten Intervalle:

$$x_n + h \leqq x \leqq b \qquad \eta = \eta_n(x) = \eta_{n-1}(x) + \frac{(x - x_n + h)^n - (x - x_n - h)^n}{\varphi'(x_n)} = 0,$$

denn es ist

$$g(\xi, x) = (x - \xi + h)^n - (x - \xi - h)^n$$

ein Polynom $n - 1^{\text{ten}}$ Grades in ξ, also nach (8)

$$\eta_n(x) = \frac{(x - x_0 + h)^n - (x - x_0 - h)^n}{\varphi'(x_0)} + \cdots + \frac{(x - x_n + h)^n - (x - x_n - h)^n}{\varphi'(x_n)} = 0.$$

Unsere Funktion η genügt also allen Grenz- und Stetigkeitsbedingungen der „erlaubten" Variation δy, und es ist nach Voraussetzung (5):

$$\text{(9)} \qquad \delta S = \int_a^b \Lambda \eta^{(n)} dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i - h}^{x_i + h} \Lambda \bar{\eta}_i^{(n)} dx = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{\varphi'(x_i)} \int_{x_i - h}^{x_i + h} \Lambda(x)\, dx = 0,$$

also, wenn man durch $n!\,2h$ dividiert und für $h = 0$ zur Grenze übergeht:

$$\text{(10)} \qquad \frac{\Lambda(x_0)}{\varphi'(x_0)} + \frac{\Lambda(x_1)}{\varphi'(x_1)} + \cdots + \frac{\Lambda(x_n)}{\varphi'(x_n)} = 0,$$

die Funktion $\Lambda(x)$ wird also gemäß der zu (7) gemachten Bemerkung an einer *variabelen* Stetigkeitsstelle z. B. x_0 durch dasselbe Polynom

$$\Lambda(x) = u_1 + u_2 x + \cdots + u_n x^{n-1}$$

dargestellt, dessen Koeffizienten schon durch die Funktionswerte an den *n festen* Stellen $x_1, \cdots, x_n$ bestimmt sind.

Zweiter Beweis.

Für jedes Polynom $g(x) = u_1 + u_2 x + \cdots + u_n x^{n-1}$ und für die n^{te} Ableitung $\eta^{(n)}$ einer Funktion $\eta(x)$, deren $n - 1^{\text{te}}$ Ableitung zwischen a und b stetig ist, ergibt sich durch partielle Integration:

$$(11)\quad \int_a^b g(x)\eta^{(n)}(x)\,dx = [g\eta^{(n-1)} - g'\eta^{(n-2)} + \cdots \pm g^{(n-1)}\eta]_a^b \mp \int_a^b g^{(n)}\eta\,dx,$$

wo wegen $g^{(n)}(x) = 0$ das letzte Glied verschwindet, und der ganze Ausdruck ist $= 0$, wenn die Funktion $\eta = \eta(x)$ allen Bedingungen der „erlaubten Variation" genügt, also mit ihren ersten $n-1$ Ableitungen an beiden Grenzen verschwindet.

Ist umgekehrt z eine integrierbare Funktion von x, welche für ein beliebiges Polynom $g(x)$ vom $n-1^{\text{ten}}$ Grade der Gleichung genügt

$$(12)\qquad \int_a^b g(x)\,z\,dx = 0,$$

so ist z immer die n^{te} Ableitung einer erlaubten Variation η. Denn man kann durch n-malige Integration von z zwischen den Grenzen a und x eine Funktion η bestimmen, die mit ihren ersten $n-1$ Ableitungen im Intervalle stetig ist und den *unteren* Grenzbedingungen genügt:

$$\eta(a) = 0, \cdots, \eta^{(n-1)}(a) = 0.$$

Es ist daher wegen (11) und (12):

$$\int_a^b gz\,dx = \int_a^b g\eta^{(n)}\,dx = g(b)\,\eta^{(n-1)}(b) - g'(b)\,\eta^{(n-2)}(b) + \cdots \pm g^{(n-1)}(b)\,\eta(b) = 0$$

für ein beliebiges Polynom g, d. h. für willkürliche Werte

$$g(b),\ g'(b), \cdots, g^{(n-1)}(b).$$

Daraus folgt aber, daß auch

$$\eta(b) = 0,\ \eta'(b) = 0, \cdots, \eta^{(n-1)}(b) = 0$$

sein muß, d. h. $\eta(x)$ ist eine erlaubte Variation.

Ist nun $\Lambda = \Lambda(x)$ eine im Intervall $(a \cdots b)$ integrierbare Funktion, und wieder $g(x) = u_1 + u_2 x + \cdots + u_n x^{n-1}$, so ist das Integral

$$(13)\qquad U = \int_a^b (\Lambda - g)^2\,dx = U(u_1, u_2, \cdots, u_n) \geqq 0$$

eine wesentlich positive ganze Funktion zweiten Grades der sämtlichen Größen $u_1, u_2, \cdots, u_n$ und besitzt daher ein Minimum $\overline{U}$ für irgend ein im Endlichen liegendes Wertesystem $u_1 = \bar{u}_1,\ u_2 = \bar{u}_2, \cdots, u_n = \bar{u}_n$, oder für das Polynom:

$$g = \bar{g}(x) = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 x + \cdots + \bar{u}_n x^{n-1}.$$

Es ist daher auch, wenn g wieder ein beliebiges Polynom $n-1^{\text{ten}}$ Grades und t einen von x unabhängigen Parameter bezeichnet,

$$U(t) = \int_a^b (\Lambda - \bar{g} - tg)^2 dx \geqq \overline{U} = U(0),$$

d. h. die quadratische Funktion $U(t)$ hat ein Minimum an der Stelle $t = 0$, und es muß dort ihre Ableitung verschwinden:

$$-\frac{1}{2}U'(0) = \int_a^b (\Lambda - \bar{g})g\,dx = 0 \tag{14}$$

für willkürliche Koeffizienten des Polynoms $g(x)$.
Also ist nach dem oben Bewiesenen

$$\lambda(x) = \Lambda(x) - \bar{g}(x) = \eta^{(n)}(x)$$

die n^{te} Ableitung einer erlaubten Variation, und aus der allgemeinen Voraussetzung (5) unseres Satzes:

$$\int_a^b \Lambda\eta^{(n)}\,dx = 0$$

folgt für diese spezielle Variation:

$$\int_a^b \Lambda(x)\,\lambda(x)\,dx = \int_a^b (\bar{g} + \lambda)\,\lambda\,dx = 0,$$

oder, da man in (14) für g auch $\bar{g}$ einsetzen kann:

$$\int_a^b \lambda\,\bar{g}\,dx = 0$$

weiter:

$$\int_a^b \lambda^2\,dx = \int_a^b (\Lambda(x) - \bar{g}(x))^2\,dx = 0, \tag{15}$$

und hieraus in bekannter Weise jedenfalls für alle Teilintervalle, in denen $y^{(n)}$ und damit auch Λ stetig ist:

$$\lambda(x) = \Lambda(x) - \bar{g}(x) = 0$$

oder, wie behauptet:

$$\Lambda(x) = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 x + \cdots + \bar{u}_n x^{n-1}.$$

Da das Polynom $\bar{g}(x)$, das den Ausdruck (13) zu einem Minimum macht, nichts anderes ist als die beim n^{ten} Gliede abgebrochene Entwicklung der Funktion $\Lambda(x)$ nach den *Kugelfunktionen* des Intervalles, so kann man dem zweiten Beweise auch die folgende Form geben, die ich der freundlichen Mitteilung des Herrn Erhard Schmidt verdanke.

Für ein Polynom $n - 1^{ten}$ Grades kann man immer ansetzen:

$$\bar{g}(x) = c_0 + c_1 \frac{d}{dx}(x-a)(b-x) + c_2 \frac{d^2}{dx^2}(x-a)^2(b-x)^2 + \cdots$$
$$\cdots + c_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x-a)^{n-1}(b-x)^{n-1}$$
$$= c_0 + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + \cdots + c_{n-1}P_{n-1}(x)$$

und die Koeffizienten $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ so bestimmen, daß die Funktion $\Lambda - \bar{g}(x)$ die n^{te} Ableitung einer erlaubten Variation $\delta y = \eta(x)$ darstellt. Hierzu ist nämlich nur erforderlich, daß das einfache, zweifache bis r-fache zwischen den Grenzen a und b genommene Integral der Funktion verschwindet. Man erhält also durch $r+1$-malige Integration:

$$\int_a^b dx \int_a^x (\Lambda - c_0 - c_1 P_1 - \cdots - c_{r-1} P_{r-1})\, dx^r - c_r \int_a^b (x-a)^r (b-x)^r\, dx = 0,$$

wo alle Glieder mit $c_{r+1}, c_{r+2}, \cdots, c_n$ fortfallen, weil die $r+1$fachen Integrale über die Funktionen $P_{r+1}, P_{r+2}, \cdots, P_{n-1}$ auf Ableitungen von $(x-a)^{r+s}(b-x)^{r+s}$ führen und daher zwischen den Grenzen a und b sämtlich verschwinden. Unsere Gleichung dient also, wenn die vorhergehenden Koeffizienten $c_0, c_1, \cdots, c_{r-1}$ bekannt sind, zur Bestimmung des Koeffizienten c_r, der hier mit einem von 0 verschiedenen Integral multipliziert erscheint. Somit lassen sich durch successive Berechnung der Koeffizienten alle n Integralgleichungen erfüllen, und aus der Annahme

$$\int_a^b \Lambda \eta^{(n)}\, dx = 0 \quad \text{für} \quad \eta^{(n)} = \Lambda - \bar{g}(x)$$

folgt genau wie oben

$$\int_a^b (\Lambda - \bar{g})^2\, dx = 0$$

und schließlich:

$$\Lambda = \bar{g} = c_0 + c_1 P_1(x) + \cdots + c_{n-1} P_{n-1}(x),$$

dieser Beweis führt also zu einer direkten Darstellung der Funktion $\Lambda(x)$ als Polynom $n - 1^{\text{ten}}$ Grades.

Göttingen, den 1. Dezember 1903.

Untersuchungen über die natürlichen Gleichungen krummer Flächen.

Von

Siegfried Heller in Kiel.

§ 1.

Während die natürlichen Gleichungen räumlicher Kurven von verschiedenen Autoren*) behandelt worden sind, haben die natürlichen Gleichungen krummer Flächen nur bei Bianchi**) und bei G. Scheffers***) Erwähnung gefunden.†) Die nachfolgenden Untersuchungen, die auf Anregung von Herrn Professor P. Stäckel in Kiel entstanden sind, gehen von Scheffers' Definition der natürlichen Gleichungen krummer Flächen aus.

Liegt eine Fläche vor:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v),$$

so bemerkt Scheffers zunächst, daß die Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 im Flächenpunkte (u, v), sowie die beiden von diesem Punkte ausgehenden Hauptkrümmungsrichtungen von der zufälligen Lage der Fläche und ihrer zufälligen analytischen Darstellung völlig unabhängig sind. Bezeichnet man demnach mit $\partial_1 s$ und $\partial_2 s$ die zwei von (u, v) ausgehenden, in die zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen fallenden Linienelemente, so bleiben die Größen

$$R_1, \; R_2, \; \frac{\partial R_1}{\partial_1 s}, \; \frac{\partial R_1}{\partial_2 s}, \; \frac{\partial R_2}{\partial_1 s} \quad \text{und} \quad \frac{\partial R_2}{\partial_2 s}$$

bis auf das Vorzeichen ungeändert, wenn man die Fläche allen Bewegungen des Raumes unterwirft, oder wenn man neue Parameter auf ihr einführt.

*) Vergl. G. Scheffers, „Einführung in die Theorie der Curven", Leipzig 1901. Hier findet man auch die einschlägige Literatur zusammengestellt.

**) Bianchi, „Vorlesungen über Differential-Geometrie", deutsch von Lukat, Leipzig 1899, p. 92.

***) G. Scheffers, „Einführung in die Theorie der Flächen", Leipzig 1902, p. 353.

†) Außerdem erschien in jüngster Zeit, als vorliegende Untersuchungen bereits abgeschlossen waren, eine Arbeit von E. Cesàro, „Sulla rappresentazione intrinseca delle superficie", Memorie dell' Accademia di Napoli 1903.

Ist die Funktionaldeterminante von R_1 und R_2 nach u und v von Null verschieden, so kann man u und v als Funktionen von R_1 und R_2 auffassen, wodurch sich $\frac{\partial R_1}{\partial_1 s}$, $\frac{\partial R_1}{\partial_2 s}$, $\frac{\partial R_2}{\partial_1 s}$ und $\frac{\partial R_2}{\partial_2 s}$ als Funktionen von R_1 und R_2 ergeben:

$$\frac{\partial R_1}{\partial_1 s} = \Phi_1(R_1, R_2), \quad \frac{\partial R_1}{\partial_2 s} = \Psi_1(R_1, R_2),$$
$$\frac{\partial R_2}{\partial_1 s} = \Phi_2(R_1, R_2), \quad \frac{\partial R_2}{\partial_2 s} = \Psi_2(R_1, R_2).$$

Diese Gleichungen nennt Scheffers „*die natürlichen Gleichungen der betrachteten Fläche, da sie dieselbe ohne Rücksicht auf ihre zufällige Lage und ohne Rücksicht auf ihre zufällige Parameterdarstellung vollkommen charakterisieren.*“

Eine Ausnahme bilden diejenigen Flächen, bei denen die beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 durch eine Relation verknüpft sind. Da jedoch diese Flächen, die sog. Weingartenschen oder W-Flächen, hinsichtlich ihrer natürlichen Bestimmungsstücke von Scheffers behandelt worden sind*), konnte sich die vorliegende Arbeit auf die natürlichen Gleichungen solcher reeller Flächen beschränken, die keine W-Flächen sind. Aus dieser Beschränkung erwächst der Vorteil, daß man die Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 an Stelle der Parameter u und v in die Gleichungen der Fläche einführen kann. Ihre Einführung, die ich einer Mitteilung von Herrn Professor P. Stäckel verdanke, ermöglicht es nicht nur, wie im I. Abschnitt dieser Abhandlung gezeigt wird, ganz allgemein die Beziehungen der natürlichen Gleichungen krummer Flächen zu den Fundamentalgleichungen der Flächentheorie zu ermitteln, sondern auch für eine spezielle, besonders einfache Annahme über die Funktionen Φ_1, Ψ_1, Φ_2, Ψ_2 die kartesischen Koordinaten x, y, z der zugehörigen Flächen zu berechnen.

I.

Allgemeine Untersuchungen über die natürlichen Gleichungen krummer Flächen.

§ 2.

Durch Einführung der Parameter $R_1 = u$, $R_2 = v$ auf der Fläche gehen die natürlichen Gleichungen über in:

(1) $$\Phi_1(u, v) = \frac{1}{\sqrt{E + 2Fk_1 + Gk_1^2}},$$

(2) $$\Psi_1(u, v) = \frac{1}{\sqrt{E + 2Fk_2 + Gk_2^2}},$$

*) A. a. O., p. 354 u. ff.

(3) $$\Phi_2(u, v) = \frac{k_1}{\sqrt{E + 2Fk_1 + Gk_1^2}},$$

(4) $$\Psi_2(u, v) = \frac{k_2}{\sqrt{E + 2Fk_2 + Gk_2^2}},$$

wo mit k_1 und k_2 das Verhältnis $dv : du$ längs der beiden Hauptkrümmungsrichtungen im Punkte (u, v) bezeichnet ist. Hieraus erhält man für die Hauptkrümmungsrichtungen die Gleichungen:

(5) $$k_1 = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}, \qquad k_2 = \frac{\Psi_2}{\Psi_1}.$$

Weil diese beiden Richtungen einen rechten Winkel einschließen, besteht die Gleichung:

(6) $$E\Phi_1\Psi_1 + F(\Phi_1\Psi_2 + \Phi_2\Psi_1) + G\Phi_2\Psi_2 = 0.$$

Aus den Gleichungen (1), (2) und (6) findet man nun leicht für die Fundamentalgrößen 1. Ordnung:

(7) $$E = \frac{\Phi_2^2 + \Psi_2^2}{(\Phi_2\Psi_1 - \Psi_2\Phi_1)^2},$$

(8) $$F = -\frac{\Phi_1\Phi_2 + \Psi_1\Psi_2}{(\Phi_2\Psi_1 - \Psi_2\Phi_1)^2},$$

(9) $$G = \frac{\Phi_1^2 + \Psi_1^2}{(\Phi_2\Psi_1 - \Psi_2\Phi_1)^2}.$$

Ferner ergibt sich für $D = +\sqrt{EG - F^2}$:

(10) $$D = \frac{1}{\Phi_2\Psi_1 - \Psi_2\Phi_1}.$$

Weil die Hauptkrümmungsrichtungen konjugiert sind, so bieten sich zur Bestimmung der Fundamentalgrößen 2. Ordnung sofort folgende Gleichungen dar:

(11) $$\frac{1}{u} = \frac{L + 2Mk_1 + Nk_1^2}{E + 2Fk_1 + Gk_1^2},$$

(12) $$\frac{1}{v} = \frac{L + 2Mk_2 + Nk_2^2}{E + 2Fk_2 + Gk_2^2},$$

(13) $$L + M(k_1 + k_2) + Nk_1k_2 = 0,$$

woraus unter Berücksichtigung von (5) folgt:

(14) $$L = \frac{u\Phi_2^2 + v\Psi_2^2}{uv(\Phi_2\Psi_1 - \Psi_2\Phi_1)^2},$$

(15) $$M = -\frac{u\Phi_1\Phi_2 + v\Psi_1\Psi_2}{uv(\Phi_2\Psi_1 - \Psi_2\Phi_1)^2},$$

(16) $$N = \frac{u\Phi_1^2 + v\Psi_1^2}{uv(\Phi_2\Psi_1 - \Psi_2\Phi_1)^2}.$$

Hierbei ist der Ausdruck $\Phi_2\Psi_1 - \Psi_2\Phi_1$ sicher von Null verschieden, da sonst eine W-Fläche vorläge. Wegen (10) ist auch immer:

$$\frac{1}{\Phi_2\Psi_1 - \Psi_2\Phi_1} \neq 0,$$

weil sonst D identisch verschwände; das kann aber bei reellen Flächen mit reeller Parameterdarstellung, auf die wir uns im folgenden beschränken, nur in einzelnen Punkten eintreten.

§ 3.

Damit die so gewonnenen Funktionen E, F, G, L, M, N wirklich die Fundamentalgrößen einer Fläche sind, ist erforderlich, daß sie die drei Fundamentalgleichungen der Flächentheorie erfüllen*):

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} L_v - M_u = {} & \frac{1}{2D^2}[E_v G - G_u F]L \\ & - \frac{1}{2D^2}[E_u G - G_u E + 2(E_v - F_u)F]M \\ & - \frac{1}{2D^2}[-E_u F - E_v E + 2F_u E]N. \end{aligned}$$

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} \frac{LN - M^2}{D^2} = K = {} & \frac{1}{2D^2}(2F_{uv} - E_{vv} - G_{uu}) \\ & + \frac{E}{4D^4}(G_u^2 + E_v G_v - 2G_v F_u) \\ & + \frac{G}{4D^4}(E_v^2 + E_u G_u - 2E_u F_v) \\ & + \frac{F}{4D^4}(E_u G_v - E_v G_u - 2F_u G_u - 2F_v E_v + 4F_u F_v). \end{aligned}$$

$$\text{(C)} \qquad \begin{aligned} N_u - M_v = {} & \frac{1}{2D^2}[G_u E - E_v F]N \\ & - \frac{1}{2D^2}[G_v E - E_v G + 2(G_u - F_v)F]M \\ & - \frac{1}{2D^2}[-G_v F - G_u G + 2F_v G]L.^{**)} \end{aligned}$$

Dann und nur dann, wenn diese drei Gleichungen identisch befriedigt sind, gibt es Flächen und zwar unendlich viele, welche die Funktionen E, F, G, L, M, N zu Fundamentalgrößen haben. Alle diese Flächen sind

*) G. Scheffers, Flächen, Tfl. XVII.

**) Hier und im folgenden bezeichnen die beigesetzten Indices u und v, daß nach u bezw. v partiell differentiiert ist.

mit einander kongruent; aus einer von ihnen erhält man alle übrigen, wenn man sie allen Bewegungen des Raumes unterwirft.*)

Werden demnach in den drei Fundamentalgleichungen E, F, G, L, M, N und ihre Ableitungen durch Φ_1, Ψ_1, Φ_2, Ψ_2, deren Ableitungen nach u und v, sowie durch u und v selbst ausgedrückt, so erhält man drei Bedingungsgleichungen für Φ_1, Ψ_1, Φ_2, Ψ_2, ihren ersten und zweiten Ableitungen nach u und v, sowie u und v selbst. Bei der Aufstellung dieser drei Bedingungsgleichungen wird zweckmäßig zur Abkürzung

$$\Phi_2\Psi_1 - \Psi_2\Phi_1 = \Delta$$

gesetzt. Auch erweist es sich als vorteilhaft, folgendes Symbol einzuführen:

$$\binom{r}{s} = \Psi_r\Phi_s - \Phi_r\Psi_s,$$

wodurch sich beispielsweise die abkürzende Schreibart ergibt:

$$\Psi_1\Phi_{1u} - \Phi_1\Psi_{1u} = \binom{1}{1u},$$

$$\Psi_2\Phi_{1u} - \Phi_2\Psi_{1u} = \binom{2}{1u},$$

$$\Psi_1\Phi_{2u} - \Phi_1\Psi_{2u} = \binom{1}{2u},$$

$$\Psi_2\Phi_{2u} - \Phi_2\Psi_{2u} = \binom{2}{2u},$$

$$\Delta_u = \binom{1}{2u} - \binom{2}{1u}, \text{ usw.}$$

Aus der ersten und dritten Bedingungsgleichung lassen sich durch lineare Kombination zwei einfachere Gleichungen ableiten, sodaß man schließlich sagen kann:

Wählt man unter der Voraussetzung, daß $u = R_1$, $v = R_2$ ist, vier Funktionen $\Phi_1(u, v)$, $\Psi_1(u, v)$, $\Phi_2(u, v)$ und $\Psi_2(u, v)$, für die $\Phi_2\Psi_1 - \Phi_2\Psi_1 \neq 0, \infty$ ist, so existieren dann und nur dann Flächen mit den natürlichen Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial_1 s} = \Phi_1(u, v), \qquad \frac{\partial u}{\partial_2 s} = \Psi_1(u, v),$$

$$\frac{\partial v}{\partial_1 s} = \Phi_2(u, v), \qquad \frac{\partial v}{\partial_2 s} \equiv \Psi_2(u, v),$$

wenn die Funktionen Φ_1, Ψ_1, Φ_2, Ψ_2 die drei Bedingungsgleichungen erfüllen:

*) O. Bonnet, „Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée.“ Journ. de l'École polyt., cah. 42 (1867). Vgl. auch: G. Scheffers, Flächen, pag. 338.

$$uv(u-v)\left\{\binom{1}{1\,u}+\binom{2}{1\,v}\right\}=\Psi_1(u^2\Phi_2+v^2\Phi_1); \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{uv}=\frac{\Phi_2{}^2+\Psi_2{}^2}{\Delta^2}\Big[&-\Delta\left\{\binom{1}{1\,uv}+\binom{2}{1\,vv}\right\}-\binom{1}{1\,u}\binom{1}{1\,u}-2\cdot\binom{1}{1\,u}\binom{2}{1\,v}\\&+\binom{1}{2\,u}\binom{1}{1\,v}-\binom{2}{1\,u}\binom{1}{1\,v}+2\cdot\binom{1}{1\,v}\binom{2}{2\,v}-\binom{1}{2\,v}\binom{2}{1\,v}\\&-2\cdot\binom{2}{1\,v}\binom{2}{1\,v}\Big]\\+\frac{\Phi_1\Phi_2+\Psi_1\Psi_2}{\Delta^2}\Big[&\Delta\left\{-\binom{1}{1\,uu}+\binom{1}{2\,uv}-\binom{2}{1\,uv}+\binom{2}{2\,vv}\right\}+3\cdot\binom{1}{1\,u}\binom{1}{2\,u}\\&-\binom{1}{1\,u}\binom{2}{1\,u}+4\cdot\binom{1}{1\,u}\binom{2}{2\,v}-\binom{1}{2\,u}\binom{1}{2\,v}-\binom{2}{1\,u}\binom{2}{1\,v}\\&+2\cdot\binom{2}{2\,u}\binom{1}{1\,v}-\binom{1}{2\,v}\binom{2}{2\,v}+3\cdot\binom{2}{1\,v}\binom{2}{2\,v}\Big]\\+\frac{\Phi_1{}^2+\Psi_1{}^2}{\Delta^2}\Big[&\Delta\left\{\binom{1}{2\,uu}+\binom{2}{2\,uv}\right\}+2\cdot\binom{1}{1\,u}\binom{2}{2\,u}-\binom{1}{2\,u}\binom{2}{1\,u}\\&-2\cdot\binom{1}{2\,u}\binom{1}{2\,u}-2\cdot\binom{1}{2\,u}\binom{2}{2\,v}-\binom{2}{2\,u}\binom{1}{2\,v}+\binom{2}{2\,u}\binom{2}{1\,v}\\&-\binom{2}{2\,v}\binom{2}{2\,v}\Big];\end{aligned} \tag{18}$$

$$uv(u-v)\left\{\binom{1}{2\,u}+\binom{2}{2\,v}\right\}=\Phi_2(u^2\Psi_2+v^2\Psi_1). \tag{19}$$

§ 4.

Was die analytische Natur der Funktionen Φ_1, Ψ_1, Φ_2, Ψ_2, die ihrer geometrischen Bedeutung wegen im folgenden kurz als *Invarianten* bezeichnet werden sollen, betrifft, so ist klar, daß keine identisch gleich unendlich sein darf, weil sonst eine *W*-Fläche vorläge. Es sollen jetzt einige Annahmen über die analytische Beschaffenheit der Φ_1, Ψ_1, Φ_2, Ψ_2 erörtert werden, und zwar, daß einige der vier Invarianten

a) identisch gleich Null sind,

b) sich auf Konstante reduzieren,

c) daß die Φ_1, Ψ_1, Φ_2, Ψ_2 gewisse einfache analytische Eigenschaften aufweisen.

a) Wegen $\Phi_2\Psi_1-\Psi_2\Phi_1 \neq 0$ können höchstens zwei der vier Invarianten identisch verschwinden, und zwar sind zwei Fälle möglich:

$$\Phi_2=0,\ \Psi_1=0 \quad \text{oder} \quad \Phi_1=0,\ \Psi_2=0.$$

Im ersten Falle ergibt sich mit Hilfe der ersten und dritten Fundamentalgleichung, daß eine Relation zwischen u und v bestehen müßte; dieser Fall würde also zu *W*-Flächen führen.

Im andern Falle, wo

$$\Phi_1 = 0, \quad \Psi_2 = 0$$

ist, ergibt sich aus der ersten und dritten Fundamentalgleichung:

$$L_v = \frac{1}{2}(L + vL_v)\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right) \quad \text{und} \quad N_u = \frac{1}{2}(N + uN_u)\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right),$$

woraus durch Integration folgt:

$$L = \frac{1}{U(u)} \cdot \frac{v}{(u-v)^2}, \quad N = \frac{1}{V(v)} \cdot \frac{u}{(u-v)^2};$$

deshalb ist auch:

$$E = \frac{1}{U(u)} \cdot \frac{v^2}{(u-v)^2}, \quad G = \frac{1}{V(v)} \cdot \frac{u^2}{(u-v)^2}.$$

$U(u)$ und $V(v)$ müssen noch so bestimmt werden, daß die Fundamentalgleichung (B) erfüllt ist. Man findet dafür:

$$2(U + V + 1) = (u - v)(U' - V'),$$

woraus durch Integration folgt:

$$U + V + 1 = (u - v) \cdot F(u + v),$$

wo F eine Funktion von $u + v$ bedeutet. Hieraus ergeben sich leicht für U und V die Ausdrücke:

$$\begin{cases} U = ku^2 + 2lu + m, \\ V = -kv^2 - 2lv - m - 1, \end{cases}$$

wo k, l und m beliebige Konstante sind; und für Ψ_1 und Φ_2 folgt dann:

$$\begin{cases} \Psi_1 = \dfrac{u-v}{v}\sqrt{ku^2 + 2lu + m}, \\[2ex] \Phi_2 = \dfrac{u-v}{u}\sqrt{-kv^2 - 2lv - m - 1}. \end{cases}$$

Es wird im II. Abschnitt gezeigt werden, daß bei dieser Annahme, die mit den drei Fundamentalgleichungen in Einklang steht, wirklich reelle Flächen existieren.

b) Von den Fällen, daß einige der Invarianten Φ_1, Ψ_1, Φ_2, Ψ_2 auf Konstante reduziert sind, führt derjenige, wo alle vier Größen Φ_1, Ψ_1, Φ_2, Ψ_2 Konstante sind, sofort zu einer abwickelbaren Fläche. Sind aber drei der Invarianten konstante Größen, und nur *eine* eine Funktion von u und v, so läßt sich aus den drei Fundamentalgleichungen heraus nachweisen, daß es hierfür, bei Ausschluß der W-Flächen, keine reelle Fläche gibt.

c) Φ_1, Ψ_1, Φ_2, Ψ_2 mögen jetzt gewisse, einfache analytische Eigenschaften besitzen.

Die Annahme, daß alle vier Invarianten Funktionen von u, bezw. von v allein seien, führt zu Widersprüchen mit den Voraussetzungen; desgleichen die Festsetzung, daß die Φ_1, Ψ_1, Φ_2, Ψ_2 ganze, in u und v

homogene Funktionen von der Dimension p, bezw. q, r, s sind, wo p, q, r, s ganze Zahlen bezeichnen. Der Beweis für diese Behauptung ergibt sich aus der Fundamentalgleichung (B), wenn man die Dimensionen der rechts und links auftretenden Ausdrücke bestimmt.

Es werde ferner den Invarianten die Form gegeben:

$$\Phi_1 = a_1 u + b_1 v + c_1,$$

usw. auch für Ψ_1, Φ_2, Ψ_2, und hierfür die Bedingungsgleichungen (17) und (19) gebildet. Damit diese Gleichungen für beliebige Wertepaare (u, v) erfüllt sind, müssen die Koeffizienten gleichstimmiger Potenzen von u und v einzeln verschwinden; so ergeben sich insgesamt 21 Bedingungsgleichungen für die zwölf Konstanten $a_1, b_1, \cdots, c_4$. Die Untersuchung dieser Gleichungen führt zum Schlusse, daß bei dieser Annahme eine Fläche mit den geforderten Eigenschaften nicht möglich ist.

Schließlich werde angenommen:

$$\Phi_1 = a_1 u^2 + 2 b_1 u v + c_1 v^2 + 2 d_1 u + 2 e_1 v + f_1,$$

usw. auch für Ψ_1, Φ_2, Ψ_2. Gerade so wie oben folgen für die 24 Konstanten $a_1, b_1, \cdots, f_4$ im ganzen 47 Gleichungen, deren umfangreiche Diskussion ebenfalls ergibt, daß eine Fläche der verlangten Art auch jetzt nicht existieren kann.

Es darf hiernach als wahrscheinlich bezeichnet werden, daß nicht alle vier Invarianten $\Phi_1, \Psi_1, \Phi_2, \Psi_2$ Funktionen sein dürfen, die nach positiven, ganzen Potenzen von $u = R_1$, und $v = R_2$ entwickelbar sind, zumal auch schon beim einfachsten Falle: $\Phi_1 = 0$, $\Psi_2 = 0$, mit Hilfe der drei Fundamentalgleichungen, unter Ausschluß imaginärer und W-Flächen, die beiden andern Invarianten, Ψ_1 und Φ_2, sich als algebraische Funktionen von R_1 und R_2 herausgestellt haben, die keine Reihenentwicklung nach ganzen, positiven Potenzen von R_1 und R_2 zulassen.

II.

Untersuchung des speziellen Falles, das zwei der Invarianten $\Phi_1, \Psi_1, \Phi_2, \Psi_2$ identisch verschwinden.

§ 5.

In diesem Abschnitte soll der Fall behandelt werden, daß die Invarianten einer Fläche gegeben sind durch:

$$\Phi_1 = 0, \qquad \Psi_1 = \frac{u-v}{v}\sqrt{ku^2 + 2lu + m},$$

$$\Phi_2 = \frac{u-v}{u}\sqrt{-kv^2 - 2lv - m - 1}, \quad \Psi_2 = 0.$$

Dafür finden sich die Fundamentalgrößen:

$$E = \frac{v^2}{(u-v)^2 U}, \quad F = 0, \quad G = \frac{u^2}{(u-v)^2 V};$$

$$L = \frac{v}{(u-v)^2 U}, \quad M = 0, \quad N = \frac{u}{(u-v)^2 V},$$

wenn

$$ku^2 + 2lu + m = U,$$
$$-kv^2 - 2lv - m - 1 = V$$

gesetzt wird.

Aus der Art, wie man zu diesen Invarianten kam, folgt, daß die Fundamentalgrößen den drei Fundamentalgleichungen genügen. Damit jedoch die resultierenden Flächen reell sind, muß E und G reell und größer als Null sein. Diese Forderung ist mit der Bedingung verknüpft, daß sowohl $U > 0$ als auch $V > 0$ ist. Da man u und v vertauschen darf, so ist unbeschadet der Allgemeinheit erlaubt, anzunehmen, daß entweder $k > 0$ oder $k = 0$ ist. Der Vereinfachung halber wird die folgende Rechnung für

$$k > 0$$

durchgeführt; man überzeugt sich aber leicht, daß das Endresultat auch für $k = 0$ richtig ist.

Damit für $k > 0$ der quadratische Ausdruck U größer als Null ist, muß u zwischen den Grenzen liegen:

$$-\infty < u < \frac{-l - \sqrt{l^2 - km}}{k}, \qquad \frac{-l + \sqrt{l^2 - km}}{k} < u < +\infty.$$

Damit aber gleichzeitig V größer als Null wird, ist erforderlich:

$$\frac{-l - \sqrt{l^2 - km - k}}{k} < v < \frac{-l + \sqrt{l^2 - km - k}}{k}.$$

Hieraus ersieht man, daß

$$l^2 - km - k > 0$$

sein muß, damit die Grenzen für v reell sind und die Fläche selbst keine W-Fläche wird. Wegen $k > 0$ ist umsomehr auch

$$l^2 - km > 0.$$

§ 6.

Um jetzt aus den bekannten Funktionen E, F, G, L, M, N von u und v die rechtwinkligen Koordinaten der Fläche in der Form zu finden:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v),$$

wird die Methode von O. Bonnet angewendet in der Darstellung, die

ihr G. **Scheffers** gegeben hat*). Unter Berücksichtigung von $F = M = 0$ erkennt man, daß die Lösung des Problems wesentlich darauf beruht, die totale Riccatische Differentialgleichung zu integrieren:

$$d\sigma = \left[-\frac{L}{2\sqrt{E}} + i\frac{E_v}{2D}\sigma - \frac{L}{2\sqrt{E}}\sigma^2\right]du + \left[-\frac{iN}{2\sqrt{G}} - i\frac{G_u}{2D}\sigma + \frac{iN}{2\sqrt{G}}\sigma^2\right]dv,$$

wodurch σ als Funktion von u und v bestimmt werden soll. Setzt man für E, G, L, N, E_v und G_u ihre Werte, so kommt:

$$d\sigma = -\frac{1+\sigma^2-2\sigma\sqrt{kv^2+2lv+m+1}}{2(u-v)\sqrt{ku^2+2lu+m}}\,du + \frac{1-\sigma^2-2\sigma\sqrt{ku^2+2lu+m}}{2(u-v)\sqrt{kv^2+2lv+m+1}}\,dv.$$

Diese Differentialgleichung kann nach der Methode von **Lagrange** in der Weise gelöst werden, daß man zuerst ein Integral λ der gleich Null gesetzten Gleichung bestimmt, indem dabei σ als eine Konstante aufgefaßt wird. Wenn man substituirt:

$$p = \frac{ku+l}{\sqrt{k}} + \sqrt{ku^2+2lu+m}, \qquad q = \frac{kv+l}{\sqrt{k}} + \sqrt{kv^2+2lv+m+1},$$

und zur Abkürzung setzt:

$$\frac{l^2-km}{k} = a^2, \quad \frac{l^2-km-k}{k} = b^2, \quad S = \sqrt{(\sigma^2+a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2},$$

so erhält man:

$$\lambda = \lg\left(\frac{2\sigma p - 1 + \sigma^2 - S}{2\sigma p - 1 + \sigma^2 + S}\right) - \lg\left(\frac{2\sigma q - 1 - \sigma^2 - S}{2\sigma q - 1 - \sigma^2 + S}\right),$$

und die Integration der vorgelegten partiellen Differentialgleichung läßt sich auf die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung zurückführen:

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} = \frac{\sigma(e^\lambda - 1)}{S^2 e^\lambda}\{S(e^\lambda - 1) + (\sigma^2 + a^2 + b^2)(e^\lambda + 1)\}.$$

Eine bekannte Methode**) liefert als deren allgemeines Integral:

$$e^\lambda = \frac{2(2a^2b^2c - [\sigma^2 + a^2 + b^2 + S])}{(\sigma^2 + a^2 + b^2 + S)(c[\sigma^2 + a^2 + b^2 + S] - 2)},$$

wo c eine Konstante ist.

Hieraus ergibt sich als allgemeinste Lösung der ursprünglichen Riccatischen Differentialgleichung:

$$\sigma = \frac{c(a^2q - b^2p) + p - q}{cpq - 1}.$$

---

*) G. **Scheffers**, Flächen, p. 310—337.

) Vergl. **Darboux, „Leçons sur la théorie générale des surfaces", t. I, Paris 1887, p. 24.

§ 7.

Um nunmehr die kartesischen Koordinaten x, y, z der gesuchten Fläche zu ermitteln, erteile man der Konstanten c nacheinander die Werte:

$$a_1 = 0,\; b_1 = \infty;\quad a_2 = -1,\; b_2 = +1;\quad a_3 = +i,\; b_3 = -i.$$

Dann sind nach der angegebenen Methode x, y, z bestimmt durch die Gleichungen:

$$dx = \frac{[b^2p^2 + a^2q^2 - 2a^2pq]\cdot\{(q^2+b^2)\sqrt{k} - 2lq\}}{k\{q(p^2+a^2) - p(q^2+b^2)\}^2}\,dp$$
$$+ \frac{[b^2p^2 + a^2q^2 - 2b^2pq]\cdot\{(p^2+a^2)\sqrt{k} - 2lp\}}{k\{q(p^2+a^2) - p(q^2+b^2)\}^2}\,dq;$$

$$dy = \frac{[-p^2q^2+1+\{(b^4-1)p^2+2(1-a^2b^2)pq+(a^4-1)q^2\}]\cdot\{(q^2+b^2)\sqrt{k}-2lq\}}{2k\{q(p^2+a^2)-p(q^2+b^2)\}^2}\,dp$$
$$+ \frac{[+p^2q^2-1+\{(b^4-1)p^2+2(1-a^2b^2)pq+(a^4-1)q^2\}]\cdot\{(p^2+a^2)\sqrt{k}-2lp\}}{2k\{q(p^2+a^2)-p(q^2+b^2)\}^2}\,dq;$$

$$dz = i\frac{[+p^2q^2+1-\{(b^4+1)p^2-2(1+a^2b^2)pq+(a^4+1)q^2\}]\cdot\{(q^2+b^2)\sqrt{k}-2lq\}}{2k\{q(p^2+a^2)-p(q^2+b^2)\}^2}\,dp$$
$$+ i\frac{[-p^2q^2-1-\{(b^4+1)p^2-2(1+a^2b^2)pq+(a^4+1)q^2\}]\cdot\{(p^2+a^2)\sqrt{k}-2lp\}}{2k\{q(p^2+a^2)-p(q^2+b^2)\}^2}\,dq.$$

Setzt man:

$$x = \frac{\sqrt{k}(\mathfrak{A}p^2 + 2\mathfrak{B}pq + \mathfrak{C}q^2) + 2l(\mathfrak{D}p + \mathfrak{E}q)}{k\{q(p^2+a^2) - p(q^2+b^2)\}}$$

und bildet $\frac{\partial x}{\partial p}$ und $\frac{\partial x}{\partial q}$, so lassen sich die Koeffizienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ leicht bestimmen. Bei der Berechnung von y setzt man:

$$y = \frac{\sqrt{k}(\mathfrak{A}p^2q^2 + \mathfrak{B}p^2 + \mathfrak{C}q^2 + \mathfrak{D}) + 2l(\mathfrak{E}p^2q + \mathfrak{F}pq^2 + \mathfrak{G}p + \mathfrak{H}q)}{2k\{q(p^2+a^2) - p(q^2+b^2)\}}.$$

Für z wird ein gleich gebauter Ausdruck substituiert, und im übrigen wie bei der Berechnung von x verfahren. Man erhält so eine imaginäre Fläche, deren Koordinaten x, y, z umständliche Funktionen in p und q sind. Nach Ausführung der imaginären Koordinatentransformation:

$$\begin{cases} \bar{x} = \quad 0\cdot x + \dfrac{1+a^2b^2}{2ab}\cdot y + i\,\dfrac{1-a^2b^2}{2ab}\cdot z - \dfrac{al}{bk}, \\[2mm] \bar{y} = -a\cdot x + \dfrac{1-a^2b^2}{2a}\cdot y + i\,\dfrac{1+a^2b^2}{2a}\cdot z - \dfrac{al}{k}, \\[2mm] \bar{z} = \quad ib\cdot x + i\,\dfrac{-1+a^2b^2}{2b}\cdot y + \dfrac{1+a^2b^2}{2b}\cdot z + i\,\dfrac{bl}{k} \end{cases}$$

ergeben sich jedoch einfachere Ausdrücke für die kartesischen Koordinaten

der Fläche, die schließlich, nachdem für p, q, a und b die Werte eingesetzt sind, in der Form erscheinen:

$$\begin{cases} x = \dfrac{kuv + lv}{\sqrt{l^2 - km}\sqrt{l^2 - km - k(u-v)}}, \\ y = \dfrac{v\sqrt{ku^2 + 2lu + m}}{\sqrt{l^2 - km}\,(u - v)}, \\ z = \dfrac{u\sqrt{-kv^2 - 2lv - m - 1}}{\sqrt{l^2 - km - k(u-v)}}. \end{cases}$$

Ein spezieller Fall dieser Fläche, der hieraus durch:

$$k = \frac{-1}{c^2 - b^2}, \quad l = 0, \quad m = \frac{b^2}{c^2 - b^2}; \quad u = R_1, \quad v = -R_2$$

hervorgeht; nämlich:

$$\begin{cases} x = \dfrac{c^2 - b^2}{bc} \cdot \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \\ y = \dfrac{\sqrt{c^2 - b^2}}{b} \cdot \dfrac{R_2\sqrt{b^2 - R_1^2}}{R_1 + R_2}, \\ z = \dfrac{\sqrt{c^2 - b^2}}{c} \cdot \dfrac{R_1\sqrt{R_2^2 - c^2}}{R_1 + R_2}, \end{cases}$$

findet sich schon in einer Abhandlung von Strebor (W. Roberts) in den *Nouvelles Annales de Mathématiques*, Série II, 1, 1862, p. 170, und Série II, 4, 1865, p. 169. Diesen Literaturnachweis verdanke ich Herrn Professor P. Stäckel.

§ 8.

Die gefundene Fläche hat, wie man sofort verifiziert, in der Tat die vorgegebenen natürlichen Gleichungen, und die Parameter u und v sind mit den Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 identisch.

Stellt man noch die Gleichungen der Zentraflächen auf, so erkennt man, daß die beiden Mäntel in Kurven, C_1 und C_2, ausarten, und zwar speziell in Kegelschnitte, die derartig zueinander liegen, daß sie alle Eigenschaften von *Fokalkegelschnitten* erfüllen. Im besondern ist:

*	$k > 0$	$k = 0$	$k < 0$
C_1	Hyperbel	Parabel	Ellipse
C_2	Ellipse	Parabel	Hyperbel

.

Die betrachtete Fläche, die in doppelter Weise als Kanalfläche aufgefaßt

werden kann, ist somit eine *allgemeine Dupinsche Cyklide*, indessen mit Ausschluß des Torus.

Diese im „einfachsten" Falle: $\Phi_1 = 0$, $\Psi_2 = 0$ erhaltene Fläche bildet ein bemerkenswertes Gegenstück zum Kreise, welchen man bei der „einfachsten" Annahme über die natürlichen Gleichungen räumlicher Kurven, nämlich aus $r =$ konst., $\varrho = \infty$, erhält. Hier wie dort erleidet das durch die Gesamtheit der Krümmungsmittelpunkte vorgestellte Raumgebilde eine Einbuße in seinen Dimensionen: Beim Kreise schrumpft die Krümmungsmittelpunktskurve in einen Punkt zusammen; bei der allgemeinen Dupinschen Cyklide sind beide Mäntel der Krümmungsmittelpunktsfläche auf Kurven reduziert.

Für die Dupinschen Cykliden, auf welche diese Untersuchung führt, läßt sich noch eine neue, charakteristische Eigenschaft angeben. Fragt man nämlich nach den natürlichen Gleichungen derjenigen Flächen, für die bei der Annahme, daß $u = R_1 =$ konst. und $v = R_2 =$ konst. die Parameterkurven vorstellen, $F = 0$ und $M = 0$ ist und für die daher diese Parameterkurven Krümmungslinien sind, so erkennt man aus den Gleichungen (8) und (15) für F und M, daß zwei der Invarianten Φ_1, Ψ_1, Φ_2, Ψ_2 identisch verschwinden müssen. Da aber nur die Kombination: $\Phi_1 = 0$ und $\Psi_2 = 0$ eine mit den getroffenen Voraussetzungen nicht im Widerspruch stehende Fläche liefert, nämlich die hier gefundene allgemeine Dupinsche Cyklide, so ergibt sich der *Satz:*

Man erhält alle reellen Flächen, bei welchen die Parameterlinien $R_1 =$ konst. und $R_2 =$ konst. mit den Krümmungskurven zusammenfallen, wenn man die allgemeine Dupinsche Cyklide:

$$\begin{cases} x = \dfrac{kuv + lv}{\sqrt{l^2 - km}\sqrt{l^2 - km - k(u-v)}}, \\[2ex] y = \dfrac{v\sqrt{ku^2 + 2lu + m}}{\sqrt{l^2 - km}\,(u-v)}, \\[2ex] z = \dfrac{u\sqrt{-kv^2 - 2lv - m - 1}}{\sqrt{l^2 - km - k(u-v)}} \end{cases}$$

allen Bewegungen des Raumes unterwirft.

Hinsichtlich der genaueren Durchführung der bei diesen Betrachtungen anstehenden Rechnungen sei auf meine Inaugural-Dissertation *„Untersuchungen über die natürlichen Gleichungen krummer Flächen"*, Kiel 1903, verwiesen.

Kiel, im Dezember 1903.

Die Konstruktion des geradlinigen Dreiecks der nichteuklidischen Geometrie aus den drei Winkeln.

Von

Marcel Grossmann in Frauenfeld (Schweiz).

Das Problem, ein Dreieck der nichteuklidischen Geometrie aus den drei gegebenen Winkeln zu konstruieren, ist bisher, wie es scheint, erst zweimal behandelt worden. Herr M. Simon hat*) eine Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks aus den zwei spitzen Winkeln gegeben, und eingehender wurde das Problem erörtert von Herrn H. Liebmann**), unter Berücksichtigung aller möglichen Fälle. (Reelle Winkel, Überwinkel, Nullwinkel.)

Die Konstruktionen der nichteuklidischen Geometrie, welche bis jetzt veröffentlicht wurden, gründen sich entweder auf elementar-geometrische Betrachtungen oder sind der Ausdruck trigonometrischer Formeln der nichteuklidischen Geometrie. Viel leichter durchführbar und viel anschaulicher werden die sämtlichen fundamentalen Konstruktionen der nichteuklidischen Geometrie, wenn man sich auf den Standpunkt der Cayleyschen Maßgeometrie stellt. Durch Angabe des absoluten Kegelschnittes der Ebene sind die Maßverhältnisse für alle Konstruktionsaufgaben genügend bestimmt, und es gelingt, alle fundamentalen Aufgaben (der hyperbolischen und der elliptischen Geometrie) sehr einfach zu lösen.***)

Die Konstruktion des Dreiecks aus den drei Winkeln ist bei gegebenem absoluten Kegelschnitt ein einfaches, quadratisches Problem der projektiven Geometrie. *Eine* Methode erledigt hier *alle* Fälle, gleichgültig ob unter den gegebenen Winkeln Null- und Überwinkel vorkommen oder nicht.

---

*) M. Simon, Zwei Sätze zur nichteuklidischen Geometrie, Math. Ann. 48 (1897).

**) H. Liebmann, Die Konstruktion des geradlinigen Dreiecks der nichteuklidischen Geometrie aus den drei Winkeln, Sächs. Berichte, Bd. 53, Heft VII.

***) Vgl. Marcel Großmann, Die fundamentalen Konstruktionen der nichteuklidischen Geometrie, Beilage zum Programm der thurgauischen Kantonsschule auf das Jahr 1903/04, Frauenfeld, Huber u. Co.

I. Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks.

Es sei, in Fig. 1, Ω der absolute Kegelschnitt, d. h. die unendlich ferne Kurve der hyperbolischen Ebene. C sei die gegebene Ecke des rechten Winkels, s_1 und s_2 seien dessen Schenkel. Es muß also s_2 durch den absoluten Pol S_1 von s_1 gehen. Die Gerade a bilde mit s_1 den Winkel α, während b mit s_2 den Winkel β bilde.

Unsere Aufgabe ist gelöst, wenn es gelingt eine Gerade anzugeben, welche mit s_1 den Winkel α und zugleich mit s_2 den Winkel β bildet.

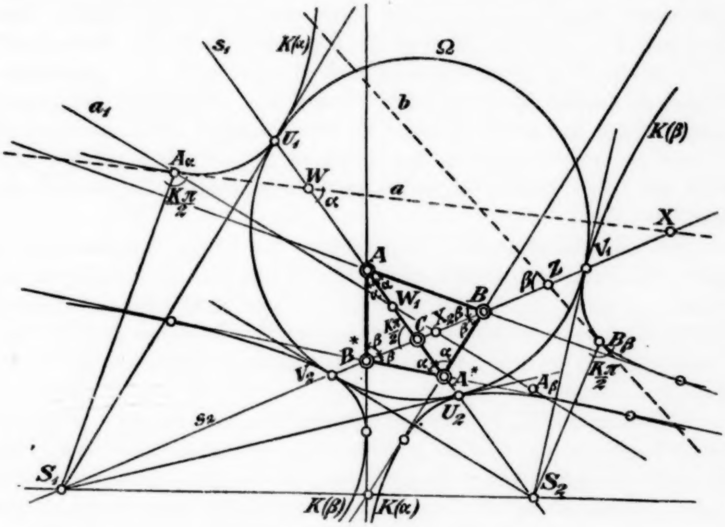


Fig. 1.

Denkt man sich die hyperbolische Ebene längs der Geraden s_1 verschoben, (oder um S_1 gedreht), so umhüllt die mitgenommene Gerade a einen Kegelschnitt $K(\alpha)$, einen sog. Überkreis, der den absoluten Kegelschnitt Ω in den unendlich fernen Punkten U_1 und U_2 der Geraden s_1 berührt. Den nämlichen Kegelschnitt beschreibt auch der Fußpunkt $A(\alpha)$ des Lotes von S_1 auf a. (Dieses Lot ist die Verbindungslinie von S_1 mit dem absoluten Pol von a.) Jede Tangente dieses Kegelschnittes ist gegen s_1 unter dem Winkel α geneigt.

Ebenso umhüllen alle Geraden, die s_2 unter dem Winkel β treffen, einen Kegelschnitt $K(\beta)$, der Ω in V_1 und V_2 berührt.

Die beiden Kegelschnitte $K(\alpha)$ und $K(\beta)$ sind durch je drei Tangenten samt Berührungspunkten bestimmt. Denn a berührt $K(\alpha)$ in $A(\alpha)$ und b berührt $K(\beta)$ in $B(\beta)$.

Die gemeinsamen Tangenten der beiden Kegelschnitte $K(\alpha)$ und $K(\beta)$ treffen s_1 und s_2 in den Ecken der rechtwinkligen Dreiecke, deren spitze Winkel α und β sind.

Man erhält durch die Konstruktion der genannten 4 Tangenten also sofort alle 4 rechtwinkligen Dreiecke der gesuchten Art, die sich um C gruppieren.

Die Bestimmung dieser 4 Tangenten ist aber im vorliegenden Falle keine Aufgabe vierten, sondern nur *zweiten* Grades. *Denn man kennt das gemeinsame Polardreieck der beiden Kegelschnitte $K(\alpha)$ und $K(\beta)$.* Denn $K(\alpha)$ und $K(\beta)$ berühren Ω doppelt, also gehen durch den Schnittpunkt C der beiden Berührungssehnen s_1 und s_2 auch noch zwei gemeinsame Sehnen der beiden Kegelschnitte.*) Somit ist C eine Ecke des gemeinsamen Tripels, und also $S_1 S_2$ eine Seite dieses Tripels. Weil aber s_2 durch S_1 geht, so muß CS_2 d. i. s_1 die Polare von S_1 in Bezug auf $K(\alpha)$ *und* $K(\beta)$ sein. Das Dreieck CS_1S_2 ist also das gemeinsame Polardreieck von $K(\alpha)$ und $K(\beta)$.

Um also die gemeinsamen Tangenten der beiden Kegelschnitte zu finden, hat man, (wie die Theorie inzidenter Polarsysteme zeigt), auf den Seiten s_1 und s_2 die Doppelpunkte AA^* bezw. BB^* der Involutionen doppel-konjugierter Elemente zu suchen; diese Punkte haben gleiche Polarinvolutionen für beide Kegelschnitte und von ihnen aus gehen je zwei der gesuchten Tangenten.

Die Konstruktion der doppelt-konjugierten Geraden zu a (d. h. der Verbindungslinie der Pole A_α und A_β von a bezüglich $K(\alpha)$ bezw. $K(\beta)$ ist aber hier sehr bequem durchführbar, weil beide Kegelschnitte durch je drei Tangenten mit den zugehörigen Berührungspunkten gegeben sind. Man findet so den Pol A_β von a bezüglich $K(\beta)$ und damit die doppeltkonjugierte Gerade $a_1 \equiv A_\alpha A_\beta$ zu a. Damit ist die Involution J_1 der doppelt-konjugierten Elemente auf s_1 bestimmt durch die Pare CS_2 und WW_1 und daher auch ihre Doppelpunkte A und A^*. Ebenso ist die entsprechende Involution J_2 auf s_2 bestimmt durch die Paare CS_1 und XX_2, ihre Doppelpunkte sind B und B^*.

Die Geraden AB, AB^*, A^*B und A^*B^* sind gemeinsame Tangenten beider Kegelschnitte, also gegen s_1 und s_2 unter den Winkeln α bezw. β geneigt. ABC, AB^*C, A^*BC und A^*B^*C sind somit die gesuchten rechtwinkligen Dreiecke.

*) Vgl. Steiner, Allg. Betrachtungen über einander doppelt-berührende Kegelschnitte, Werke, Bd. II, p. 469.

Die fertige Figur muß zahlreichen Genauigskeitsproben genügen: die Strecken AB, A^*B, AB^* und A^*B^* müssen hyperbolisch gleich sein, C muß der Mittelpunkt von AA^* und von BB^* sein usw. Diese Proben gründen sich natürlich auf die entsprechenden fundamentalen Konstruktionen der hyperbolischen Geometrie, es sei daher auf die zitierte Programmarbeit hingewiesen. Die meisten dieser Proben erfordern wenige Linien.

II. Konstruktion des beliebigen Dreiecks.

Es sei, in Fig. 2, wieder Ω der absolute Kegelschnitt, bei C sei der Winkel γ durch die beiden Schenkel s_1 und s_2 festgelegt. Der Winkel α

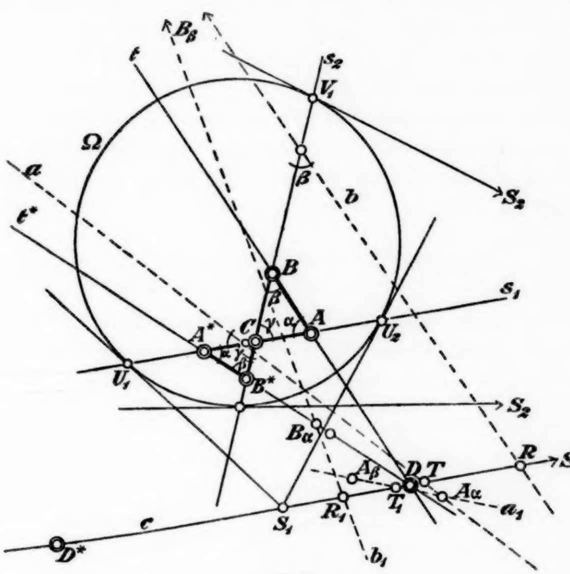


Fig. 2.

sei gegeben als Neigungswinkel der Geraden a gegen s_1, ebenso definiere b den Winkel β. Damit sind wieder die beiden Kegelschnitte $K(\alpha)$ und $K(\beta)$ bestimmt.

Die gemeinsamen Tangenten dieser Kegelschnitte (es sind die Geraden t und t^* der Figur) *enthalten die dritten Seiten der gesuchten Dreiecke.*

Das biquadratische Problem der Bestimmung der vier gemeinsamen Tangenten von $K(\alpha)$ und $K(\beta)$ ist aber auch hier reduziert auf ein quadratisches, da man eine Ecke und die Gegenseite des gemeinsamen

Polardreiecks von $K(\alpha)$ und $K(\beta)$ kennt. Nach dem schon zitierten Steinerschen Satze gehen durch C ja auch zwei gemeinsame Sehnen von $K(\alpha)$ und $K(\beta)$, also ist C eine Ecke des genannten Polardreiecks und es entspricht ihr in beiden Polarsystemen $S_1 S_2 \equiv c$ als Polare. Man hat daher auf c diejenigen Punkte D, D^* zu bestimmen, welche gleiche Polarinvolutionen in Bezug auf $K(\alpha)$ und $K(\beta)$ haben. Es sind wieder die Doppelpunkte der Involution doppelt-konjugierter Elemente auf c. Es ist also in erster Linie diese Involution zu bestimmen, indem man zu a und b die Pole A_α, B_α bezw. A_β, B_β in Bezug auf K_α bezw. K_β bestimmt. A_α und B_β sind sofort als Berührungspunkte von a und b mit $K(\alpha)$ bezw. $K(\beta)$, oder als Fußpunkte der Lote von S_1 bezw. S_2 auf jene Geraden bestimmt. A_β und B_α bestimmt man am besten (durch Konstruktion harmonischer Gruppen) durch die Schnittpunkte mit den Dreiecksseiten $U_1 U_2 A_\alpha$ bezw. $V_1 V_2 B_\beta$. $A_\alpha A_\beta$ ist a_1, $B_\alpha B_\beta$ ist b_1 und aa_1 bezw. bb_1 bestimmen die Paare TT_1 und RR_1 der Involution auf c. D und D^* sind die Doppelpunkte dieser Involution. Die Polarinvolution um D ist in Fig. 2 hyperbolisch und liefert als ihre Doppelstrahlen die Geraden t und t^*, welche $K(\alpha)$ und $K(\beta)$ berühren, also gegen s_1 unter dem Winkel α und gegen s_2 unter dem Winkel β geneigt sind. Die Involution bei D^* ist elliptisch.

ABC und A^*B^*C sind zwei Dreiecke mit den vorgeschriebenen Winkeln α, β und γ.

Die Anwendung dieser Methode auf die Konstruktion des Dreiecks der *elliptischen* Ebene bietet keinerlei Schwierigkeit und ist in der genannten Programmarbeit durchgeführt.

Frauenfeld, 3. Dezember 1903.

Zur Proportionslehre.

Von

Adolf Kneser in Berlin.

Einige Bemerkungen von Schur*) über einen von mir in der Berliner Mathematischen Gesellschaft gehaltenen Vortrag**) veranlassen mich zu folgender Erwiderung.

Schur spricht von „dem Kneserschen Berichte, der sich teils an Kupffer, teils an Hilbert anlehnt". Dazu bemerke ich, daß meine Arbeit überhaupt kein Bericht ist; die Grundidee, einen neuen von Stetigkeitsbetrachtungen freien Aufbau der Proportionslehre in der Ebene, nehme ich als mein Eigentum in Anspruch. Das Besondere meiner Darstellung liegt hauptsächlich darin, daß in ihr jener Schnittpunktssatz, den Hilbert als den Pascalschen bezeichnet, durchaus keine beherrschende Stellung einnimmt, sondern ebenso wie viele verwandte Sätze durch einfache Streckenrechnungen bewiesen werden kann, die seit Carnots Géométrie de position allgemein bekannt sind.

Ich widerspreche ferner der Behauptung***), daß ich mich im zweiten Teile meiner Arbeit „Hilbert vollkommen anschließe". Gerade hier erkennt man leicht eine prinzipielle Abweichung, indem ich die Assoziativität der Multiplikation von Strecken algebraisch beweise, wodurch diese Eigenschaft als Folge der Kommutativität erscheint, während Hilbert†) die Assoziativität aus geometrischer Quelle ableitet. Daß in meinem zweiten Abschnitt die Multiplikation der Strecken im Zusammenhang mit den Proportionen erklärt wird, habe ich allerdings mit Hilbert gemein, aber auch mit Descartes††).

*) Zur Proportionslehre, Math. Ann. **57** S. 205 ff.

) Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges. **1 S. 4. Archiv d. Math. Phys. (3) **2**.

***) S. 207.

†) Grundlagen der Geometrie (1899) S. 34.

††) Stolz und Gmeiner, Theoretische Arithmetik S. 130.

Die Bemerkung Schurs, aus meinem „Bericht" gehe das Verdienst Kupffers nicht deutlich hervor, kann ich auf sich beruhen lassen, indem ich darauf hinweise, daß ich es gewesen bin, der Kupffers Arbeit zuerst, und zwar an verschiedenen Orten erwähnt hat*).

Was endlich meinen Hinweis auf Grassmann betrifft, den Schur polemisch erörtert, so benutze ich gern die Gelegenheit zu erklären, weshalb es mir wichtig scheint, die übrigens schon von Stolz**) zitierte Stelle der linealen Ausdehnungslehre nicht in Vergessenheit geraten zu lassen. Nachdem Hilbert als erster eine vollständige von Stetigkeitsbetrachtungen unabhängige Proportionslehre entwickelt hatte, behauptete Schur***), er habe zu einer solchen Proportionslehre „alle Elemente gegeben". Demgegenüber halte ich es für angebracht, Grassmann und den ebenfalls von mir zitierten Hoppe als Bahnbrecher für die von Hilbert realisierte Idee einer Proportionslehre der bezeichneten Art an erster Stelle zu nennen.†)

Berlin, Januar 1904.

*) Außer meinem Vortrag Bibliotheca math. (3) **2** S. 453. Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung **11**, S. 71.

**) Vorlesungen über Arithmetik (1. Aufl.) Bd. I, S. 335.

***) Math. Ann. **55**, S. 265.

†) Wir schließen hiermit die Erörterungen über die im Text behandelten Prioritätsfragen, ohne selbst zu denselben Stellung zu nehmen.

D. Red.

Bemerkung zum Aufsatz von E. J. Wilczynski.

(Seite 256.)

The theorem on page 256 is liable to misinterpretation, as Mr. Corrado Segre has kindly pointed out to me. The self-dual surfaces mentioned in the theorem are such, that a dualistic transformation exists which transforms every one of the generators of such a surface into *itself*. There exist ruled surfaces, not belonging to a linear complex, invariant under a dualistic transformation, which does not however have the individual generators unchanged.

nst
em
rst,

sch
mir
len
ert
ro-
ner
ich
ppe
nre

ler

ten

gre
re
he
ng
not